

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В АБСОЛЮТНО ГИБКОЙ НИТИ

УДК 534.1

В. В. Ридель, М. А. Ильгамов

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН,
420111 Казань

1. Постановка задачи и метод решения. Хорошо известны колебательные системы, обладающие несимметричными характеристиками восстанавливающей и извне действующей сил. Классическим примером является маятник, ход которого с одной стороны ограничен. Математическое описание этих систем содержит неравенства, что приводит к разрывам первого рода в коэффициентах уравнений или в их правых частях [1]. В литературе значительное внимание уделено изучению особенностей ударного осциллятора.

В твердых деформируемых телах могут иметь место разные модули упругости для растянутой и сжатой зон [2]. Вопросы динамического поведения элементов из таких материалов рассматриваются, например, в [2–6]. Показано, в частности, что наряду с множеством установившихся состояний, зависящих только от начальных условий, существуют субгармонические резонансы. Они могут сопровождаться каскадом бифуркаций удвоения периода.

В данной работе анализируется модель, в которой неравенство в физическом законе приводит к изменению типа дифференциального уравнения движения. Выявляется ряд особенностей, не изученных, по мнению авторов, в теории нелинейных колебаний и волн.

Рассматриваются продольные колебания предварительно натянутой прямолинейной вязкоупругой нити, один конец которой неподвижен, а другой колеблется вдоль нити по гармоническому закону. Диссипация энергии определяется наличием физической вязкости материала, которая описывается моделью Кельвина — Фойгта. Главной особенностью задачи является условие абсолютной гибкости нити, из которого следует, что она не может сопротивляться сжимающим воздействиям (усилие в ней не может быть отрицательным).

Волновой процесс в вязкоупругой нити описывается следующей системой уравнений в безразмерной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial s}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial s}; \quad (1.1)$$

$$N = \begin{cases} f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}), & f \geq 0, \\ 0, & f < 0; \end{cases} \quad (1.2)$$

$$f = \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \partial x / \partial s - 1, \quad \partial x / \partial s \geq 0. \quad (1.3)$$

Здесь скорость u отнесена к скорости продольной упругой волны, координаты (x — эйлерова, s — лагранжева) — к длине нити, натяжение N — к модулю упругости; ε — деформация; $(\dot{}) \equiv \partial / \partial t$. Неравенство в (1.3) обеспечивает непроникновение соседних точек нити друг через друга. Граничные и начальные условия задачи имеют вид

$$x(0, t) = -p \sin \omega t, \quad x(1, t) = 1 + \varepsilon_0; \quad (1.4)$$

$$x(s, 0) = s(1 + \varepsilon_0), \quad u(s, 0) = 0 \quad (s > 0), \quad (1.5)$$

где ε_0 , p и ω — начальная деформация растяжения нити, амплитуда и круговая частота колебаний ее левого конца.

Нелинейность системы (1.1)–(1.5) обусловлена неравенством (1.2). При $N = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ и отсутствии ограничения на знак f в условии (1.2) задача сводится к известному уравнению

продольных колебаний вязкоупругого стержня:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - \eta \frac{\partial^3 x}{\partial x^2 \partial t} = 0, \quad (1.6)$$

для которого собственные частоты и коэффициенты затухания имеют вид

$$\omega_m = m\pi\sqrt{1 - (\eta m\pi/2)^2}, \quad \delta_m = (1/2)\eta m^2 \pi^2 \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (1.7)$$

Для интегрирования (1.1)–(1.5) применяется численный алгоритм, испытанный на расчетах нестационарных процессов в мягких оболочках [7] и основанный на явной схеме метода конечных разностей. На каждом временном слое анализируется тип напряженного состояния во всех элементах дискретной области нити, и, если где-либо $f < 0$, усилие N в соответствующем элементе зануляется без изменения его деформации. Для решений с непрерывной второй производной разностная схема обладает вторым порядком аппроксимации по τ и h и устойчива при выполнении условий [8]

$$0,5 - \sqrt{0,25 - \beta} < \tau/h < 0,5 + \sqrt{0,25 - \beta}, \quad \beta = \eta\tau/h^2 < 0,25.$$

Численным экспериментированием определяется практическая сходимость решения нелинейной задачи при измельчении h .

Описание переходного процесса и установившегося режима движения проводится по нескольким контрольным точкам (узлам разностной сетки). Для них строятся отображение Пуанкаре $X_n = X(t_0 + nT)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) и проекции фазовых траекторий на плоскость (w, u) , где w — смещение точки от положения равновесия при $t = 0$, а $T = 2\pi/\omega$ — период внешнего воздействия. Далее рассматриваются установившиеся режимы колебаний после многократного отражения волн от концов нити.

