

УДК 539.3

DOI: 10.15372/PMTF202215239

## МЕТОД РАСЧЕТА ПРЕДЕЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ РАЗДАЧЕ ТРУБНОЙ ЗАГОТОВКИ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

С. И. Феоктистов, И. К. Андрианов

Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Комсомольск-на-Амуре, Россия  
E-mails: serg\_feo@mail.ru, ivan\_andrianov\_90@mail.ru

Рассмотрен метод определения предельного коэффициента раздачи цилиндрических труб с использованием конической оснастки, позволяющий достаточно точно вычислить момент разрушения заготовки с учетом нелинейной пластичности материала и изменения толщины. Метод основан на использовании диаграмм предельных деформаций формоизменения при прогнозировании разрушения заготовки и метода переменных параметров упругости при определении напряженно-деформированного состояния.

**Ключевые слова:** цилиндрическая труба, раздача, предельные возможности, диаграмма предельных деформаций формоизменения, метод переменных параметров упругости

**Введение.** Одной из важнейших задач при разработке технологических процессов деформирования цилиндрических труб, таких как раздача, является прогнозирование момента разрушения заготовки, т. е. определение предельных технологических возможностей. Напряженное состояние тонкостенных труб можно считать плоским, что позволяет при анализе напряженно-деформированного состояния использовать методы, применяемые в листовой штамповке. Предельное формоизменение листового металла может быть определено как способность металла деформироваться до достижения требуемой формы без образования шейки или разрушения. Листовой металл может деформироваться без разрушения только до определенного предела, который обычно характеризуется диаграммой предельных деформаций формоизменения (forming limit diagram (FLD)) [1, 2]. FLD определяет момент образования шейки, возникновение которой в конечном счете приводит к пластическому разрушению. FLD может быть представлена в виде кривой на плоскости главных деформаций, действующих в плоскости листа, в момент образования локализованной шейки. Наибольшие главные деформации растяжения  $e_1$  откладываются по оси ординат, наименьшие главные деформации  $e_2$  — по оси абсцисс.

При определении напряженного состояния и расчете деформаций в процессах деформирования цилиндрических труб в конических матрицах используется метод переменных параметров упругости [3, 4], позволяющий учитывать не только изменение толщины в про-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых и по государственной поддержке ведущих научных школ РФ в рамках проекта СП-2200.2022.5 “Разработка моделей и алгоритмов расчета пластического формообразования заготовок штамповочного производства”.

цессе деформирования, но и нелинейное упрочнение материала, которое для титановых и алюминиевых сплавов достаточно точно описывается степенной функцией.

Следует отметить, что задачи определения предельных нагрузок и деформаций оболочек вращения рассматривались также в других работах. Так, в [5] рассмотрена задача определения предельной нагрузки оболочек вращения для идеального упругопластического материала, а в [6, 7] определены предельные деформации динамического разрушения цилиндрических оболочек из жесткопластического материала. Задачи определения напряженно-деформированного состояния при раздаче рассматривались в работах [8–14].

**1. Определение напряженно-деформированного состояния при раздаче цилиндрических труб с использованием конической оснастки.** Рассмотрим процесс раздачи тонкостенных цилиндрических труб с использованием конического пуансона (рис. 1). Различные подходы к решению поставленной задачи представлены в работах [4, 10, 13, 14]. В данной работе эта задача решается методом переменных параметров упругости с учетом нелинейной пластичности и изменения толщины.

В общем случае уравнение равновесия при раздаче трубной заготовки может быть записано в виде [15]

$$\frac{d(\sigma_m S)}{d\rho} = \frac{\sigma_\theta(1 + f_{\text{тр}} \operatorname{ctg} \alpha_k) - \sigma_m}{\rho} S, \quad (1)$$

где  $\sigma_m$  — меридиональное нормальное напряжение;  $\sigma_\theta$  — окружное нормальное напряжение;  $f_{\text{тр}}$  — коэффициент трения;  $S$  — толщина трубы;  $\alpha_k = \operatorname{const}$  — угол конусности пуансона;  $\rho$  — радиус окружности срединной поверхности оболочки в сечении, перпендикулярном оси трубы.

