

AMS subject classification: 65L05, 65P40, 65L20

Численное решение обобщенного уравнения Бюргерса–Хаксли методом расщепления Ли–Троттера

Й. Чичек, С. Коркут

Department of Engineering Sciences, Faculty of Engineering and Architecture, Izmir Katip Celebi University, Havaalani Sosesi Cd., 33/2, Izmir, 35620, Turkey

E-mail: yesim cicek@ikc.edu.tr (Чичек Й.), silaovgu.korkut@ikc.edu.tr (Коркут С.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 14, 2021.

Чичек Й., Коркут С. Численное решение обобщенного уравнения Бюргерса–Хаксли методом расщепления Ли–Троттера // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд.-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 1. — С. 103–116.

В данной статье метод расщепления Ли–Троттера (МРЛТ) используется для численного решения обобщенного уравнения Бюргерса–Хаксли (ОУБХ). Сначала устанавливаются границы локальной погрешности приближенных решений ОУБХ с помощью теории дифференциальных операторов в банаховом пространстве. Затем мы доказываем глобальную сходимость с использованием телескопического тождества. Точность метода доказывается численными результатами, которые сравниваются с более ранними исследованиями.

DOI: 10.15372/SJNM20210108

Ключевые слова: анализ сходимости, уравнение Бюргерса–Хаксли, метод расщепления Ли–Троттера, нелинейные дифференциальные уравнения, пространства Соболева.

Çiçek Y., Korkut S. On the numerical solution of the generalized Burgers–Huxley equation by Lie–Trotter splitting method // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 1. — P. 103–116.

In this paper, the Lie–Trotter splitting method (LSM) is used to solve the generalized Burgers–Huxley equation (GBHE) numerically. We first establish the local error bounds of approximate solutions of the GBHE with the help of the theory of differential operators in a Banach space. Then we prove the global convergence by using a telescoping identity. At the end, the accuracy of the method is provided by numerical results which are compared with earlier studies.

Keywords: convergence analysis, Burgers–Huxley equation, Lie–Trotter splitting method, nonlinear differential equations, Sobolev spaces.

1. Введение

Нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных (НДУЧП) в основном используются для описания моделей физических явлений. Для интерпретации какого-либо явления необходимо решить соответствующие НДУЧП. Однако численное или аналитическое решение НДУЧП все еще остается сложной задачей для ученых. Одним из известных НДУЧП является обобщенная задача Бюргерса–Хаксли (ОУБХ), определяемая следующим образом:

$$u_t + \alpha u^\delta u_x - \mu u_{xx} = \beta u(1 - u^\delta)(u^\delta - \gamma), \quad x \in \Omega = [x_0, x_{\text{final}}], \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$u(x_0, t) = U_{LB}, \quad u(x_{\text{final}}, t) = U_{RB}, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = U_0, \quad (3)$$

где $\alpha, \delta, \beta \geq 0$ и $\gamma \in (0, 1)$ с коэффициентом диффузии μ . Разнообразие заданных параметров приводит к множеству нелинейных эволюционных уравнений. Например, при $\beta = 0$ и $\mu = 1$ уравнение (1) упрощается до модифицированного уравнения Бюргерса, описывающего распространение волн в нелинейных диссипативных системах. При выборе параметров $\alpha = 0$ и $\mu = 1$ получается уравнение Хаксли, которое играет важную роль в биологии для описания распространения нервного импульса в нервных волокнах и движения волн [10, 19]. ОУБХ известно как уравнение Фитцхью–Нагумо при $\alpha = 0$ и $\mu > 0$ [6, 10]. Уравнение (1) превращается в уравнение Бюргерса–Хаксли (БХ), которое устанавливает взаимодействие между механизмами реакции, эффектами конвекции и диффузионным переносом, если $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \delta = 1, \mu = 1$.

Исследования по численному решению ОУБХ проводились в течение нескольких десятилетий. Метод разложения Адомяна использовался в [9] для ОУБХ. В [12, 13] Джавади представил численное решение с использованием метода Рунге–Кутты 4-го порядка, который применяется к ОУБХ после получения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью формулы коллокации для вычисления матрицы спектрального дифференцирования для точки Чебышева–Гаусса–Лобатто. Хаттак использовал подход Канзы для решения ОУБХ в [14]. В [17] авторы предлагают модифицированный метод дифференциальных квадратур кубических B -сплайнов для решения ОУБХ. Вариационный итерационный метод изучался в [2]. Метод дифференциальных квадратур и метод конечных разностей высших порядков для получения численных решений ОУБХ использовались в [15] и [16] соответственно. Компактная разностная схема порядка $2N$ и метод коллокаций изучалась в [7].

Статья организована следующим образом: пункт 2 посвящен краткому описанию метода и дает теоретическое обоснование. Глобальная сходимость предложенного метода доказывается в п. 3. В п. 4 показана точность метода и представлены численные результаты для различных значений параметров δ и γ , чтобы показать их влияние на приближенное решение. Выводы исследования представлены в п. 5.

2. Теоретическая основа

В [5] была проанализирована сходимость метода расщепления Стренга для уравнения БХ, а в [21] изучался метод расщепления Ли–Троттера для уравнения Бенджамина–Бона–Махони. Одна из основных целей данной работы — дать анализ метода для ОУБХ с использованием метода расщепления Ли–Троттера. По этой причине необходимо описать метод расщепления Ли–Троттера, который является методом расщепления операторов, для этого уравнения. Известно, что в методах расщепления вместо суммы оператор разделяется на подоператоры. При этом каждая задача решается соответствующим эффективным методом. В данном исследовании уравнение (1) расщепляется на два основных уравнения следующим образом:

$$v_t = \mu v_{xx} = Av, \quad (4)$$

$$w_t = \beta w(1 - w^\delta)(w^\delta - \gamma) - \alpha w^\delta w_x := B(w), \quad (5)$$

где операторы A и $B(w)$ соответствуют линейным и нелинейным операторам. Эти уравнения связаны начальными условиями.