2. Колебания вязкоупругого стержня и нити. Для оценки влияния на волновой процесс ограничения (1.2) сравниваются решения двух задач: в одной неравенства (1.2) не учитываются, т. е. $N \equiv f$, в другой учитываются. В обоих вариантах принято $\omega = 6$, $\eta = 0,003$, $p = 0,005$.

В первом случае имеем линейную задачу (1.4)–(1.6) для вязкоупругого стержня. После выхода на установившийся режим колебания происходят с периодом внешнего воздействия. При этом сечение Пуанкаре — неподвижная точка. Фазовая траектория выходит на предельный цикл в форме эллипса (рис. 1, кривая 1). Здесь приведены результаты для средней точки ($s = 0,5$) на интервале времени $100T$ при $\omega = 6$. Распределение усилий имеет форму стоячей волны с двумя узлами и зонами сжатия. Это численное решение хорошо согласуется с аналитическим [9–11].

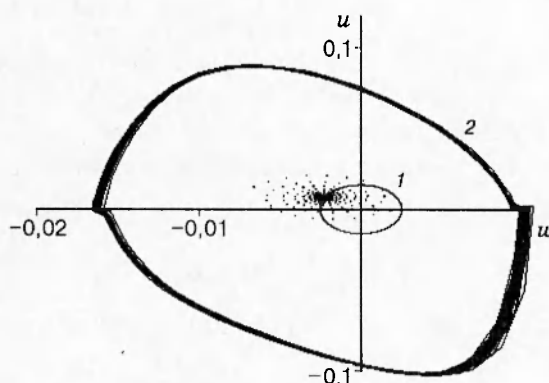


Рис. 1

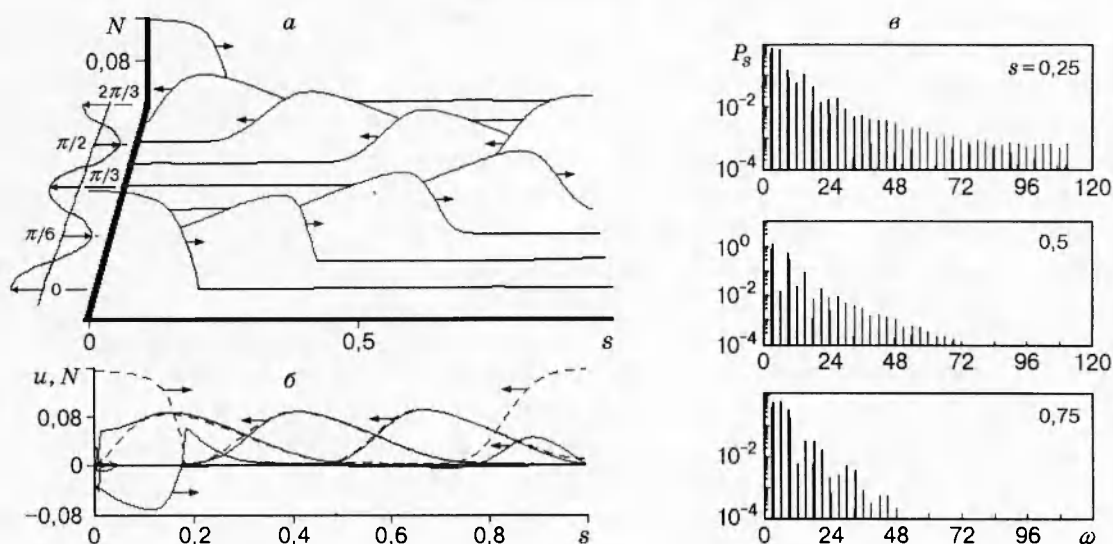


Рис. 2

При учете условий (1.2) характер волнового процесса коренным образом меняется. Фазовые траектории не являются гладкими (рис. 1, кривая 2). На них возникают угловые точки и прямолинейные отрезки. Распределение усилий по нити имеет характер бегущей волны растяжения (рис. 2, а). Результаты даны через равные промежутки $\Delta t = T/4 = \pi/12$ для $\omega = 6$. Вдоль временной оси схематично изображено изменение скорости левого конца нити на интервале $2T = 2\pi/3$. Стрелки указывают направление движения волны. Передний фронт волны сразу после отражения от одного из концов движется в сторону ненапряженной зоны, уменьшается по амплитуде и выполаживается. Сформировавшийся импульс имеет пологий задний фронт и занимает около половины длины нити. Заметим, что ненапряженные зоны в предварительно натянутой нити возникают после первого отражения волн от ее концов.