Диаграмму деформирования, определяющую свойства материала, аппроксимируем линейно-степенной функцией [4]

$$\sigma_i = \begin{cases} 3Ge_i, & e_i \leq e_{iT}, \\ Ae_i^n, & e_i > e_{iT}, \end{cases} \quad (2)$$

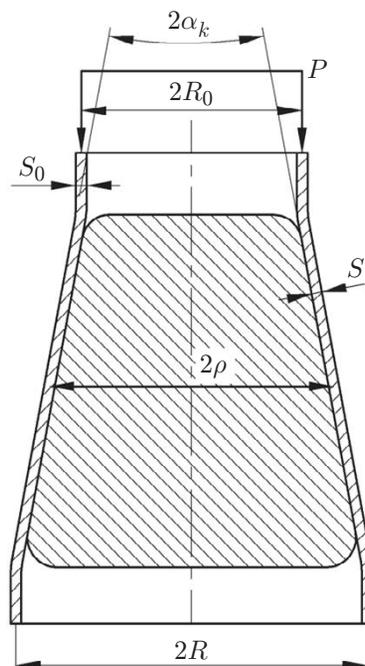


Рис. 1. Схема раздачи тонкостенной трубы с использованием конического пуансона

где  $G$  — модуль сдвига;  $e_{iT}$  — значение интенсивности логарифмических (истинных) деформаций, соответствующее точке перехода линейной зависимости в степенную (предел текучести);  $A, n$  — параметры степенной функции. Такая аппроксимация позволяет учитывать нелинейную пластичность.

Для решения задачи определения напряженно-деформированного состояния методом переменных параметров упругости необходимо вывести интегральные уравнения.

Интегрируя уравнение (1) с использованием уравнений связи напряжений и деформаций в виде

$$\sigma_m = \frac{E^*}{1 - \mu^{*2}} (e_m + \mu^* e_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E^*}{1 - \mu^{*2}} (e_\theta + \mu^* e_m),$$

а также учитывая, что деформируемый край трубы свободен, можно получить интегральное уравнение равновесия в деформациях [16]

$$e_m = -\mu^* e_\theta + \frac{1 - \mu^{*2}}{E^* S \rho} \int_R^\rho \frac{E^* S (1 + f_{\text{тр}} \operatorname{ctg} \alpha_k)}{1 - \mu^{*2}} (e_\theta + \mu^* e_m) d\rho, \quad (3)$$

где  $e_m$  — меридиональная логарифмическая (истинная) деформация;  $e_\theta$  — окружная логарифмическая (истинная) деформация;  $E^*, \mu^*$  — переменные параметры упругости;  $R$  — радиус деформированного края трубы (см. рис. 1).

Переменные параметры упругости определяются выражениями [3, 4]

$$E^* = \frac{E_{\text{сек}}}{1 + (1 - 2\mu) E_{\text{сек}} / (3E)}, \quad \mu^* = \frac{1/2 - (1 - 2\mu) E_{\text{сек}} / (3E)}{1 + (1 - 2\mu) E_{\text{сек}} / (3E)},$$

где  $E$  — модуль Юнга;  $\mu$  — коэффициент Пуассона;  $E_{\text{сек}} = \sigma_i / e_i$  — секущий модуль.

Рассмотрим решение задачи определения напряженно-деформированного состояния при деформировании цилиндрических труб со свободным краем в конических матрицах [15]. В этом случае окружные деформации можно считать известными и зависящими только от координаты рассматриваемой точки:

$$e_\theta = \ln(\rho / R_0)$$

( $R_0$  — начальный радиус срединной поверхности трубы).

Напряженно-деформированное состояние трубы определяется с использованием метода переменных параметров упругости и метода последовательных приближений по рекуррентной схеме [3, 4]. С использованием уравнения (3) получаем

$$e_m^{(k+1)} = -\mu^{*(k)} \ln\left(\frac{\rho}{R_0}\right) + \frac{1 - \mu^{*(k)2}}{E^{*(k)} S^{(k)} \rho} \int_R^\rho \frac{E^{*(k)} S^{(k)} (1 + f_{\text{тр}} \operatorname{ctg} \alpha_k)}{1 - \mu^{*(k)2}} \left( \ln\left(\frac{\rho}{R_0}\right) + \mu^{*(k)} e_m^{(k)} \right) d\rho,$$

где индексами “ $(k)$ ” и “ $(k + 1)$ ” отмечены величины в  $k$ -м и  $(k + 1)$ -м приближениях соответственно. Численное интегрирование проводится от  $R$  до  $R_0$ .