Точное решение во время t уравнения (1)–(3) представляется как $u(t) = \Psi_{A+B}^t(u_0)$ с заданными начальными условиями, а приближенное расщепленное решение обозначается u_n при $t = n\Delta t \leq T$ и $\Delta t \rightarrow 0$, где $u_{n+1} = \Psi_A^{\Delta t}(\Psi_B^{\Delta t}(u_n))$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

В дальнейшем, чтобы получить результат сходимости, мы сначала приведем полезные определения и предварительную информацию. Затем мы дадим доказательство анализа расщепления Ли–Троттера.

2.1. Предварительная информация

С помощью метода расщепления Ли–Троттера (МРЛТ) мы получим две подзадачи, которые будут решены эффективными методами. Основная теория, лежащая в основе успеха процедуры — это корректность в $H^p(\mathbb{R})$. Для анализа сходимости метода необходимы следующее определение и гипотеза.

Лемма 1 определяет производную Фреше операторов A и $B(w)$.

Лемма 1. Пусть V и W — банаховы пространства, где операторы A и $B(w)$ определены из V в W . Производная Фреше A и $B(w)$ задается следующим образом:

$$dA(v)[h] = A(h), \quad (6)$$

$$dB(w)[h] = -\alpha w^\delta h_x - \alpha \delta w^{\delta-1} w_x h + \beta(1 + \gamma)(\delta + 1)w^\delta h - \beta(2\delta + 1)w^{2\delta} h - \beta\gamma h. \quad (7)$$

Доказательство. Доказательство следует из общего определения дифференцирования по Фреше. Первая производная A получается следующим образом:

$$\lim_{\|h\|_V \rightarrow 0} \frac{\|A(v+h) - A(v) - dA(v)[h]\|_W}{\|h\|_V} = 0. \quad (8)$$

Используя свойство линейности A , мы получим

$$dA(v)[h] = A(h). \quad (9)$$

Для оператора B :

$$\lim_{\|h\|_V \rightarrow 0} \frac{\|B(w+h) - B(w) - dB(w)[h]\|_W}{\|h\|_V} = 0, \quad (10)$$

где $B(w) = -\alpha w^\delta w_x + \beta(1 + \gamma)w^{\delta+1} - \beta w^{2\delta+1} - \beta\gamma w$.

Для ясности определим

$$f(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w^{n-k} h^k. \quad (11)$$

Используя биномиальное разложение и определенную функцию $f(n)$, $B(w+h)$ можно представить следующим образом:

$$B(w+h) = -\alpha f(\delta)(w_x + h_x) + \beta(1 + \gamma)f(\delta + 1) - \beta f(2\delta + 1) - \beta\gamma(w+h). \quad (12)$$

Подставив уравнение (12) в уравнение (10) и используя тот факт, что члены h^k малы при $k > 1$ когда $\|h\|_V \rightarrow 0$, имеем

$$dB(w)[h] = -\alpha w^\delta h_x - \alpha \delta w^{\delta-1} w_x h + \beta(1 + \gamma)(\delta + 1)w^\delta h - \beta(2\delta + 1)w^{2\delta} h - \beta\gamma h, \quad (13)$$

что завершает доказательство. \square

Следующая гипотеза устанавливает ограниченность как решения, так и начальных данных, а также локальную корректность решений уравнения (1)–(3):

Гипотеза. Для фиксированного времени t_{end} для всех $u_0 \in H^k(\mathbb{R})$ существует постоянная C_1 такая, что $\|u_0\|_{H^k(\mathbb{R})} \leq C_1$, и существует единственное решение $u(t) \in C([0, t_{\text{end}}, H^k])$ уравнения (1)–(3). Решение $u(t) \in H^k(\mathbb{R})$ и начальные данные $u_0 \in H^k(\mathbb{R})$ ограничены для $0 \leq t \leq t_{\text{end}}$ следующим образом:

$$\|u(t)\|_{H^k} \leq C_1 < \rho, \quad \|u(t)\|_{H^k} \leq C_2 < \infty. \quad (14)$$

Кроме того, существует постоянная $M(C_1, t_{\text{end}})$ для начальных данных u_0 такая, что решение является *непрерывным по Литшицу*. Это означает, что

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{H^k} \leq M(C_1, t_{\text{end}})\|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^k}. \quad (15)$$

Кроме гипотезы, определим следующее множество целых чисел, используемое во время всего анализа сходимости:

$$p \geq 1, \quad m \geq p + 3, \quad n \geq m - 2. \quad (16)$$

Цель предстоящего анализа — определить значение k , используемое в гипотезе, которое сохраняет ограниченность численного решения по отношению к числам, определенным в уравнении (16).

Хотя решение уравнения (5) может вызвать разрыв, вследствие наличия члена Бюргера, полное решение уравнения (1) остается гладким. Поэтому существует одно важное требование — выбор размера шага Δt . Следующая лемма обеспечивает существование такого Δt , которое гарантирует гладкость решения уравнения (5).

Лемма 2. Пусть численный поток $\Psi_B^t(w_0) = w(t)$ представляет решение уравнения (5). Для значений m и n в уравнении (16), решение $\Psi_B^t(w_0)$ с начальными данными $w_0 \in H^m(\mathbb{R})$ удовлетворяет

$$\|\Psi_B^t(w_0)\|_{H^n} \leq \sigma \quad (17)$$

для $0 \leq t \leq \Delta t$. Тогда $\Psi_B^t(w_0)$ принадлежит $H^m(\mathbb{R})$ и, в частности,

$$\|\Psi_B^t(w_0)\|_{H^m} \leq e^{cKt}\|w_0\|_{H^m}, \quad (18)$$

где $K = (1 + 2\sigma^\delta + \sigma^{2\delta})$, а c не зависит от w_0 и Δt .

