

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПИРСА ДЛЯ ЛЕНТОЧНОГО ПУЧКА
ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ ЭМИССИИ

В. А. Сыровой

(Москва)

Определены фокусирующие электроды для ленточного пучка одноименно заряженных частиц при произвольных условиях на эмиттере. Показано, что непрерывная зависимость угла наклона нулевой эквипотенциали от начальной скорости и поля отсутствует. Получение решения уравнений пучка составляет, как известно, лишь часть задачи. Для реализации течения, описываемого таким решением, необходимо рассмотреть вопрос о системе фокусирующих электродов, обеспечивающих существование пучка данной конфигурации. Решение этого вопроса сводится к задаче об аналитическом продолжении потенциала, заданного на границе пучка вместе со своей нормальной производной, в область, свободную от зарядов, т. е. к задаче Коши для уравнения Лапласа. В работе [1] определены фокусирующие электроды для ленточного пучка, описываемого решением Чейлда—Лэнгмюра [2] (закон $3/2$). В [3-6] метод [2] обобщен на случай криволинейных траекторий.

Известно лишь несколько аналитических решений этой задачи в замкнутой форме [1, 5, 7, 8]. Вместе с тем в связи с неустойчивостью решения [6], затрудняющей численное интегрирование или разложение в ряды [9, 10], аналитические решения, помимо самостоятельного интереса, представляют ценность как эталоны при расчетах на электронных машинах и моделировании.

В работе [3] отмечалось, что предлагаемый в ней метод применим, когда траектории, потенциал и нормальная компонента поля на них заданы достаточно простыми аналитическими выражениями. В [4] на конкретном примере показано, что систему дифференциальных уравнений эквипотенциали можно записать и в том случае, когда аналитическое решение уравнений пучка отсутствует. В [4] исследовалось течение между наклоненными плоскостями, определяемое системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим случай, когда решение дается в неявном виде на примере ленточного пучка при произвольных условиях эмиссии [11]. Будем считать, что потенциал меняется монотонно.

Уравнения пучка, стартующего с эмиттера $x = 0$ с начальной скоростью u_0 , имеют вид

$$u^2 + 2\eta\phi = u_0^2, \quad \rho u = j_0, \quad d^2\phi/dx^2 = -4\pi\rho \quad (1)$$

Следует рассмотреть течения трех типов, различающиеся условиями на эмиттере

1. $u_0 \neq 0, \quad \varepsilon_0 \neq 0;$
2. $u_0 \neq 0, \quad \varepsilon_0 = 0;$
3. $u_0 = 0, \quad \varepsilon_0 \neq 0$

Здесь u — скорость частицы, ϕ — скалярный потенциал, ρ — плотность пространственного заряда, η — удельный заряд частицы, a — постоянная, имеющая размерность длины, ε_0 — поле на эмиттере, j_0 — плотность тока эмиссии. Введем безразмерные переменные $x^\circ, u^\circ, \phi^\circ, \rho^\circ$ по формулам

1. $x = ax^\circ, \quad u = u_0 u^\circ, \quad \phi = -a\varepsilon_0 \phi^\circ, \quad \rho = (j_0 / u_0) \rho^\circ \quad (2)$
2. $x = ax^\circ, \quad u = u_0 u^\circ, \quad \phi = \phi_k \phi^\circ, \quad \rho = (j_0 / u_0) \rho^\circ$
3. $x = ax^\circ, \quad u = \sqrt{2a\eta\varepsilon_0} u^\circ, \quad \phi = -a\varepsilon_0 \phi^\circ, \quad \rho = (j_0 / \sqrt{2a\eta\varepsilon_0}) \rho^\circ$

(ϕ_k — потенциал коллектора)

Заметим, что φ° , ρ° , введенные по формулам (2), всегда положительны. Опуская символ безразмерной величины, получим, что уравнения (1) в переменных (2) примут вид

$$u^2 = \varphi_{u\varepsilon}, \quad \rho u = 1, \quad d^2\varphi/dx^2 = \beta_{u\varepsilon}\rho \quad (3)$$