Поскольку результаты расчетов не зависят от выбора исходного приближения, в качестве начальных условий принимаем

$$e_m^{(0)} = 0, \quad S^{(0)} = S_0, \quad E^{*(0)} = 3G, \quad \mu^{*(0)} = \mu,$$

где  $S_0$  — начальная толщина трубы.

Далее вычисляется распределение деформаций по толщине трубы:

$$e_z^{(k+1)} = \frac{\mu^{*(k)}}{\mu^{*(k)} - 1} \left( \ln \left( \frac{\rho}{R_0} \right) + e_m^{(k+1)} \right).$$

Напряженное состояние трубы определяется с использованием уравнений связи между напряжениями и деформациями:

$$\sigma_m^{(k+1)} = \frac{E^{*(k)}}{1 - \mu^{*(k)2}} (e_m^{(k+1)} + \mu^{*(k)} e_\theta^{(k+1)}), \quad \sigma_\theta^{(k+1)} = \frac{E^{*(k)}}{1 - \mu^{*(k)2}} (e_\theta^{(k+1)} + \mu^{*(k)} e_m^{(k+1)}).$$

Определив напряженно-деформированное состояние, можно вычислить интенсивность напряжений и интенсивность деформаций, а также уточнить значение  $E_{\text{сек}}$  с использованием уравнения аппроксимации диаграммы деформирования линейно-степенной функцией (2):

$$E_{\text{сек}}^{(k+1)} = \frac{(Ae_i^n)^{(k+1)}}{e_i^{(k+1)}}.$$

Затем уточняются значения переменных параметров упругости:

$$E^{*(k+1)} = \frac{E_{\text{сек}}^{(k+1)}}{1 + (1 - 2\mu)E_{\text{сек}}^{(k+1)}/(3E)}, \quad \mu^{*(k+1)} = \frac{1/2 - (1 - 2\mu)E_{\text{сек}}^{(k+1)}/(3E)}{1 + (1 - 2\mu)E_{\text{сек}}^{(k+1)}/(3E)}.$$

Для контроля сходимости процесса проводится сравнение значений интенсивности напряжений, полученных в  $k$ -м и  $(k + 1)$ -м приближениях:

$$|\sigma_i^{(k+1)} - \sigma_i^{(k)}| \leq \Delta\sigma_i.$$

Расчет продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность.

Для оценки предельных деформаций будем использовать FLD.

**2. Определение предельных деформаций раздачи с использованием FLD Хилла — Свифта.** Для определения предельного формоизменения листового металла в работе [17] предложен критерий образования рассеянной шейки (критерий Свифта), согласно которому момент образования рассеянной шейки совпадает с моментом достижения максимума нагрузки в обоих основных направлениях. Преобразуя выражения, полученные для этого случая в работе [18], определяем уравнение, позволяющее построить FLD по критерию Свифта:

$$4(e_1 - n)(e_2 + 2e_1)^3 - 3(e_1 - 2n)(e_1 + 2e_2)(e_2 + 2e_1)^2 - 3(e_1 + 2n)(e_1 + 2e_2)^2(e_2 + 2e_1) + 2(2e_1 + n)(e_1 + 2e_2)^3 = 0. \quad (4)$$

Здесь  $e_1$ ,  $e_2$  — главные логарифмические деформации, действующие либо в плоскости листовой заготовки, либо в окружном и меридиональном направлениях трубной заготовки;  $n$  — показатель степени в степенной аппроксимации кривой деформирования III рода  $\sigma_i = Ae_i^n$ .

Как отмечается в работе [18], в уравнении (4) показатель степени  $n$  равен интенсивности деформаций удлинения в момент начала образования шейки  $e_{i\text{ш}}$ , что следует из свойства диаграммы деформирования III рода [19]. Следовательно, при построении FLD величина  $n$  определяется как  $e_{i\text{ш}}$  заданного материала.

Результаты экспериментов и теоретических исследований показывают, что после возникновения рассеянной шейки пластическая деформация образца продолжается и в дальнейшем может возникнуть локализованная шейка.

В работе [20] в качестве критерия предельного формоизменения принят момент образования локальной шейки, когда приращение суммарного усилия равно нулю (критерий Хилла).