Доказательство. Начнем с того, что перепишем оператор $B(w)$ в явном виде:

$$B(w) = -\alpha w^\delta w_x + \beta(1 + \gamma)w^{\delta+1} - \beta w^{2\delta+1} - \beta\gamma w. \quad (19)$$

Вследствие определения нормы в $H^m(\mathbb{R})$ и уравнения (5) мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Psi_B^t(w_0)\|_{H^m}^2 &= (w, w_t)_{H^m} = (w, \beta(1 + \gamma)w^{\delta+1})_{H^m} - \beta\gamma(w, w)_{H^m} - \\ &\quad \beta(w, w^{2\delta+1})_{H^m} - \alpha(w, w^\delta w_x)_{H^m}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для простоты переименуем приведенные выше выражения как I_1 , I_2 , I_3 и I_4 соответственно.

Начнем с ограничения для I_1 :

$$I_1 = (w, \beta(1 + \gamma)w^{\delta+1})_{H^m}. \quad (21)$$

Используя правило Лейбница δ раз, получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \beta(1 + \gamma) \sum_{k=0}^m \int_{\mathbb{R}} \partial_x^{k_0} w \partial_x^{k_0} w \\ &= \beta(1 + \gamma) \sum_{k_0=0}^m \sum_{k_1=0}^{k_0} \binom{k_0}{k_1} \int_{\mathbb{R}} \partial_x^{k_0} w \partial_x^{k_1} w^\delta \partial_x^{k_0-k_1} w \, dx \\ &\quad \vdots \\ &= \beta(1 + \gamma) \sum_{k_0=0}^m \sum_{k_1=0}^{k_0} \sum_{k_2=0}^{k_1} \cdots \sum_{k_{\delta-1}=0}^{k_{\delta-2}} \lambda_1 \int_{\mathbb{R}} \partial_x^{k_0} w \partial_x^{k_{\delta}} w \prod_{i=0}^{\delta-1} \partial_x^{k_i-k_{i+1}} w \, dx, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{k_0!}{k_{\delta}! \prod_{i=0}^{\delta-1} (k_i - k_{i+1})!}.$$

Чтобы показать ограниченность I_1 , необходимо показать, что интеграл в уравнении (22) ограничен. Для этого нужно учесть все возможные соотношения между k_0 и m . Таким образом, при каждом выборе для определения границы члены будут различаться. Начнем со случая 1: $k_0 < m$, $k_i - k_{i+1} \leq n$ ($i = 0 : \delta - 1$).

Случай 1. Для $k_0 < m$, $k_i - k_{i+1} \leq n$ ($i = 0 : \delta - 1$), используя вложение $H^m(\mathbb{R})$ в $L^\infty(\mathbb{R})$, можно получить

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} \partial_x^{k_0} w \partial_x^{k_{\delta}} w \prod_{i=0}^{\delta-1} \partial_x^{k_i-k_{i+1}} w \, dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| \partial_x^{k_0} w \partial_x^{k_{\delta}} w \prod_{i=0}^{\delta-1} \partial_x^{k_i-k_{i+1}} w \right| dx \\ &\leq \left\| \partial_x^{k_0} w \right\|_{L^\infty} \prod_{i=0}^{\delta-2} \left\| \partial_x^{k_i-k_{i+1}} w \right\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \partial_x^{k_{\delta}} w \partial_x^{k_{\delta-1}-k_{\delta}} w \right| dx \\ &\leq C \|w\|_{H^m} \|w\|_{H^n}^{\delta-1} \left\| \partial_x^{\tilde{M}} w \right\|_{L^2} \left\| \partial_x^{\tilde{m}} w \right\|_{L^2}, \end{aligned} \quad (23)$$

где C — общая постоянная и

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= \max\{k_{\delta}, k_{\delta-1} - k_{\delta}\} \leq \frac{k_0 + 1}{2} \leq \frac{m}{2} = \frac{p+1}{2} \leq n, \\ \tilde{m} &= \min\{k_{\delta}, k_{\delta-1} - k_{\delta}\} \leq k_0 + 1 \leq m. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\leq C \|w\|_{H^n}^{\delta} \|w\|_{H^m}^2 \leq C \sigma^{\delta} \|w\|_{H^m}^2. \quad (24)$$

Случай 2. Для $k_0 = m$, $k_i - k_{i+1} \leq n$ ($i = 0 : \delta - 1$):

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} \partial_x^m w \partial_x^{k_\delta} w \prod_{i=0}^{\delta-1} \partial_x^{k_i - k_{i+1}} dx \right| &\leq \left\| \partial_x^{k_\delta} w \right\|_{L^\infty} \prod_{i=0}^{\delta-2} \left\| \partial_x^{k_i - k_{i+1}} w \right\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \partial_x^m w \partial_x^{k_{\delta-1} - k_\delta} w \right| dx \\ &\leq C \left\| \partial_x w \right\|_{H^{k_\delta}} \|w\|_{H^{n-1}}^{\delta-1} \left\| \partial_x^m w \right\|_{L^2} \left\| \partial_x^{k_{\delta-1} - k_\delta} w \right\|_{L^2} \\ &\leq C \|w\|_{H^{k_{\delta+1}}} \|w\|_{H^{n-1}}^{\delta-1} \|w\|_{H^m} \|w\|_{H^n}. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь, если $k_{\delta+1} \leq m$, то неравенство в уравнении (25) примет следующий вид:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \partial_x^m w \partial_x^{k_\delta} w \prod_{i=0}^{\delta-1} \partial_x^{k_i - k_{i+1}} dx \right| \leq C \sigma^\delta \|w\|_{H^m}^2. \quad (26)$$

