

УДК 519.6

Оценка локальной погрешности аппроксимации по набору численных решений

А.К. Алексеев, А.Е. Бондарев

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Миусская пл., д. 4, Москва, 125047
E-mails: aleksey.k.alekseev@gmail.com (Алексеев А.К.), bond@keldysh.ru (Бондарев А.Е.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 4, Vol. 15, 2022.

Алексеев А.К., Бондарев А.Е. Оценка локальной погрешности аппроксимации по набору численных решений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 4. — С. 343–358.

В предлагаемой работе разность решений на ансамбле численных решений, полученных независимыми методами, использована для оценки локальной (точечной) погрешности аппроксимации. Для оценки данной погрешности использована обратная задача, сформулированная в оптимизационной постановке. Вследствие инвариантности уравнений к преобразованиям сдвига рассматриваемая задача является некорректно поставленной. Поэтому для получения устойчивых решений использована регуляризация нулевого порядка по Тихонову. Для подтверждения работоспособности предложенного алгоритма проведены численные расчеты для двумерных течений невязкого сжимаемого газа. Оценки погрешности аппроксимации, полученные с помощью решения рассматриваемой обратной задачи, демонстрируют удовлетворительное соответствие с оценками погрешности, полученными с помощью экстраполяции Ричардсона, при существенно меньших затратах вычислительных ресурсов.

DOI: 10.15372/SJNM20220401

Ключевые слова: локальная погрешность аппроксимации, ансамбль численных решений, экстраполяция Ричардсона, обратная задача, уравнения Эйлера.

Alekseev A.K., Bondarev A.E. An estimation of point-wise approximation error using the set of numerical solutions // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2022. — Vol. 25, № 4. — P. 343–358.

The present paper is addressed to the estimation of the local (point-wise) approximation error on the ensemble of the numerical solutions obtained using independent algorithms. The variational inverse problem is posed for the approximation error estimation. The considered problem is ill-posed due to invariance of the governing equations to the shift transformations. By this reason, the zero order Tikhonov regularization is applied. The numerical tests for the two-dimensional equations describing the inviscid compressible flow are performed in order to verify the efficiency of considered algorithm. The estimates of approximation errors, obtained by the considered inverse problem, demonstrate the satisfactory accordance with the Richardson extrapolation results at significantly less computational costs.

Keywords: point-wise approximation error, ensemble of numerical solutions, Richardson extrapolation, Inverse problem, Euler equations.

Введение

В данной работе рассмотрены некоторые методы оценки погрешности аппроксимации, возникающей при численном решении системы частных дифференциальных уравнений (ЧДУ). Запишем систему ЧДУ в операторной форме как $A(\tilde{u}) = f$, а аппроксимирующий ее на некоторой сетке оператор как $A_h(u_h)u_h = f_h$. Обозначим численное

решение как $u_h \in R^M$, проекцию точечного решения на ту же сетку как $\tilde{u}_h \in R^M$, погрешность аппроксимации как $\Delta u_h = u_h - \tilde{u}_h$.

Априорная оценка погрешности (получаемая при анализе алгоритма и относящаяся к некоторому обширному классу решений) имеет вид $\|\Delta u_h\| \leq Ch^p$, где h — шаг сетки, p — порядок аппроксимации, C — константа (неизвестная). Эта оценка описывает асимптотику погрешности и представляет интерес при конструировании численных алгоритмов, но в практических применениях используется редко.

Апостериорная (вычисляемая) оценка погрешности имеет вид $\|\Delta u_h\| \leq E(u_h)$, не имеет неизвестных констант и определена на конкретном решении, что сужает ее общность, но делает ее привлекательной для практических приложений. Современные стандарты [1–3] требуют проведения количественной оценки погрешности численного расчета систем уравнений в частных производных для верификации программ и численных решений. Это объясняет особый интерес к методам апостериорной оценки погрешности аппроксимации.

К настоящему моменту разработано достаточно большое количество методов оценки погрешности аппроксимации, подробные обзоры содержатся в работах [4–6].