Преобразуя выражения, представленные в работе [18], определяем уравнение, позволяющее построить FLD по критерию Хилла:

$$e_1 + e_2 - n = 0. \quad (5)$$

На практике для построения FLD применяется комбинация двух критериев. Критерий Свифта (уравнение (4)) используется при положительном значении  $e_2$ , а критерий Хилла (уравнение (5)) — при отрицательном значении  $e_2$ . Такую диаграмму будем определять как FLD Хилла — Свифта [18].

Определим предельные деформации раздачи по FLD Хилла — Свифта.

Наиболее полное представление о процессе раздачи дает положение деформированного края  $R$ . При заданном положении деформированного края с использованием метода переменных параметров упругости определяется напряженно-деформированное состояние заготовки в соответствии с изложенным выше алгоритмом. Затем в предположении, что  $e_\theta = e_1$ ,  $e_m = e_2$ , определяется положение точек, характеризующих деформированное состояние заготовки, в координатах  $e_1$ ,  $e_2$ . Если все эти точки находятся ниже кривой предельных деформаций формоизменения, то процесс продолжается, при этом положение деформированного края  $R$  изменяется. В случае если на каком-либо этапе нагружения точки, характеризующие деформированное состояние заготовки в координатах  $e_1$ ,  $e_2$ , будут находиться выше кривой предельных деформаций формоизменения, расчет прекращается и определяется предельный коэффициент раздачи  $K_p^{np} = R_{np}/R_0$  ( $R_{np}$  — радиус деформированного края заготовки, при котором деформации формоизменения достигают предельных значений).

На рис. 2 представлены результаты определения предельного коэффициента раздачи для материала Д16М по FLD Хилла — Свифта, построенной по уравнениям (4), (5). Видно, что если коэффициент раздачи меньше предельного и процесс нагружения происходит без разрушения, то на всех этапах нагружения линии, характеризующие деформированное состояние трубной заготовки (пунктирные линии), находятся ниже кривой предельных

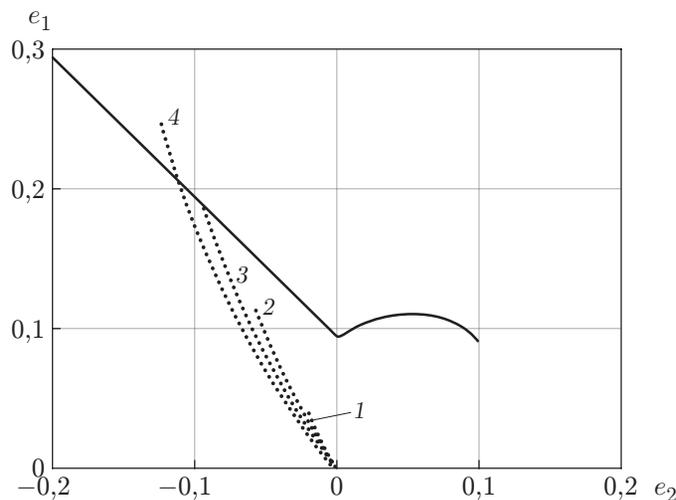


Рис. 2. Определение коэффициента раздачи для материала Д16М по FLD Хилла — Свифта ( $R_0 = 25$  мм,  $S_0 = 1$  мм,  $K_p^{np} = 1,20$ ,  $\alpha_k = 20^\circ$ ,  $f_{TP} = 0,1$ ):  
1 —  $R = 26$  мм, 2 —  $R = 28$  мм, 3 —  $R = R_{np} = 30,1$  мм, 4 —  $R = 32$  мм

деформаций формоизменения (сплошная линия). Если коэффициент раздачи больше предельного, то линии, характеризующие деформированное состояние, пересекают кривую предельного формоизменения, при этом дальнейшее увеличение радиуса раздачи  $R$  приводит к разрушению (кривая 4). В данном случае для материала Д16М по FLD Хилла — Свифта получен предельный коэффициент раздачи  $K_p^{\text{пп}} = R_{\text{пр}}/R_0 = 30,1/25 = 1,20$ .