При $k_\delta = m$ и $k_0 = m$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} \partial_x^m w \partial_x^m w \prod_{i=0}^{\delta-1} \partial_x^{k_i - k_{i+1}} dx \right| &\leq \prod_{i=0}^{\delta-1} \left\| \partial_x^{k_i - k_{i+1}} w \right\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} |\partial_x^m w \partial_x^m w| dx \\ &\leq C \|w\|_{H^n}^\delta \left\| \partial_x^m w \right\|_{L^2} \left\| \partial_x^m w \right\|_{L^2} \\ &\leq C \sigma^\delta \|w\|_{H^m}^2. \end{aligned} \quad (27)$$

При $k_\delta < m$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} \partial_x^m w \partial_x^{k_\delta} w \prod_{i=0}^{\delta-1} \partial_x^{k_i - k_{i+1}} dx \right| &\leq \left\| \partial_x^{k_\delta} w \right\|_{L^\infty} \prod_{i=0}^{\delta-2} \left\| \partial_x^{k_i - k_{i+1}} w \right\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \partial_x^m w \partial_x^{k_{\delta-1} - k_\delta} w \right| dx \\ &\leq C \|w\|_{H^m} \|w\|_{H^{n-1}}^{\delta-1} \left\| \partial_x^m w \right\|_{L^2} \left\| \partial_x^{k_{\delta-1} - k_\delta} w \right\|_{L^2} \\ &\leq C \|w\|_{H^n}^\delta \|w\|_{H^m}^2 \\ &\leq C \sigma^\delta \|w\|_{H^m}^2, \end{aligned} \quad (28)$$

что совпадает с предыдущими результатами. Следовательно, гарантируется, что $I_1 = (w, w_t)_{H^m}$ ограничено:

$$I_1 \leq C \sigma^\delta \|w\|_{H^m}^2. \quad (29)$$

Границу для I_2 можно получить следующим образом:

$$I_2 = \beta \gamma (w, w)_{H^m} \quad (30)$$

$$= \left\| -\beta \gamma \sum_{k_0=0}^m \int_{\mathbb{R}} \partial_x^{k_0} w \partial_x^{k_0} w dx \right\| \quad (31)$$

$$\leq \beta \gamma \sum_{k_0=0}^m \int_{\mathbb{R}} \left\| \partial_x^{k_0} w \partial_x^{k_0} w \right\| dx, \quad (32)$$

где

$$\int_{\mathbb{R}} \left\| \partial_x^{k_0} w \partial_x^{k_0} w \right\| dx \leq \begin{cases} \left\| \partial_x^{k_0} w \right\|_L^2 \left\| \partial_x^{k_0} w \right\|_L^2 \leq C \|w\|_{H^m}^2, & k_0 < m, \\ \left\| \partial_x^m w \right\|_L^2 \left\| \partial_x^m w \right\|_L^2 \leq C \|w\|_{H^m}^2, & k_0 = m. \end{cases} \quad (33)$$

Таким образом, I_2 окончательно ограничено:

$$I_2 \leq C \|w\|_{H^m}^2, \quad (34)$$

где C — постоянная.

Рассмотрим ограничение для I_3 , а именно $-\beta(w, w^{2\delta+1})_{H^m}$. Используя правило Лейбница 2δ раз, мы получим следующее уравнение:

$$I_3 = -\beta \sum_{k_0=0}^m \sum_{k_1=0}^{k_0} \sum_{k_2=0}^{k_1} \cdots \sum_{k_{2\delta}=0}^{k_{2\delta-1}} \lambda_2 \int_{\mathbb{R}} \partial_x^{k_0} w \partial_x^{k_{2\delta}} w \prod_{i=0}^{2\delta-1} \partial_x^{k_i - k_{i+1}} w dx, \quad (35)$$

где

$$\lambda_2 = \frac{k_0!}{k_{2\delta}! \prod_{i=0}^{2\delta-1} (k_i - k_{i+1})!}.$$

Чтобы получить границу для I_3 , мы используем тот же процесс, что и для I_1 , но в этом случае мы используем $k_{2\delta}$ вместо k_δ . Используя ограниченность интеграла в I_3 для случаев 1 и 2, получим

$$I_3 \leq C \sigma^{2\delta} \|w\|_{H^m}^2. \quad (36)$$

Наконец, для получения ограничения для $I_4 = -\alpha(w, w^\delta w_x)_{H^m}$ используются те же аргументы, что и для I_1 . Все возможные связи между k_0 и m , а также k_δ и m тщательно контролируются после применения правила Лейбница δ раз. Таким образом, I_4 также ограничено:

$$I_4 \leq C \sigma^\delta \|w\|_{H^m}^2 \quad (37)$$

при предположении $k_0 - k_1 + 1 \leq n$.

В результате, суммируя все полученные оценки, имеем

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + I_3 + I_4 &\leq cK \|w\|_{H^m}^2, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Psi_B^t(w_0)\|_{H^m}^2 &\leq cK \|w\|_{H^m}^2, \end{aligned} \quad (38)$$

где $K = (1 + 2\sigma^\delta + \sigma^{2\delta})$. Интегрируя уравнение (38), где $w(0) = w_0$, мы получим

$$\|\Psi_B^t(w_0)\|_{H^m} \leq e^{cKt} \|w_0\|_{H^m}, \quad (39)$$

что завершает доказательство. \square

3. Анализ сходимости метода

Доказательства для получения локальных ошибок такие же, как и в исследованиях [5, 21].