Наибольшего развития техника апостериорной оценки погрешности достигла в приложениях конечно-элементного анализа к задачам эллиптического типа [6–23]. Успешно используемые подходы (такие как метод Прагера–Синга [7, 8, 12, 13], метод усреднения градиентов [11], методы невязок [14–16], оценки, использующие норму оператора [17, 18]) разработаны достаточно давно, в основном в 50–70 годы прошлого века. Подавляющее большинство современных публикаций относится именно к этой области и посвящены уточнению и проработке тонких технических деталей этих достаточно старых методов, подробный обзор свежих публикаций можно найти в [6]. Основой этого успеха является достаточная гладкость анализируемых решений для уравнений параболического и эллиптического типов. К сожалению, в области решения нелинейных задач с разрывами (уравнений гиперболического или смешанного типа, характерных для задач аэрогазодинамики) использование вышеперечисленных методов сильно ограничено.

Строго говоря, конечно-элементный подход (в варианте разрывного метода Галеркина) может быть использован для расчета течений сжимаемой жидкости, но при этом поведение погрешности соответствует не стандартным конечно-элементным задачам, а задачам аэрогазодинамики [19], что резко ограничивает возможности использования соответствующих методов апостериорной оценки. Например, в работе [20] построен конечно-элементный аналог конечно-разностного алгоритма и проиллюстрированы сложности, возникающие при применении методов апостериорной оценки, используемых в конечно-элементном анализе. Показано, что для нелинейных задач эти методы малоприменимы.

Следует отметить, что алгоритмы, использующие сопряженные уравнения для оценки погрешности ценных функционалов [21–24], применимы в том числе и для расчета течений сжимаемой жидкости, но обеспечивают именно только оценку погрешности ценных функционалов.

В области аэрогазодинамики (уравнения гиперболического и смешанного типов) прогресс в разработке методов апостериорной оценки погрешности выражен заметно меньше, что связано с наличием (и образованием) разрывов в поле течения и нелинейностью. Однако и в этой области имеется набор работоспособных методов, в частности основанных на методе коррекции погрешности [25], на решении уравнения для переноса погрешности [26, 27], на экстраполяции Ричардсона [28–31] или на анализе ансамбля численных решений, полученных алгоритмами различной внутренней структуры, включая разный порядок аппроксимации [32–34]. Однако основные существующие на данный

момент методы обладают каким-либо из существенных недостатков. В частности, уравнения переноса погрешности [26, 27] и методы коррекции погрешности [25] используются для параболических задач с разрывами. Однако они основаны на некоторой линейаризации, базирующейся на малости погрешности. Поэтому их применимость для нелинейных задач с большой погрешностью (типичной для сильных скачков уплотнения) ограничена. К тому же они требуют модификации программного кода (являются интрузивными) [25] или разработки совершенно нового кода [26, 27]. Методы расчета погрешности на ансамбле решений [32–34] по универсальности соответствуют методу Ричардсона, но обеспечивают только глобальные нормы погрешности (не дают оценки погрешности в отдельных узлах сетки).

Таким образом, метод экстраполяции Ричардсона [28–31] является наиболее универсальным из рассмотренных алгоритмов с точки зрения класса решаемых задач. К сожалению, для задач аэрогазодинамики он требует огромных вычислительных ресурсов [30], поскольку требует несколько последовательных сгущений расчетной сетки. Поэтому в качестве вычислительно экономичной альтернативы методу Ричардсона в предлагаемой работе рассмотрен неинтрузивный метод локальной (поточечной) оценки погрешности [35, 36]. К его преимуществам относится то, что он не требует модификации кода и реализуется на одной сетке (что обеспечивает умеренные требования к памяти), к недостаткам относится необходимость использования не менее трех независимых солверов.

Нужно отметить, что локальная погрешность аппроксимации является наиболее универсальным параметром, позволяющим автоматически оценивать как норму погрешности (как правило, используемую при анализе разностных схем), так и погрешность целевых функционалов (используемую в практических приложениях). Данная работа рассматривает возможность неинтрузивной вычислительно эффективной оценки локальной (точечной) погрешности аппроксимации с использованием разности численных решений, полученных различными численными методами. Рассматриваемый метод основан на анализе разностей между решениями в ансамбле полученных численных решений, для чего используется решение обратной задачи с регуляризацией Тихонова. В работе представлен анализ этого метода и его сравнение с обобщенным методом Ричардсона для двумерных невязких течений, содержащих ударные волны и контактные разрывы. С наиболее распространенными методами апостериорной оценки погрешности аппроксимации, используемыми в конечномерном анализе, сравнения не проводилось, поскольку они для этих задач не применимы.