На рис. 2, б приведено сравнение волн натяжения N и скорости u (штриховая и сплошная линии соответственно). Изображены формы установившихся волн через равные промежутки времени $T/4$ в моменты после отражения от правого закрепленного конца, где $u = 0$, а натяжение максимально. Направление движения волн показано стрелками. Характерно, что в дальнейшем волны натяжения и скорости совпадают как по форме, так и по интенсивности. Это имеет место вплоть до момента, когда фронт доходит до левого конца нити. После отражения скорость меняет знак, как это показано стрелками на рис. 2, б. При движении вправо волны натяжения и скорости снова имеют одинаковые формы, но с разными знаками (на рисунке не приведены).

На рис. 2, в представлены спектры мощности P_s в трех точках. По оси абсцисс отложена круговая частота колебаний скорости в этих точках. Можно отметить следующие особенности:

- 1) спектр является дискретным по всем резонансным частотам (об этом более подробно сказано ниже);
- 2) колебания с более широким спектром происходят вблизи источника возбуждения ($s = 0,25$) и с менее широким спектром — у правого конца;
- 3) в середине нити мощность колебаний на частоте $\omega = 6$ почти на два порядка меньше, чем на соседних частотах, хотя возбуждение осуществляется именно на этой частоте.

Анализ влияния физической вязкости проводился для $\omega = 4$, $p = 0,005$ и $0,002 < \eta < 0,003$. Для коэффициента $\eta = 0,002$ система выходит на субгармонический режим коле-

баний с периодом $8T$ (в сечении Пуанкаре при установившемся движении наблюдаются четыре пары неподвижных точек). В диапазоне $0,0025 < \eta < 0,003$ система имеет предельный цикл с периодом T . Однако для интервала $0,002 < \eta < 0,0025$ не удалось обнаружить каскад удвоения периода. Таким образом, имеется сильная зависимость решения от диссипативного члена. В целом этот вопрос требует дальнейшего изучения.

3. Зависимость волн от частоты возбуждения и начального натяжения нити. Рассмотрим процесс возникновения нелинейных волн в нити при увеличении частоты возбуждения от $\omega = 1$ (для $\varepsilon_0 = 0,02$, $\eta = 0,003$, $p = 0,005$).

На рис. 3 приведен фазовый портрет для средней точки нити на интервале времени $100T$ при частотах возбуждения $\omega = 1; 2; 3$. Начальная деформация ε_0 повышает средний уровень натяжения в нити, относительно которого происходят колебания усилий. В связи с этим для $\omega = 1$ и 2 условие $f > 0$ не нарушается. Нить ведет себя как вязкоупругий стержень, в котором колебания имеют форму стоячей волны. При приближении ω к первой собственной частоте ω_1 , определяемой по (1.7), происходит резкое возрастание амплитуды. Как только волна разгрузки достигает значения $f < 0$, вступает в силу условие (1.2), в соответствии с которым значения N зануляются. На нити появляется ненапряженная зона, которая с течением времени движется, исчезает и вновь возникает.

Таким образом, стоячая линейная волна трансформируется в бегущую нелинейную с образованием крутых фронтов (рис. 4). Здесь картина построена для $\omega = 3$ и $\Delta t = T/8 = \pi/12$ на интервале времени $T = 2\pi/3$. Фазовый портрет для $\omega = 3$ резко меняется (см. рис. 3). Амплитуды колебаний существенно возрастают. Появляются угловые точки и горизонтальные участки траектории ($u = \text{const}$), характеризующие разрыв фазовой скорости и прохождение ненапряженной зоны через данную точку нити.

В сечении Пуанкаре для $\omega = 1$ и 2 наблюдается устойчивый фокус, отвечающий предельному циклу на рис. 3. При частоте $\omega = 3$, близкой к резонансной, в сечении Пуанкаре возникает плотное скопление точек. Такое движение можно только приближенно считать периодическим с частотой $\omega = 3$. Соответственно вместо предельного цикла имеется довольно плотный моток фазовых траекторий (см. рис. 3).