Лемма 3. *Предположим, что гипотеза из пп. 2.1 верна при $k = p + 2$ для решения уравнения (1)–(3), где $p \geq 1$. Локальная ошибка расщепления Ли–Троттера ограничена в $H^p(\mathbb{R})$ при предположении, что начальные данные u_0 в $H^{p+2}(\mathbb{R})$, так что*

$$\|\Psi_A^{\Delta t}(\Psi_B^{\Delta t}(u_0)) - \Psi_{A+B}^{\Delta t}(u_0)\|_{H^p} \leq c\Delta t^2,$$

где u_0 из $H^{p+2}(\mathbb{R})$, c зависит только от $\|u_0\|_{H^{p+2}}$.

Доказательство. С одной стороны, точное решение ОУБХ $u(t) = \Psi_{A+B}^t(u_0)$ можно записать, используя формулу вариации постоянных, следующим образом:

$$u(t) = \Psi_A^t u_0 + \int_0^t \Psi_A^{t-p} (B(u(p))) dp. \quad (40)$$

Используем следующее равенство с определенной функцией $\varphi(\rho) = \Psi_A^{p-\rho}(u(\rho))$:

$$B(\varphi(p)) - B(\varphi(0)) = \int_0^p dB(\varphi(\rho)) [\dot{\varphi}(\rho)] d\rho. \quad (41)$$

Подставив функцию φ в уравнение (41), получим

$$B(u(p)) = B(\Psi_A^p u_0) + \int_0^p dB(\Psi_A^{p-\rho} u(\rho)) [\Psi_A^{p-\rho} B(u(\rho))] d\rho. \quad (42)$$

Чтобы найти решение после одного шага, вставим уравнение (42) в уравнение (40) при $t = \Delta t$. Мы получим

$$u(\Delta t) = \Psi_A^{\Delta t} u_0 + \int_0^{\Delta t} \Psi_A^{\Delta t-p} B(\Psi_A^p u_0) dp + e_1, \quad (43)$$

где

$$e_1 = \int_0^{\Delta t} \int_0^p \Psi_A^{\Delta t-p} dB(\Psi_A^{p-\rho} u(\rho)) [\Psi_A^{p-\rho} B(u(\rho))] d\rho dp. \quad (44)$$

С другой стороны, одношаговое расщепление Ли–Троттера имеет следующий вид:

$$u_1 = \Psi_A^{\Delta t}(\Psi_B^{\Delta t}(u_0)). \quad (45)$$

С помощью разложения в ряд Тейлора мы можем переписать уравнение (45) с интегральным остаточным членом в H^p :

$$u_1 = \Psi_A^{\Delta t} u_0 + \Delta t \Psi_A^{\Delta t} (B(u_0)) + e_2, \quad (46)$$

где

$$e_2 = (\Delta t)^2 \int_0^1 (1-\theta) \Psi_A^{\Delta t} dB(\Psi_B^{\Delta t\theta}(u_0)) [B(\Psi_B^{\Delta t\theta}(u_0))] d\theta. \quad (47)$$

Следовательно, ошибку можно найти путем вычитания точного решения из расщепленного решения:

$$u_1 - u(\Delta t) = \Delta t \Psi_A^{\Delta t} (B(u_0)) - \int_0^{\Delta t} \Psi_A^{\Delta t-p} (B(\Psi_A^p(u_0))) dp + (e_2 - e_1). \quad (48)$$

Путем определения $g(p) = \Psi_A^{\Delta t-p} (B(\Psi_A^p(u_0)))$ и использования ядра Пеано для правила прямоугольника, мы можем переписать уравнение (48) следующим образом:

$$u_1 - u(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} K_R(t)g'(t) dt + (e_1 - e_2), \quad (49)$$

где $g'(t)$ — производная Фреше. Мы можем преобразовать интеграл к следующему виду, используя основную замену $\theta = t/\Delta t$:

$$\int_0^{\Delta t} K_R(t)g'(t) dt = (\Delta t)^2 \int_0^1 (\theta - 1)g'(\theta\Delta t) d\theta = (\Delta t)^2 \int_0^1 K_R(\theta)g'(\theta\Delta t) d\theta. \quad (50)$$

Используем норму H^p и неравенство треугольника для получения границы ошибки после одного шага для расщепления Ли–Троттера:

$$\|u_1 - u(\Delta t)\|_{H^p} \leq (\Delta t)^2 \int_0^1 \|K_R(\theta)g'(\theta\Delta t)\|_{H^p} d\theta + \|e_1\|_{H^p} + \|e_2\|_{H^p}, \quad (51)$$

где K_R — ограниченное ядро и $g'(p) = -\Psi_A^{\Delta t-p}[A, B](\Psi_A^p(u_0))$ с коммутатором Ли, который определяется следующим образом:

$$[A, B] = dA(v)[B(v)] - bB(v)[A(v)]. \quad (52)$$

Мы можем записать $\Psi_A^p(u_0) = v$ в виде общего оператора, поскольку $\Psi_A^{\Delta t}(u_0)$ ограничено в норме Соболева. Используя определение производной Фреше для операторов A и B , мы можем записать коммутатор Ли следующим образом:

$$\begin{aligned} [A, B](v) = & -\alpha\delta(\delta - 1)v^{\delta-2}v_x^3 - 2\alpha\delta v^{\delta-1}v_x v_{xx} + \\ & \beta(1 + \gamma)(\delta + 1)\delta v^{\delta-1}v_x^2 - \beta(2\delta + 1)2\delta v^{2\delta-1}v_x^2. \end{aligned} \quad (53)$$

Взяв норму H^p , получим

$$\|g'(p)\|_{H^p} \leq C\|v\|_{H^{p+2}}^{2\delta+1} \leq C\|u_0\|_{H^{p+2}}^{2\delta+1}. \quad (54)$$