**3. Определение предельных деформаций раздачи с использованием FLD Сторена — Райса.** В работе [21] в качестве критерия предельного деформирования принимается резкое изменение толщины заготовки. В случае простого (монотонного) нагружения бездефектных заготовок в [22] получена математическая модель предельного деформирования, которая при соответствующих алгебраических преобразованиях с использованием физических соотношений, принятых при построении данной модели, может быть представлена в виде уравнения

$$2(e_1^2 + e_1e_2 + e_2^2)(2e_1 + e_2) - 3e_2^2 - n(2e_1 + e_2)^2 = 0. \quad (6)$$

С помощью уравнения (6) можно построить FLD, соответствующую геометрическому критерию. В работе [23] получены аналогичные результаты, а в [18, 24] FLD, соответствующие уравнению (3), определяются как диаграммы Сторена — Райса.

На рис. 3 представлены результаты определения предельного коэффициента раздачи для материала Д16М по FLD Сторена — Райса, построенной по уравнению (6). В этом случае для материала Д16М с использованием FLD Сторена — Райса получен предельный коэффициент раздачи  $K_p^{\text{пп}} = R_{\text{пр}}/R_0 = 38/25 = 1,52$ .

**Заключение.** Проведенные в работе расчеты показали, что предельный коэффициент раздачи для материала Д16М находится в диапазоне  $K_p^{\text{пп}} = 1,20 \div 1,52$ . Этот результат хорошо согласуется с экспериментальными данными [25. С. 219], которые соответствуют

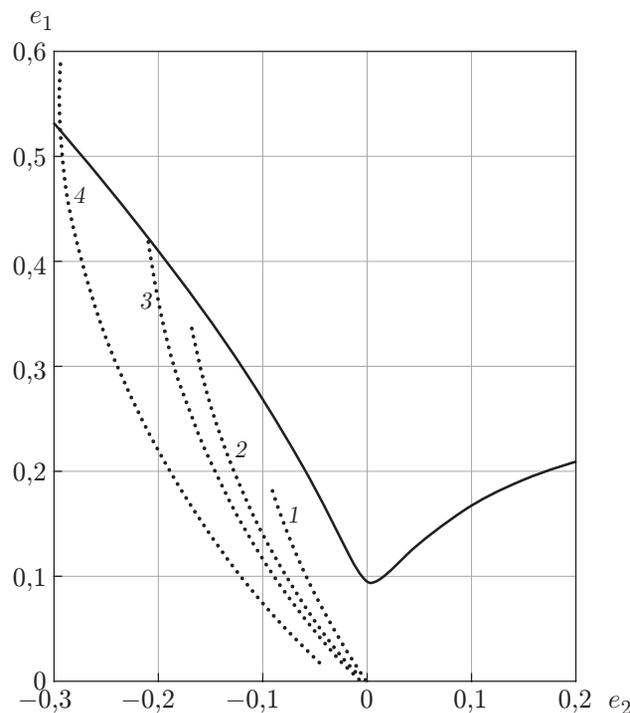


Рис. 3. Определение коэффициента раздачи для материала Д16М по FLD Сторена — Райса ( $R_0 = 25$  мм,  $S_0 = 1$  мм,  $K_p^{\text{пп}} = 1,52$ ,  $\alpha_k = 20^\circ$ ,  $f_{\text{тр}} = 0,1$ ):  
1 —  $R = 30$  мм, 2 —  $R = 35$  мм, 3 —  $R = R_{\text{пр}} = 38$  мм, 4 —  $R = 45$  мм