($\alpha_{u\varepsilon}$, $\beta_{u\varepsilon}$ — некоторые безразмерные постоянные)

Решая уравнения (3), получаем

$$\varphi_{u\varepsilon}'^2 = 4\alpha_{u\varepsilon}\beta_{u\varepsilon}\sqrt{\varphi_{u\varepsilon}} + \text{const} \geq 0 \quad (4)$$

$$\pm x + A_{u\varepsilon} = \sqrt{2}B_{u\varepsilon}(\sqrt{\varphi_{u\varepsilon}} - 2\gamma_{u\varepsilon}')\sqrt{\sqrt{\varphi_{u\varepsilon}} + \gamma_{u\varepsilon}'} \quad (5)$$

Здесь и далее приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{4(1-2\gamma_{11})(1+\gamma_{11})}{3\alpha_{11}}, & A_{10} &= 0, & A_{01} &= -\frac{8\gamma_{01}^2}{3} \\ B_{11} &= \frac{2\sqrt{2}(1+\gamma_{11})}{3\alpha_{11}}, & B_{10} &= \frac{2\sqrt{2}\gamma_{10}}{3}, & B_{01} &= \frac{2\sqrt{2}\gamma_{01}}{3} \\ \varphi_{11} &= \alpha_{11}\Phi + 1, & \varphi_{10} &= \alpha_{10}\Phi + 1, & \varphi_{01} &= \Phi \\ \gamma_{11} &= \frac{\eta\varepsilon_0^2}{8\pi u_0 j_0} - 1, & \gamma_{10} &= \frac{u_0^3}{8\pi\eta a^2 j_0}, & \gamma_{01} &= \frac{\varepsilon_0}{8\pi j_0} \left(\frac{\eta\varepsilon_0}{2a}\right)^{1/2} \\ \gamma_{11}' &= \gamma_{11}, & \gamma_{10}' &= -1, & \gamma_{01}' &= \gamma_{01} \\ \alpha_{11} &= \frac{2\eta a \varepsilon_0}{u_0^2}, & \alpha_{10} &= -\frac{2\eta\varphi_k}{u_0^2}, & \alpha_{01} &= 1 \\ \beta_{11} &= \frac{4\pi a j_0}{u_0 \varepsilon_0}, & \beta_{10} &= -\frac{4\pi a^2 j_0}{u_0 \varphi_k}, & \beta_{01} &= \frac{2\pi j_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{2a}{\eta\varepsilon_0}\right)^{1/2} \\ F_{11} &= \alpha_{11}\Phi + 1, & F_{10} &= \alpha_{10}\Phi + 1, & F_{01} &= \Phi \end{aligned}$$

Индексы употребляются в соответствии с правилом: $A_{u\varepsilon} = A_{01}$ при $u_0 = 0$ и $\varepsilon_0 \neq 0$, $A_{u\varepsilon} = A_{10}$ при $u_0 \neq 0$ и $\varepsilon_0 = 0$, $A_{u\varepsilon} = A_{11}$ при $u_0 \neq 0$ и $\varepsilon_0 \neq 0$ и т. д.

Будем считать, что заряды занимают область $x \geq 0$, $y \geq 0$. Для того чтобы получить уравнения фокусирующих электродов, заменим x в (5) на $z = x + iy$, а φ представим в виде $\varphi = \Phi + i\Psi$. Отделяя затем действительную и мнимую части, приходим к выражениям вида

$$x = x(\Phi, \Psi; \alpha, \gamma), \quad y = y(\Phi, \Psi; \alpha, \gamma)$$

Полагая $\Phi = \Phi_0$, получим параметрическое уравнение эквипотенциали $\Phi = \Phi_0$

$$x = x(\Phi_0, \Psi; \alpha, \gamma), \quad y = y(\Phi_0, \Psi; \alpha, \gamma)$$