Подставив это ограничение для $g'(p)$ в уравнение (51), находим, что интеграл ограничен следующим образом:

$$(\Delta t)^2 \int_0^1 \|g'(\theta\Delta t)\|_{H^p} d\theta \leq C\|u_0\|_{H^{p+2}}^{2\delta+1} (\Delta t)^2. \quad (55)$$

Границы ошибки для остаточного члена уравнения (51) можно найти, используя свойства банаховой алгебры нормы H^p , ограниченности линейной части и леммы 2:

$$\|e_1\|_{H^p} + \|e_2\|_{H^p} \leq M(\Delta t)^2, \quad (56)$$

где M зависит только от начального условия. Следовательно, используя результаты уравнений (55) и (56), мы можем получить

$$\|u_1 - u(\Delta t)\|_{H^p} \leq c(\Delta t)^2. \quad (57)$$

Тем самым завершаем доказательство. \square

Теорема. Предположим, что точное решение $u(\Delta, t)$ уравнения (1) находится в H_{p+2} для $0 \leq t \leq T$. Тогда решение расщепления Ли–Троттера u_n имеет глобальную ошибку первого порядка для $\Delta t < \bar{\Delta} t$ и $t_n = n\Delta t \leq T$:

$$\|u_n - u(t_n)\|_{H^p} \leq C\Delta t, \quad (58)$$

где C зависит только от $\|u_0\|_{H^{p+2}}$ и T .

Доказательство. Результат по глобальной сходимости доказывается с помощью лемм 2 и 3. Доказательство проводится с помощью телескопического тождества (см. [8]). \square

4. Численные результаты

Данный пункт посвящен приближенному решению ОУБХ для нескольких параметров. Обсуждается точность метода расщепления Ли–Троттера. Для получения численного решения используются уравнения (4), (5). К линейной части применяется центрально-разностная схема, тогда как нелинейная часть решается полунявным методом Рунге–Кутты третьего порядка [20]. Частное решение уравнения (1)–(3) определяется следующим образом [18]:

$$u(x, t) = \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} \tanh(a_1(x - a_2 t)) \right)^{1/\delta}, \quad \forall x \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad (59)$$

где

$$a_1 = \frac{-\alpha\delta + \delta\sqrt{\alpha^2 + 4\beta(1+\delta)}}{4(1+\delta)} \gamma, \quad (60)$$

$$a_2 = \frac{\gamma\alpha}{1+\delta} - \frac{(1+\delta-\gamma)(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta(1+\delta)})}{2(1+\delta)}. \quad (61)$$

В таблице 1 дано сравнение абсолютных ошибок МРЛТ с различными методами в литературе на различных временных уровнях. Для этого выбраны специально параметры: $\alpha = \beta = \mu = \delta = 1$, $\gamma = 10^{-3}$. Очевидно, что полученные результаты лучше других, хотя МРЛТ является явной схемой первого порядка.

Таблица 1. Сравнение абсолютных ошибок МРЛТ и исследований в литературе при различных временных и пространственных значениях для выбора: $\alpha = \beta = \mu = \delta = 1$, $\gamma = 10^{-3}$

x	t	МРЛТ	[11]	[3]	[4]	[1]
0.1	0.05	1.8739e-08	1.93715e-07	1.87406e-08	1.87405e-08	1.87406e-08
	0.1	3.7477e-08	3.87434e-07	3.74812e-08	3.74813e-08	3.74813e-08
	1	3.7775e-07	3.87501e-06	3.74812e-07	3.74812e-07	3.748125e-07
0.5	0.05	1.8734e-08	1.93730e-07	1.87406e-08	1.87405e-08	1.87406e-08
	0.1	3.7480e-08	3.87464e-07	3.74812e-08	1.37481e-08	3.74813e-08
	1	3.7476e-07	3.87531e-06	3.74812e-07	3.74813e-07	3.748125e-07
0.9	0.05	1.8739e-08	1.93745e-07	1.87406e-08	1.87405e-08	1.87406e-08
	0.1	3.7477e-08	3.87494e-07	3.74812e-08	3.74813e-08	3.74813e-08
	1	3.7475e-07	3.87561e-06	3.74812e-07	3.74813e-07	3.748125e-07

Рисунок 1 показывает решения МРЛТ при $\alpha = 1, \gamma = 0.5, \beta = 1$ для разных временных уровней, а именно $t = 0.01, 4$ и 8 . Для представленных значений используются граничные значения $x \in [-20, 140]$ для всех временных уровней. Это граничное условие дает больше пространства для распространения бегущих волн, что обеспечивает физическую совместимость.

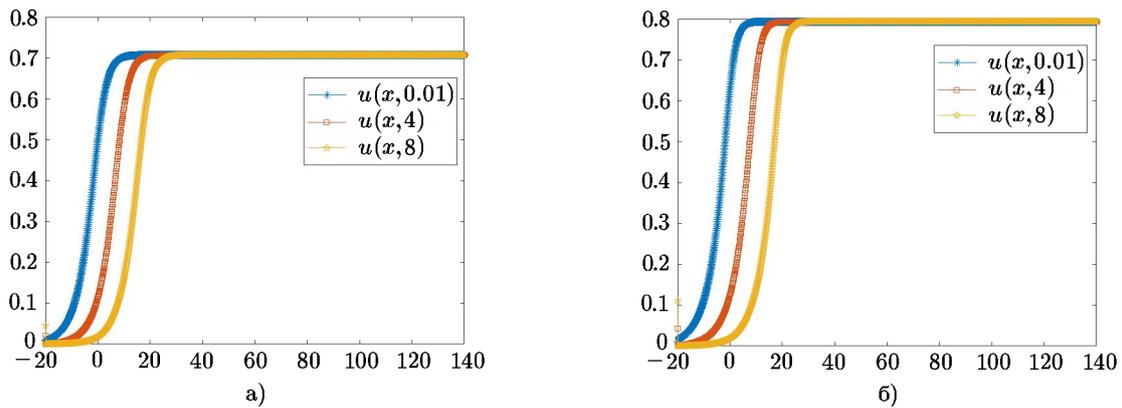


Рис. 1. Графики предложенного метода (МРЛТ), полученные для уравнения (1), с начальными и граничными условиями, взятыми из уравнения (59) на $x \in [-20, 140]$ с параметрами $\alpha = 1, \gamma = 0.5, \beta = 1$ для $t = 0.01, 4$ и 8 , где $\Delta t = 0.01, \Delta x = 0.1$ и $\delta = 2$ (а), $\delta = 3$ (б)