средней области полученного диапазона. Следует отметить, что при использовании диаграммы Хилла — Свифта получен минимально возможный коэффициент раздачи, а при использовании диаграммы Сторена — Райса — максимально возможный коэффициент раздачи, что соответствует верхней и нижней оценкам раздачи заготовки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Nakazima K.** Forming limits under biaxial stretching of sheet metals // *Tetsu-to-Hagane*. 1967. N 53. P. 455–458.
2. **Marciniak Z. Z., Kuczynski K.** Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal // *Intern. J. Mech. Sci.* 1967. V. 9. P. 609–620.
3. **Биргер И. А.** Круглые пластинки и оболочки вращения. М.: Оборонгиз, 1961.
4. **Малинин Н. Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975.
5. **Волчков Ю. М., Коробейников С. Н.** Оценка предельной нагрузки упругопластических оболочек вращения // *ПМТФ*. 1981. № 4. С. 146–150.
6. **Селиванов В. В.** Предельные деформации динамического разрушения цилиндрических оболочек // *ПМТФ*. 1982. № 4. С. 122–127.
7. **Селиванов В. В.** Экспериментальная оценка предельных деформаций динамического разрушения цилиндрических оболочек // *ПМТФ*. 1985. № 3. С. 118–121.
8. **Кондратенко Л. А., Миронова Л. И.** Образование остаточных напряжений при раздаче стальных труб // *Пробл. машиностроения и автоматизации*. 2019. № 1. С. 58–63.
9. **Бормотин К. С., Потянихин Д. А., Синельщиков А. А. и др.** Метод решения обратной задачи раздачи средней части трубы для расчета формы штампа // *Учен. зап. Комс. н/А гос. техн. ун-та*. 2022. № 5. С. 40–45.
10. **Грязев М. В., Ларин С. Н.** Подход к разработке математической модели процесса раздачи трубы коническим пуансоном // *Фундам. и прикл. пробл. техники и технологии*. 2017. № 4-2. С. 12–17.
11. **Потянихин Д. А., Марьин Б. Н.** Моделирование в ANSYS напряженно-деформированного состояния трубчатой заготовки при раздаче по осесимметричному пуансону // *Вестн. Инж. шк. Дальневост. федер. ун-та*. 2018. № 4. С. 3–15.
12. **Кондратенко Л. А., Миронова Л. И., Винников В. С.** Деформации и напряжения при гидрораздаче толстостенных теплообменных труб // *Пробл. машиностроения и автоматизации*. 2021. № 2. С. 50–57.
13. **Грязев М. В., Ларин С. Н., Пасынков А. А.** Подход к оценке напряженно-деформированного состояния трубной заготовки при раздаче коническим пуансоном // *Изв. Тул. гос. ун-та. Техн. науки*. 2017. № 3. С. 3–9.
14. **Сторожев М. В.** Теория обработки металлов давлением / М. В. Сторожев, Е. А. Попов. М.: Машиностроение, 1977.
15. **Феоктистов С. И., Андрианов И. К., Хтет Л.** Определение напряженно-деформированного состояния при формоизменении цилиндрических труб с использованием конической оснастки // *Учен. зап. Комс. н/А гос. техн. ун-та*. 2022. № 3. С. 4–11.
16. **Феоктистов С. И., Андрианов И. К.** Вывод интегральных уравнений деформирования трубных заготовок с использованием осесимметричной оснастки // *Фундаментальные и прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в металлургии и машиностроении: Материалы 6-й Дальневост. конф. с междунар. участием, Комсомольск-на-Амуре (Россия), 5–7 окт. 2022 г.* Комс. н/А: Комс. н/А гос. техн. ун-т, 2022. С. 204–210.

17. **Swift H. W.** Plastic instability under plane stress // J. Mech. Phys. Solids. 1952. V. 1. P. 1–18.
18. **Paul S. K.** Theoretical analysis of strain- and stress-based forming limit diagrams // Strain Anal. 2013. V. 48, N 3. P. 177–188.
19. **Филимонов В. И.** Теория обработки металлов давлением / В. И. Филимонов, О. В. Мищенко. Ульяновск: Ульян. гос. техн. ун-т, 2012.
20. **Hill R.** On discontinuous plastic states with special reference to localized necking in thin sheet // J. Mech. Phys. Solids. 1952. V. 1. P. 19–30.
21. **Чумадин А. С.** Об одном подходе к расчету предельного деформирования при листовой штамповке // Кузнеч.-штамп. пр-во. 1990. № 6. С. 10–13.
22. **Чумадин А. С.** Теория и расчеты процессов листовой штамповки. 2-е изд. М.: Экспосервис “ВИП”, 2014.
23. **Stören S., Rice J. R.** Localized necking in thin sheets // J. Mech. Phys. Solids. 1975. V. 23. P. 421–441.
24. **Stoughton T. B., Zhu X.** Review of theoretical models of the strain-based FLD and their relevance to the stress-based FLD // Intern. J. Plasticity. 2004. V. 20, N 8/9. P. 1463–1486.
25. **Ковка и штамповка: Справ.: В 4 т. Т. 4. Листовая штамповка / Под ред. А. Д. Матвеева.** М.: Машиностроение, 1985.

*Поступила в редакцию 14/XII 2022 г.,  
после доработки — 2/III 2023 г.  
Принята к публикации 27/III 2023 г.*

---