Выпишем конкретную зависимость x и y от Φ и Ψ

$$\pm x + A_{u\varepsilon} = B_{u\varepsilon} \left[\left(\sqrt{1/2}(r + F_{u\varepsilon}) - 2\gamma_{u\varepsilon}' \right) \sqrt{R + \sqrt{1/2}(r + F_{u\varepsilon}) + \gamma_{u\varepsilon}'} - \right. \\ \left. - \sqrt{1/2}(r - F_{u\varepsilon}) \sqrt{R - \sqrt{1/2}(r + F_{u\varepsilon}) - \gamma_{u\varepsilon}'} \right] \quad (6)$$

$$y = B_{u\varepsilon} \left[\left(\sqrt{1/2}(r + F_{u\varepsilon}) - 2\gamma_{u\varepsilon}' \right) \sqrt{R - \sqrt{1/2}(r + F_{u\varepsilon}) - \gamma_{u\varepsilon}'} + \right. \\ \left. + \sqrt{1/2}(r - F_{u\varepsilon}) \sqrt{R + \sqrt{1/2}(r + F_{u\varepsilon}) + \gamma_{u\varepsilon}'} \right]$$

$$r = \sqrt{F_{u\varepsilon}^2 + \Psi^2}, \quad R = \sqrt{r + \gamma_{u\varepsilon}'} \sqrt{2(r + F_{u\varepsilon}) + \gamma_{u\varepsilon}'^2}$$

Уравнения нулевой эквипотенциали при $u_0, \varepsilon_0 \neq 0$ и при $u_0 = 0, \varepsilon_0 \neq 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} & \pm \alpha x + \sqrt[4]{3}(1-2\gamma)(1+\gamma) = \sqrt[2]{3}\sqrt{2(1+\gamma)} \left[\left(\sqrt{1/2}(r_0+1) - 2\gamma \right) \times \right. \\ & \times \left. \sqrt{R_0 + \sqrt{1/2}(r_0+1) + \gamma} - \sqrt{1/2}(r_0-1) \sqrt{R_0 - \sqrt{1/2}(r_0+1) - \gamma} \right] \\ & \alpha y = \sqrt[2]{3}\sqrt{2(1+\gamma)} \left[\left(\sqrt{1/2}(r_0+1) - 2\gamma \right) \sqrt{R_0 - \sqrt{1/2}(r_0+1) - \gamma} + \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{1/2}(r_0-1) \sqrt{R_0 + \sqrt{1/2}(r_0+1) + \gamma} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

$$r_0 = \sqrt{1 + \Psi^2}, \quad R_0 = \sqrt{r_0 + \gamma \sqrt{2(r_0+1) + \gamma^2}}$$

$$\begin{aligned} x - \sqrt[8]{3}\gamma^2 = \sqrt[2]{3}\sqrt{2\gamma} \left[\left(\sqrt{1/2}\Psi - 2\gamma \right) \sqrt{\sqrt{\Psi + \gamma} \sqrt{2\Psi + \gamma^2} + \sqrt{1/2}\Psi + \gamma} - \right. \\ \left. - \sqrt{1/2}\Psi \sqrt{\sqrt{\Psi + \gamma} \sqrt{2\Psi + \gamma^2} - \sqrt{1/2}\Psi - \gamma} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} y = \sqrt[2]{3}\sqrt{2\gamma} \left[\left(\sqrt{1/2}\Psi - 2\gamma \right) \sqrt{\sqrt{\Psi + \gamma} \sqrt{2\Psi + \gamma^2} - \sqrt{1/2}\Psi - \gamma} + \right. \\ \left. + \sqrt{1/2}\Psi \sqrt{\sqrt{\Psi + \gamma} \sqrt{2\Psi + \gamma^2} + \sqrt{1/2}\Psi + \gamma} \right] \end{aligned}$$

Видно, что нулевые эквипотенциали не будут прямыми, как при эмиссии, ограниченной пространственным зарядом и $u_0 = 0$. Учитывая, что нулевому значению параметра Ψ соответствует граница пучка $y = 0$, а при $\Phi = 0$ — точка $x = y = 0$, через которую проходит нулевая эквипотенциаль, получим, что x и y в формуле (7) ведут себя при малых Ψ как Ψ^2 и Ψ , а в (8) — как $\Psi^{3/2}$ и Ψ соответственно.