Отметим, что в интервале безразмерных частот возбуждения ω от 1 до 15 эпюра максимальных натяжений в точке $s = 0,25$ имеет пять пиков, отвечающих резонансам (рис. 5). Резонансные частоты кратны 3, в то время как собственные частоты из (1.7) кратны π (квадратный корень в (1.7) мало отличается от единицы). Разница может быть объяснена одновременным влиянием появляющихся ненапряженных зон и вязкости на волновой процесс (на уменьшение скорости распространения волн) в нелинейной задаче. В

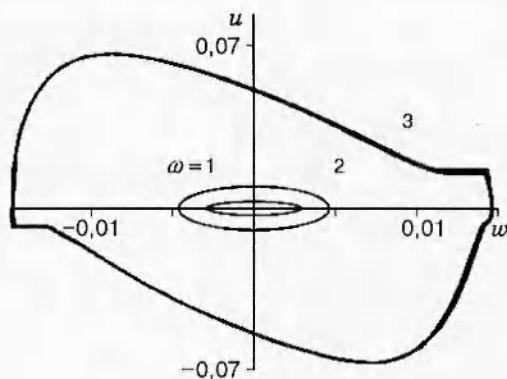


Рис. 3

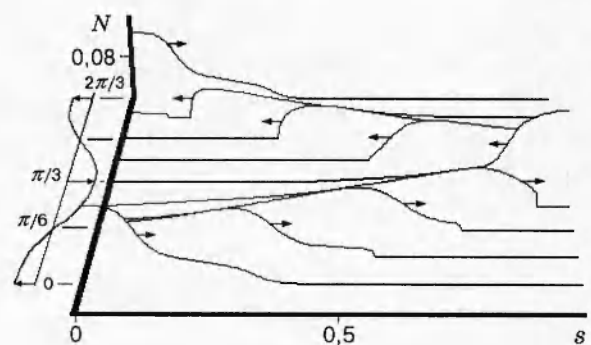


Рис. 4

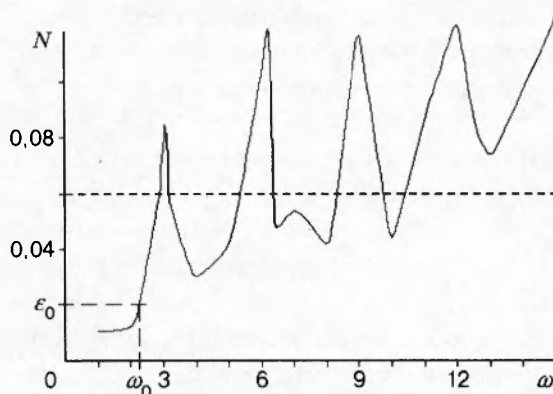


Рис. 5

частности, ненапряженные зоны нити обладают только массовой характеристикой в отсутствие упругих сил. Характерно, что, за исключением первого резонанса, все другие имеют одинаковую интенсивность, хотя с увеличением частоты возбуждения пропорционально возрастает скорость левого конца нити (фактора возбуждения колебаний). Для точек с координатами $s = 0,5$ и $s = 0,75$ это насыщение наступает при более высоких резонансных частотах.

На рис. 5 приведено также безразмерное значение начального натяжения нити ϵ_0 . Частота ω_0 , соответствующая точке пересечения кривой с горизонтальной линией $N = \epsilon_0$, является пороговой. При $\omega < \omega_0$ имеют место стоячие волны в нити, как в стержне, о чем сказано выше (при $\omega = 1$ и 2). При $\omega > \omega_0$ возникают нелинейные волны. Пороговая частота ω_0 зависит от начального натяжения ϵ_0 и от других параметров задачи. Видно, что при неизменных значениях параметров с увеличением начального натяжения возникают области частот, где возбуждаются интенсивные бегущие волны (в окрестности резонансов) и стоячие волны (вдали от резонансных зон).

Рассмотрим поведение системы при неизменной частоте возбуждения и постепенном уменьшении начального натяжения (в эксперименте это может быть осуществлено путем медленного отпускания правого конца нити). Примем $\epsilon_0 = 0,06$, $\omega = 4$.

На рис. 6 показаны кривые распределения натяжения в нити через промежутки времени, равные $T/4$. При этих условиях, как видно из рис. 6,а, возбуждаются стоячие волны с амплитудой, равной $\approx 0,024$, и одним узлом в точке $s \approx 0,6$. Такая картина сохраняется при уменьшении ϵ_0 до $0,024$. Однако дальнейшее снижение уровня начального натяжения ($\epsilon_0 = 0,02$, рис. 6,б) приводит к сильным искажениям, которые характеризуются сложным сочетанием стоячих и бегущих волн.