После проведения нескольких тестов с различными коэффициентами ОУБХ видно, что параметры δ и γ имеют большее влияние, чем другие. В табл. 2 показано влияние параметров γ и δ на численное решение. Видно, что МРЛТ остается аппроксимирующим. Ошибки табл. 2 вычисляются в норме L_∞ , где $\alpha = \beta = \mu = 1$ для заданных значений γ и δ на различных временных уровнях.

Таблица 2. Влияние значений параметров δ и γ на МРЛТ на различных временных уровнях

γ	t	$\delta = 1$	$\delta = 2$	$\delta = 3$
10^{-1}	0.01	3.5624e-05	1.6855e-04	2.8716e-04
	0.5	0.0018	0.0083	0.0142
	1	0.0035	0.0167	0.0287
10^{-2}	0.01	3.7312e-07	5.5151e-06	1.3719e-05
	0.5	1.8633e-05	2.7546e-04	6.8543e-04
	1	3.7258e-05	5.5116e-04	0.0014
10^{-3}	0.01	3.7481e-09	1.7499e-07	6.3857e-07
	0.5	1.8738e-07	8.7486e-06	3.1926e-05
	1	3.7476e-07	1.7498e-05	6.3858e-05

Рисунок 2 представляет точное решение и приближения, вычисленные с помощью МРЛТ. Это также видно на рис. 2г, который показывает физическое поведение численного решения. Выбранные параметры: $\mu = \beta = \alpha = 1, \gamma = 0.85, \delta = 2$ на $x \in [-20, 140]$ и $t \in [0, 10]$.

На рис. 2 видно, что численные решения хорошо согласуются с точным решением, хотя γ и δ достаточно большие. Кроме того, последний рисунок доказывает, что МРЛТ сохраняет устойчивость и физическое поведение во времени. Хотя выбор 10 в качестве t_{end} недостаточен для обсуждения длительного поведения, этот выбор может быть приемлемым для явных методов.

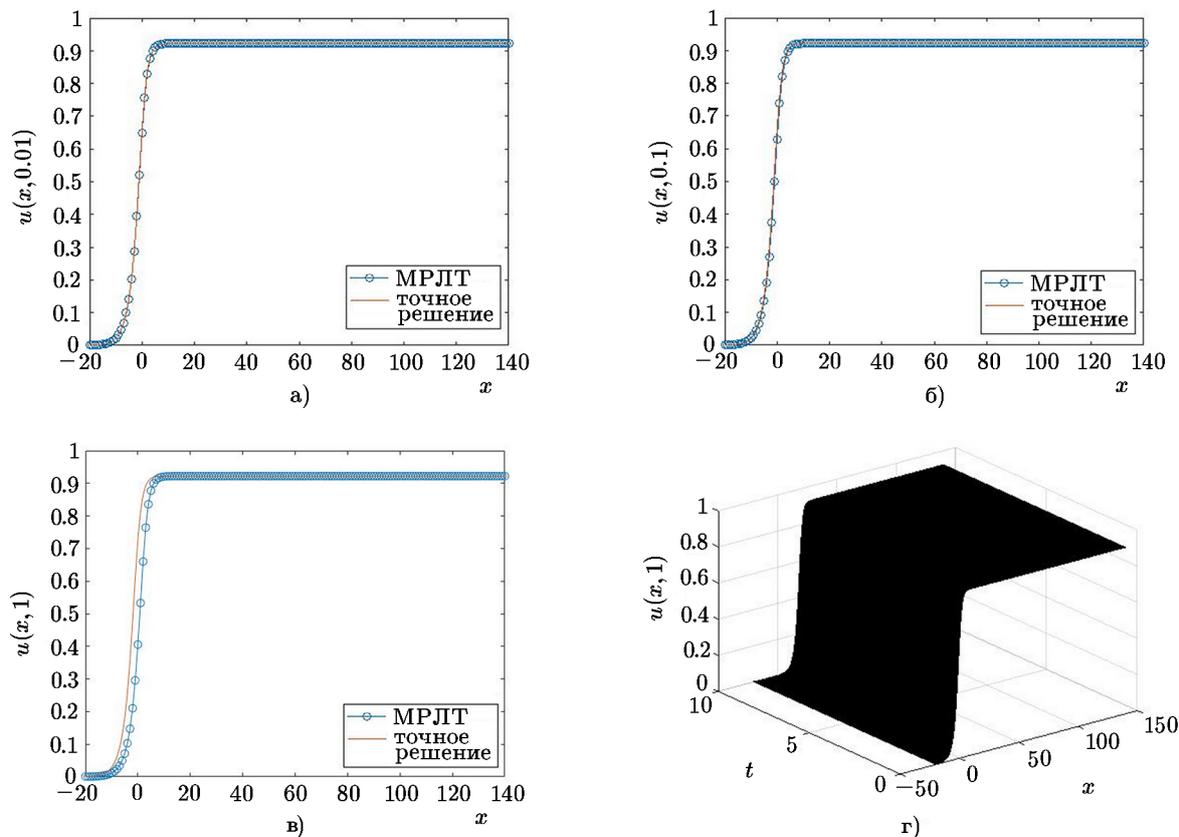


Рис. 2. Графики точного решения (сплошная линия) и МРЛТ (кружки) в зависимости от x (а–в). Выбранные параметры: $\mu = \beta = \alpha = 1$ и $\gamma = 0.85, \delta = 2$ на $x \in [-20, 140]$ и $t \in [0, 10]$.