Следовательно, нулевая эквипотенциаль подходит к границе пучка под прямым углом. Устремляя γ к нулю ($\varepsilon_0 \rightarrow 0$) в выражении, заключенном в квадратные скобки, и полагая $a\varepsilon_0 = \varphi_k$ в множителе перед скобками, получим вместо (8) следующие выражения для x и y :

$$x = \sqrt[2]{3}\sqrt{\gamma} \left(\sqrt{1 + 1/2\sqrt{2}} - \sqrt{1 - 1/2\sqrt{2}} \right) \Psi^{3/4} \quad (9)$$

$$y = \sqrt[2]{3}\sqrt{\gamma} \left(\sqrt{1 - 1/2\sqrt{2}} + \sqrt{1 + 1/2\sqrt{2}} \right) \Psi^{3/4}$$

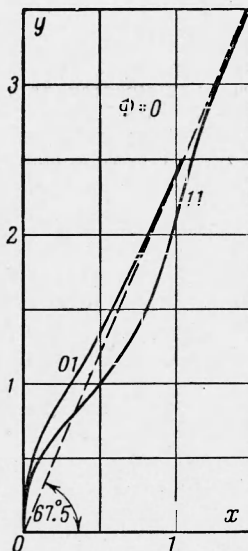
Исключая Ψ в формулах (9), имеем

$$y = (1 + \sqrt{2})x = (\operatorname{tg} 3/8 \pi)x \quad (10)$$

Уравнение (10) определяет нулевой пирсовский электрод. При том же предельном переходе формулы (6) при $u_0 = 0, \varepsilon_0 \neq 0$ дают параметрическое уравнение семейства эквипотенциалей, определенных в работе [1]

$$\begin{aligned} x &= \frac{4\sqrt{\gamma}}{3} (\Phi^2 + \Psi^2)^{3/8} \cos \frac{3}{4} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\Psi}{\Phi} \\ y &= \frac{4\sqrt{\gamma}}{3} (\Phi^2 + \Psi^2)^{3/8} \sin \frac{3}{4} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\Psi}{\Phi} \end{aligned}$$

При $\Psi \rightarrow \infty$ формулы (6) с точностью до постоянного множителя дадут для x и y выражения (9). Таким образом, прямая, составляющая с границей пучка угол в $67^\circ.5$, является асимптотой семейства эквипотенциальных кривых при различных значениях u_0 и ε_0 .

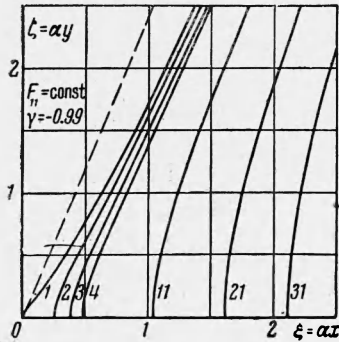


Фиг. 1

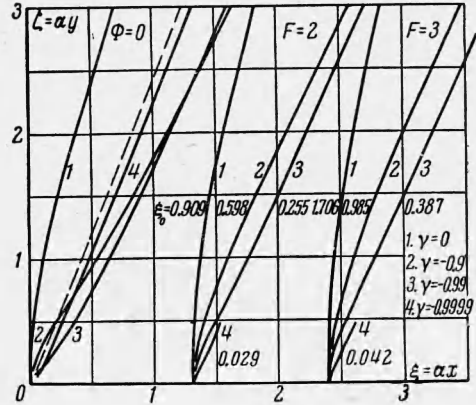
На фиг. 1 приведено схематическое изображение нулевой эквипотенциали при $u_0 \neq 0, \varepsilon_0 \neq 0$ и $u_0 = 0, \varepsilon_0 \neq 0$.

