

УДК 539.3

ЭЛАСТИКА ЭЙЛЕРОВА СТЕРЖНЯ С ЗАЩЕМЛЕННЫМИ КОНЦАМИ

В. В. Кузнецов, С. В. Левяков*

Новосибирский государственный технический университет, 630092 Новосибирск

* Сибирский научно-исследовательский институт авиации им. С. А. Чаплыгина,
630051 Новосибирск

Приведены результаты исследования устойчивости закритических форм равновесия гибкого упругого стержня с защемленными концами, нагруженного продольной силой. Установлено, что существующее решение Лагранжа в эллиптических интегралах имеет неизвестные ранее точки бифуркации и ответвляющиеся решения.

Точные аналитические решения в эллиптических интегралах, описывающие закритический изгиб стержней (эластика Эйлера), получены Лагранжем [1]. Однако устойчивость закритических форм равновесия до последнего времени не исследовалась. В [2] проведен анализ устойчивости стержня с шарнирно опертыми концами и показано, что данная задача содержит точки бифуркации и ветви решения, неизвестные ранее. В данной работе аналогичное исследование проводится для стержня с защемленными концами.

Рассмотрим прямолинейный упругий стержень с постоянным прямоугольным поперечным сечением с защемленными концами, имеющий длину l и жесткости на растяжение EF и изгиб EI , который нагружен продольной силой P (рис. 1). Исследуем плоскую эластику с помощью численного алгоритма [3], допускающего возможность многократного ветвления решения. Отношение высоты поперечного сечения стержня к его длине полагалось равным $2,5 \cdot 10^{-3}$, что обеспечивало практическую нерастяжимость осевой линии. Как показали численные исследования, в рассматриваемом диапазоне искривлений

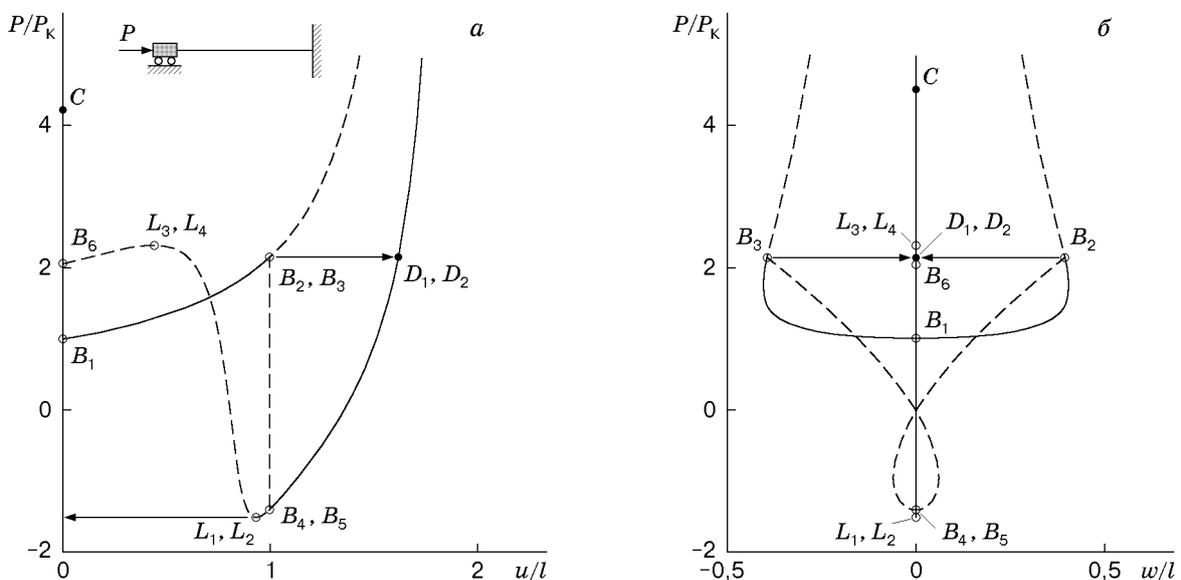


Рис. 1

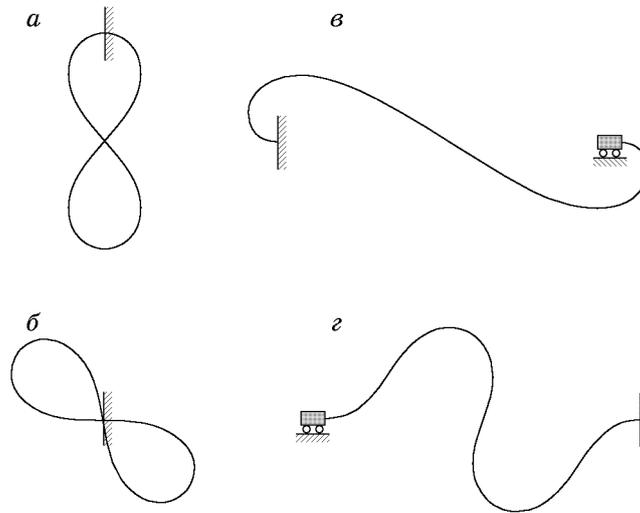


Рис. 2

стержня при разбиении стержня на 50 конечных элементов равной длины можно получить решения с большой точностью.