5. Выводы

В данной статье показано, что МРЛТ является мощным методом для решения ОУБХ. Анализ сходимости доказывается на основе пространств Соболева для МРЛТ, имеющего порядок точности 1. Расширенный анализ дополнен численными результатами. МРЛТ хорошо согласуется с точным решением, а также с другими исследованиями, представленными в литературе, многие из которых дают аналитические решения. Хотя МРЛТ — явный численный метод первого порядка, он остается аппроксимирующим и устойчивым во времени. Таким образом, МРЛТ может быть легко адаптирован для численного решения других нелинейных задач.

Литература

1. **Al-Rozbayani A.M. and Al-Amr M.O.** Discrete adomian decomposition method for solving Burgers–Huxley equation // *Int. J. Contemp. Math. Sciences.* — 2013. — Vol. 8. — P. 623–631.
2. **Batiha B., Noorani S.M. and Hashim I.** Numerical simulation of the generalized Huxley equation by He’s variational iteration method // *Applied Mathematics and Computation.* — 2007. — Vol. 186. — P. 1322–1325.

3. **Batiha B., Noorani M.S.M. and Hashim I.** Application of variational iteration method to the generalized Burgers–Huxley equation // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2008. — Vol. 36. — P. 660–663.
4. **Biazar J. and Mohammadi F.** Application of differential transform method to the generalized Burgers–Huxley equation // *Int. J. Applications and Applied Mathematics*. — 2010. — Vol. 5. — P. 629–643.
5. **Çiçek Y. and Tanoğlu G.,** Strang splitting method for Burgers–Huxley equation // *Applied Mathematics and Computation*. — 2016. — Vol. 276. — P. 454–467.
6. **Fitzhugh R.** Mathematical models of excitation and propagation in nerve // *Biological Engineering* / H.P. Schwan. — N.Y.: McGraw Hill, 1969. — P. 1–85.
7. **Hammad D.A. and El-Azab M.S.** 2N order compact finite difference scheme with collocation method for solving the generalized Burgers–Huxley and Burgers–Fisher equations // *Applied Mathematics and Computation*. — 2015. — Vol. 258. — P. 296–311.
8. **Hairer E., Norsett S.P. and Wanner G.** Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1993.
9. **Hashim I., Noorani M.S.M. and Said Al-Hadidi M.R.** Solving the generalized Burgers–Huxley equation using the Adomian decomposition method // *Mathematical and Computer Modelling*. — 2006. — Vol. 43. — P. 1404–1411.
10. **Hodgkin A.L. and Huxley A.F.** A quantitative description of ion currents and its applications to conduction and excitation in nerve membranes // *J. of Physiology*. — 1952. — Vol. 117. — P. 500–544.
11. **Ismail H.N.A., Raslan K. and Abd-Rabboh A.A.** Adomian decomposition method for Burgers–Huxley and Burgers–Fisher equations // *Applied Mathematics and Computation*. — 2004. — Vol. 159. — P. 291–301.
12. **Javidi M.** A numerical solution of the generalized Burgers–Huxley equation by pseudospectral method and Darvishi’s preconditioning // *Applied Mathematics and Computation*. — 2006. — Vol. 175. — P. 1619–1628.
13. **Javidi M.** A numerical solution of the generalized Burgers–Huxley equation by spectral collocation method // *Applied Mathematics and Computation*. — 2006. — Vol. 178. — P. 338–344.
14. **Khattak A.J.** A computational meshless method for the generalized Burgers–Huxley equation // *Applied Mathematical Modelling*. — 2009. — Vol. 33. — P. 3718–3729.
15. **Sari M. and Gürarlan G.** Numerical solutions of the generalized Burgers–Huxley equation by a differential quadrature method // *Mathematical Problems in Engineering*. — 2009. — Vol. 2009. — Article ID 370765.
16. **Sari M., Gürarlan G. and Zeytinoğlu A.** High-order finite difference schemes for numerical solutions of the generalized Burgers–Huxley equation // *Num. Methods for Partial Diff. Equ.* — 2011. — Vol. 27. — P. 1313–1326.
17. **Singh B.K., Arora G. and Singh M.K.** A numerical scheme for the generalized Burgers–Huxley equation // *J. of the Egyptian Mathematical Society*. — 2016. — Vol. 24. — P. 629–637.
18. **Wang X.Y., Zhu Z.S. and Lu Y.K.** Solitary wave solutions of the generalized Burgers–Huxley equation // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1990. — Vol. 23. — P. 271–274.
19. **Wazwaz A.M.** Traveling wave solutions of generalized forms of Burgers, Burgers-KdV and Burgers–Huxley equations // *Applied Mathematics and Computation*. — 2005. — Vol. 169. — P. 639–656.
20. **Zhou S. and Cheng X.** A linearly semi-implicit compact scheme for the Burgers–Huxley equation // *Int. J. of Computer Mathematics*. — 2011. — Vol. 88. — P. 795–804.

21. **Zürnacı F., Gücüyenek Kaymak N., Seydaoğlu M. and Tanoğlu G.** Convergence analysis and numerical solution of the Benjamin–Bona–Mahony equation by Lie–Trotter splitting // Turkish J. of Mathematics. — 2018. — Vol. 42. — P. 1471–1483.

Поступила в редакцию 19 июня 2019 г.

После рецензирования без замечаний 11 декабря 2019 г.

Принята к печати 21 октября 2020 г.