Формулы (6) при $u_0 \neq 0, \varepsilon_0 \neq 0$ в координатах $\xi = \alpha x, \zeta = \alpha y$ определяют однопараметрическое семейство кривых $F(\xi, \zeta; \gamma) = F^0 = \text{const}$. Если $u_0 \neq 0, \varepsilon_0 = 0$, то в координатах $\xi = \kappa x, \zeta = \kappa y$, где $\kappa = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \sqrt{\alpha \beta}}$, получим универсальное семейство кривых $F(\xi, \zeta) = F^0 = \text{const}$. Для этого случая $1 \leq F^0 \leq 2$. При различных значениях параметра α этим кривым следует приписать потенциалы в соответствии с выражением

$$\Phi_0 = \alpha^{-1} (F^0 - 1)$$

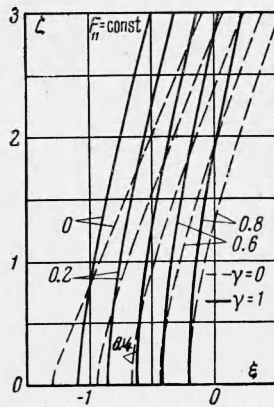


Фиг. 2

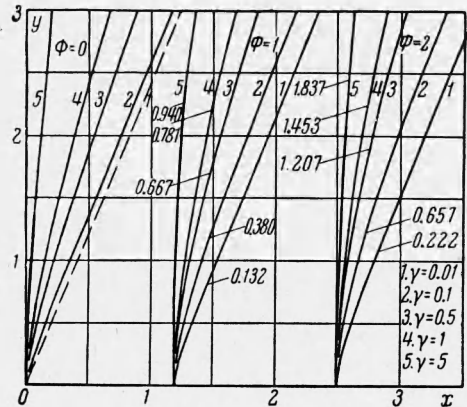


Фиг. 3

и вместе с тем перейти от ξ, ζ к x, y , изменив в $|1/\alpha|$ или в $1/\kappa$ раз масштабы по осям координат. При движении в ускоряющем поле $\Phi' > 0, F' > 0, \alpha > 0$. Если частицы тормозятся, то $\Phi' > 0, F' < 0, \alpha < 0$. Кроме того, потенциал при торможении не может быть больше, чем $(-1/\alpha)$; при этом скорость частиц на коллекторе падает до нуля. Таким образом, кривые $F^0 \geq 1$ соответствуют ускорению частиц, а $0 \leq F^0 \leq 1$ — торможению частиц. Из (4) следует, что при $\varepsilon_0 = 0$ возможны лишь



Фиг. 4



Фиг. 5

режимы с ускорением частиц; значит, знак минус в формулах (5) и (6) имеет смысл лишь при $u_0 \neq 0, \varepsilon_0 \neq 0$. Однако и в этом случае из (4) видно, что должно выполняться неравенство

$$\sqrt{F} + \gamma \geq 0$$

Отсюда вытекает, что при заданном отрицательном γ режим с полным торможением частиц не может быть реализован.

На фиг. 2 представлены кривые $F_{11}(\xi, \zeta; \gamma) = F_{11}^0 \geq 1$ при $\gamma = -0.99$. Эти же кривые при различных значениях γ изображены на фиг. 3. В целях наглядности кривые $F_{11}^0 = 2$ и $F_{11}^0 = 3$ при разных γ снесены в одну точку; около каждой такой кри-

вой указано значение ξ_0 , определяющее пересечение данной эквипотенциали с границей пучка. Из фиг. 3 видно, что в зависимости от значения параметра γ элементы кривых $\Phi = 0$, изображенные на фиг. 1, достигают различной степени развития. Так при $\gamma = -0.99$ нулевая эквипотенциаль пересекает прямую $\xi = (1 + \sqrt{2})\zeta$ при $\zeta \sim 0.04$, тогда как при $\gamma = -0.9999$ — при ζ менее 0.001.

На фиг. 4 изображены кривые $F_{11} = \text{const}$ при $0 \leq F_{11}^0 \leq 1$ для двух значений γ ($\gamma = 0$ и $\gamma = 1$), соответствующие торможению частиц.