Если же взять частоту возбуждения в окрестности резонанса, например, $\omega = 3$, то

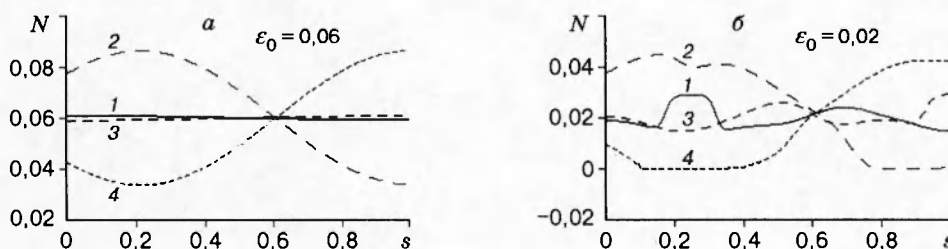


Рис. 6

уменьшение ε_0 от 0,06 до 0,02 совершенно не изменяет характера бегущих волн в нити (см. рис. 4), а только снижает их интенсивность. Соответствующие фазовые траектории остаются подобными друг другу, но уменьшаются в размерах до величины, показанной на рис. 3.

4. Режим возбуждения волн на резонансных частотах. Можно выделить в системе два режима колебаний в зависимости от частоты возбуждения. Так, при $\omega = 3$ и 6 наблюдается резонансный режим, для которого установившийся волновой процесс показан на рис. 2 и 4. Из них видно, что в результате движения левого конца нити формируется одиночный импульс, который движется по ненапряженной нити. С увеличением ω интенсивность его растет, длина уменьшается, но скорость движения импульса практически не зависит от частоты возбуждения. Этот эффект ведет к постоянству периода колебаний системы при частотах возбуждения, находящихся в окрестности резонансных. Если направления перемещения волны и скорости точек перед фронтом совпадают, то он становится круче, а в противном случае выполаживается.

Специфика процесса заключается в том, что движение левого конца нити влияет на импульс, изменяя его интенсивность, только в те интервалы времени, когда напряженная зона находится в окрестности колеблющейся концевой точки. В противном случае движение его может влиять только на ближайшие точки при их непосредственном контакте в процессе смятия нити в соответствии с условием (1.3). Остальные точки, находящиеся в ненапряженной зоне, движутся равномерно со скоростью, которую они имели на момент зануления усилий в окрестности этих точек.

Рассмотрим зависимость от времени более подробно на примере возбуждения волн на резонансной частоте $\omega = 9$. На рис. 7 приведены значения скорости и натяжения в точке $s = 0,75$. Здесь временная ось одинакова для обоих графиков. Отчетливо виден отмеченный выше факт совпадения волн скорости и натяжения. При этом волны, движущиеся вправо, имеют большую интенсивность, чем волны, движущиеся в обратном направлении. Это объясняется несимметричностью граничных условий на концах нити.

При возбуждении на частоте $\omega = 6$ появляются небольшие волны между основными. Как было видно выше, при более низких частотах возбуждения они отсутствуют. При $\omega = 9; 12; 15$ указанные малые волны усиливаются. Это объясняется тем, что с увеличением скорости движения левого конца нити при более высоких частотах происходит взаимодействие движения конца и ненапряженных зон в нити.

Необходимо отметить, что картина спектра мощности при возбуждении на резонансных частотах обнаруживает указанную на рис. 2, в особенность: спектральная плотность колебаний точек нити с частотой, равной 3, всегда значительно превосходит соответствующие величины на частотах, совпадающих с возмущающей.

Таким образом, на частотах возбуждения, кратных 3 ($\omega = 3m$, $m = 1, \dots, 5$), наблюдается резонансный режим, колебания приближенно можно считать периодическими с постоянным периодом $T_c = 2\pi/3$. При этом каждому значению m соответствует m -цикл: $T_c = mT$, так как в сечении Пуанкаре на фазовой плоскости (w, u) наблюдается m плотных скоплений точек.