На рис. 1 представлены полученные нелинейные характеристики деформирования стержня ($P_k = 4\pi^2 EI/l^2$ — первая критическая нагрузка; u — продольное смещение подвижной опоры; w — поперечный прогиб в среднем сечении стержня). Сплошными линиями показаны устойчивые состояния, штриховыми — неустойчивые. Точки соответствуют особым точкам решения.

Проанализируем полученные результаты. При увеличении сжимающей нагрузки от нуля до величины $P = P_k$ стержень сохраняет устойчивую прямолинейную форму равновесия. В точке бифуркации B_1 происходит ветвление решения. При дальнейшем увеличении нагрузки устойчивыми становятся изгибные формы равновесия (кривые B_1B_2 и B_1B_3 на рис. 1). Данные результаты хорошо известны. Однако, как показали расчеты, эти искривленные состояния стержня устойчивы лишь до точки B_2 (B_3), где при $P = 2,1539P_k$ происходит вторичная потеря устойчивости. При данном значении нагрузки концы стержня совмещаются и он принимает 8-образную конфигурацию (рис. 2, а). При этом вторая вариация полной потенциальной энергии стержня перестает быть положительно определенной, что свидетельствует о неустойчивости данного состояния равновесия.

Значение силы, при котором концы стержня совмещаются, с использованием решения Лагранжа для нерастяжимого стержня определяется из трансцендентного уравнения

$$2E(\pi/2, k) - F(\pi/2, k) = 0, \quad P = (4/\pi^2)F^2(\pi/2, k)P_k, \quad (1)$$

где $F(\pi/2, k)$ и $E(\pi/2, k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода; k — модуль эллиптического интеграла. Из (1) следует

$$k = 0,908\,908\,557, \quad P = 2,183\,379\,05P_k. \quad (2)$$

Найденное с помощью алгоритма [3] значение нагрузки вторичной потери устойчивости отличается от значения в (2) на 1,3%. Через точки B_2 и B_3 проходит ветвь решения $B_2B_4B_3B_5B_2$ (см. рис. 1), которая является замкнутой кривой в расширенном пространстве обобщенных координат и параметра нагрузки. При движении вдоль данной ветви происходит деформирование, приводящее к вращению 8-образной конфигурации стержня. В этом случае деформированное состояние в каждой точке стержня циклически изменяется при сохранении постоянного значения потенциальной энергии стержня.

Особые точки	P/P_K	u/l	w/l
B_1	1	0	0
B_2, B_3	2,1539	1	$\pm 0,3927$
B_4, B_5	-1,4010	1	0
L_1, L_2	-1,5132	0,9347	0
L_3, L_4	2,3153	0,4451	0
B_6	2,0512	0	0

В точках бифуркации B_4 и B_5 описанную ветвь решения пересекает новая ветвь $D_1B_4L_1L_3B_6L_4L_2B_5D_2$, содержащая точки бифуркации B_4, B_5 и B_6 и предельные точки L_1, L_2, L_3 и L_4 . В точке B_4 деформированный стержень принимает форму, показанную на рис. 2,б. Устойчивым состояниям на этой ветви (точка D_1) отвечают S -образные конфигурации (рис. 2,в), а неустойчивым (точка L_3) — конфигурации, представленные на рис. 2,г. Заметим, что данная ветвь решения описывает деформирование стержня при развитии второй формы потери устойчивости прямолинейного стержня, которая происходит при достижении нагрузкой значения $P = 2,05012P_K$ (точка бифуркации B_6).

Таким образом, в отличие от традиционного решения Лагранжа B_1B_2 (или B_1B_3) и его непрерывного продолжения как серии устойчивых равновесных состояний при возрастающем значении силы деформирование происходит вдоль ветви B_1B_2 (или B_1B_3) с последующим перескоком на ветвь B_4D_1 (или B_5D_2).

При традиционном выборе в качестве характерных перемещений прогиба стержня и перемещения его подвижного конца проекции особых точек B_4 и B_5, L_1 и L_2, L_3 и L_4 совпадают (см. рис. 1). Конфигурации, соответствующие точкам L_2 и L_4 , получаются зеркальным отражением конфигураций, отвечающих точкам L_1 и L_3 . Конфигурация, соответствующая точке бифуркации B_5 , является зеркальным отражением конфигурации, отвечающей точке B_4 и относительно вертикальной оси проходящей через неподвижный конец стержня.

В таблице приведены значения безразмерных параметров, характеризующих деформированное состояние стержня, которые вычислены в особых точках решения.

Приведенные результаты показывают, что исследование устойчивости нелинейных решений, в том числе известных, позволяет выявить особые точки и новые решения, ответвляющиеся от этих точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
2. Кузнецов В. В., Левяков С. В. О вторичной потере устойчивости эйлера стержня // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 6. С. 184, 185.
3. Кузнецов В. В., Левяков С. В. Многочисленные решения пространственных задач нелинейного деформирования тонких криволинейных стержней // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 2. С. 141–149.

Поступила в редакцию 12/V 1999 г.,
в окончательном варианте — 19/VIII 1999 г.