Фиг. 5 аналогична фиг. 3, но относится к случаю $u_0 = 0$, $\varepsilon_0 \neq 0$. Нулевая эквипотенциаль при $\gamma = 0.01$, за исключением малой области вблизи границы пучка, практически совпадает с прямой, подходящей к пучку под углом в $67^\circ.5$.

На фиг. 6 приведены эквипотенциальные поверхности $F_{01} = \Phi = \text{const}$.

Выше было показано, что непрерывная зависимость угла наклона нулевой эквипотенциали от u_0 и ε_0 отсутствует. При $u_0 = \varepsilon_0 = 0$ этот угол равен $67^\circ.5$, при всех других значениях начальной скорости и поля нулевая эквипотенциаль подходит к границе пучка под прямым углом.

Решение Чайлда — Лэнгмюра

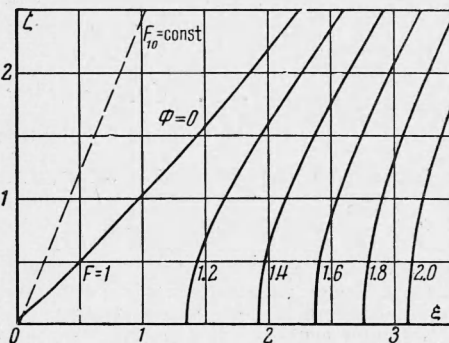
дает хорошее приближение действительного распределения потенциала в плоском диоде во всей области между электродами, за исключением узкого прикатодного слоя, где пучок существенно не моноэнергетический. Однако то же предположение при определении фокусирующих электродов дает вместо нулевой эквипотенциали лишь ее асимптоту, так как трудно ожидать, что в реальном устройстве условие $u_0 = \varepsilon_0 = 0$ может быть выполнено. Электроды, полученные с учетом этого обстоятельства, приближаются к определенным в [1] при малых γ (случай $u_0 = 0$, $\varepsilon_0 \neq 0$). Однако на границе пучка отличие всегда имеет место, и это тем более важно, что возмущения на границе экспоненциально возрастают при удалении от нее.

Автор благодарен В. В. Фролову за помощь, оказанную при выполнении этой работы.

Поступила 25 XII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Pierce J. R. Rectilinear Electron Flow in Beams. J. Appl. Phys., 1940, vol. 11, No. 8.
2. Child C. D. Discharge from Hot CaO. Phys. Rev., 1911, vol. 32, No. 5.
3. Lomax R. J. Exact Electrode Systems for the Formation of a Curved Space — Charge Beam. J. Electron. Contr., 1957, vol. 3, No. 4.
4. Lomax R. J. Exact Electrode Systems for the Formation of a Curved Space — Kcharge Beam. J. Electron. Contr., 1959, vol. 7, No. 6.
5. Girstein P. T. On the Determination of the Electrodes Required to Produce a Given Electric Field Distribution Along a Prescribed Curve. Proc. JRE, 1958, vol. 46, No. 10.
6. Rabley D. E. The Theory of the Pierce Type Electron Gun. J. Electron. Contr., 1958, vol. 4, No. 2.
7. Rosenblatt J. Three-Dimensional Space—Charge Flow. J. Appl. Phys., 1960, vol. 31, No. 8.
8. Сыровой В. А. Инвариантно-групповые решения уравнений плоского стационарного пучка заряженных частиц. ПМТФ, 1962, № 4.
9. Brewer G. R. Note on the Determination of Electrode Shapes for a Pierce — Type Electron Gun. J. Appl. Phxs., 1957, vol. 28, No. 5.
10. Verz F. Note on the Potential Derived, from Axial Values in Electron Optics. Philos. Mag., 1950, vol. 41, No. 314.
11. Fay C. E., Samuel A. L., Shockley W. On the Theory of Space Charge Between Parallel Plane Electrodes, Bell Syst. Techn. J., 1938, vol. 17, No. 1.



Фиг. 6