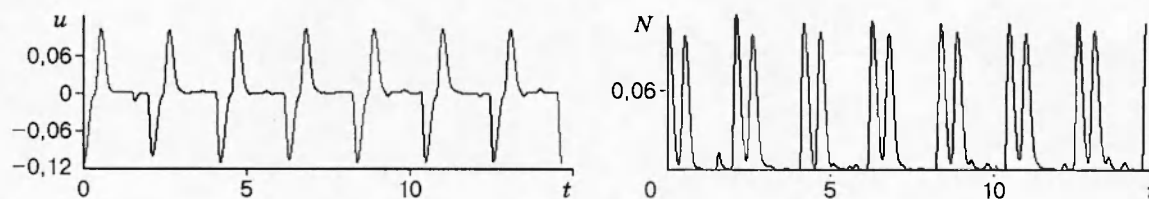


Рис. 7

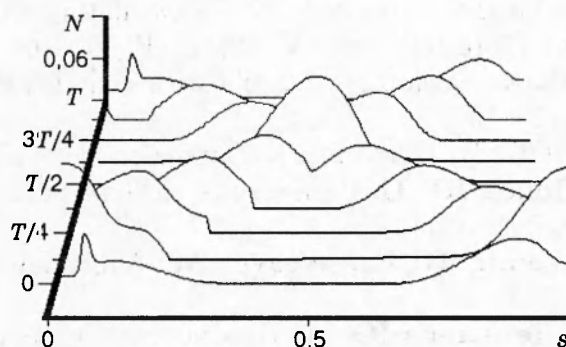


Рис. 8

5. Режим возбуждения волн на нерезонансных частотах. На частотах, достаточно удаленных от резонансных, система довольно быстро выходит на предельный цикл с периодом внешнего воздействия T или с периодом, кратным ему.

На рис. 8 приведена пространственно-временная картина натяжения при возбуждении с частотой $\omega = 6,2$. Поскольку это область возбуждения за вторым резонансом (см. рис. 5), то наблюдаются две волны, движущиеся на двух половинах длины и сталкивающиеся в середине нити. Такая картина более привычна в теории нелинейных волн [11, 12]. Колебания в каждой точке субгармонические с периодом $5T$. Фазовые траектории образуют пяти-цикл. Наибольшая спектральная плотность соответствует частоте возбуждения.

6. Выводы. Проведенный анализ позволяет выявить влияние на продольные колебания нити предварительного натяжения и частот возбуждения. При этом амплитуда перемещения одного из концов нити принималась постоянной (другой конец ее закреплен).

В зависимости от уровня предварительного натяжения движение нити может представлять собой как стоячие, так и бегущие волны. Первый тип колебаний реализуется, если возбуждаемые источником силы натяжения не превышают сил предварительного натяжения. В противном случае возникает сложное сочетание стоячих и бегущих волн или возникают только бегущие волны, имеющие ряд особенностей. К ним относятся более высокая их интенсивность по сравнению с интенсивностью стоячих волн, появление движущихся ненапряженных зон, независимость частот колебаний от частоты возбуждения (вблизи резонансов), снижение скорости распространения волны и резонансных частот колебаний. Последнее обстоятельство объясняется вкладом в движение ненапряженных зон, в которых действуют только массовые силы. Режим колебаний с постоянной частотой при разных частотах возбуждения обусловлен избирательным взаимодействием движущегося конца нити с напряженными и ненапряженными зонами.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (грант N RH4000).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Неймарк Ю. И.** Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.
2. **Амбарцумян С. А.** Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982.
3. **Tee G.** Periodic oscillations of a bilinear oscillator, with reference to moored marine systems // *Phys. Fluids*. 1982. V. 25, N 6. P. 936–941.
4. **Thompson J. M. T.** Subharmonic resonance of a bilinear oscillator with applications to moored marine systems // *J. Appl. Math.* 1983. V. 31, N 3. P. 207–234.

5. **Virgin L. N.** On the harmonic response of an oscillator with unsymmetric restoring force // J. of Sound and Vibration. 1988. V. 126(1). P. 157–165.
6. **Ostrovsky L. A.** Nonlinear dynamics of media with complex structures // Dynamics of Systems. 1993. N 1. P. 115–130.
7. **Ридель В. В., Гулин Б. В.** Динамика мягких оболочек. М.: Наука, 1990.
8. **Самарский А. А., Попов Ю. П.** Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980.
9. **Timoshenko S. P., Young D. H., Weaver W.** Vibration problems in engineering. N. Y.: Wiley, 1975.
10. **Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А.** Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961.
11. **Рабинович М. И., Трубецков Д. И.** Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992.
12. **Потапов А. И.** Нелинейные волны деформации в стержнях и пластинах. Горький: ГГУ, 1985.

*Поступила в редакцию 17/VIII 1995 г.,
в окончательном варианте — 23/V 1996 г.*