В работах [35, 36] используется набор из четырех и пяти солверов одного порядка аппроксимации (второго) из пакета OpenFoam, в данной работе используется минимальный набор из трех солверов разного порядка аппроксимации, что представляется оптимальным выбором с точки зрения простоты использования.

1. Связь ошибок аппроксимации и разности численных решений, полученных независимыми методами

Мы используем набор численных решений $u_m^{(i)}$, полученных с помощью n различной внутренней структуры, включая разный порядок аппроксимации (здесь $i = 1, \dots, n$). Нам удобно пользоваться некоторой векторизацией решения, где $m = 1, \dots, M$ — мультииндекс, M — число узлов сетки, умноженное на число переменных. Проекция точного решения обозначена как $\tilde{u}_{h,m}$, ошибка аппроксимации как $\Delta u_m^{(i)}$; соответственно, выполняется

$$u_m^{(i)} = \tilde{u}_{h,m} + \Delta u_m^{(i)}. \quad (1)$$

Поэтому разность двух решений содержит некоторую (неполную) информацию о погрешностях:

$$d_{ij,m} = u_m^{(i)} - u_m^{(j)} = \Delta u_m^{(i)} - \Delta u_m^{(j)}. \quad (2)$$

Можно сформировать $N = n(n-1)/2$ разностей решений $d_{ij,m}$. Используя векторизованную форму разностей $f_{l,m}$, получим соответствующее число соотношений

$$D_{lj} \Delta u_m^{(j)} = f_{l,m}, \quad (3)$$

где D_{lj} является прямоугольной матрицей размером $N \times n$ ($l = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n$). Если не указано обратное, то далее по тексту принимается суммирование по повторяющимся индексам. В простейшем случае ($n = 3, N = 3$) система уравнений (3) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u_m^{(1)} \\ \Delta u_m^{(2)} \\ \Delta u_m^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1,m} \\ f_{2,m} \\ f_{3,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_m^{(1)} - u_m^{(2)} \\ u_m^{(1)} - u_m^{(3)} \\ u_m^{(2)} - u_m^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Мы используем простейший случай трех независимых алгоритмов ($n = 3$), увеличение числа используемых алгоритмов может улучшить качество результатов, но только в том случае, если среди добавленных алгоритмов не окажется метода с высокой погрешностью [35]. В связи с этим минимальный набор проверенных алгоритмов разного порядка аппроксимации представляется оптимальным выбором.

Определение $\Delta u_m^{(i)}$ по разностям $\Delta u_m^{(i)} - \Delta u_m^{(j)}$ соответствует упрощенному варианту метода многомерного масштабирования [37], для которого существует ряд вырождений, связанных со сдвигом, вращениями и отражениями. В нашем случае сохраняется только вырождение, связанное со сдвигом: $\Delta u_m^{(j)} = \tilde{\Delta u}_m^{(j)} + b$ для всех $b \in (-\infty, \infty)$. Таким образом, задача поставлена некорректно, соответственно, работоспособная постановка задачи должна включать регуляризацию.

2. Вариационная постановка на ансамбле численных решений

Мы рассмотрим задачу по определению $\Delta u_m^{(j)}$ через набор разностей в вариационной постановке [38] с регуляризацией Тихонова нулевого порядка [39]:

$$\varepsilon_m = 1/2 (D_{lj} \Delta u_m^{(j)} - f_{l,m}) (D_{lk} \Delta u_m^{(k)} - f_{l,m}) + \gamma/2 (\Delta u_m^{(j)} \Delta u_m^{(j)}). \quad (5)$$

Здесь $l = 1, \dots, N$, $j, k = 1, \dots, n$, α — параметр регуляризации, m — индекс элемента векторизованного решения (по этому индексу нет суммирования). Решение

$$\Delta u_m^{(j)} = \arg \min_{\Delta u_m^{(j)}} (\varepsilon_m) \quad (6)$$

определяется с помощью градиентного спуска:

$$\Delta u_m^{(j),t+1} = \Delta u_m^{(j),t} - \tau \nabla \varepsilon_m, \quad (7)$$

где t — номер итерации, τ — шаг итерации.

Для оценки градиента можно использовать выражение

$$\nabla \varepsilon_{m,j} = D_{lj} (D_{lk} \Delta u_m^{(k)} - f_{l,m}) + \gamma \Delta u_m^{(j)}. \quad (8)$$

Как уже упоминалось, для данной задачи характерно вырождение, связанное с преобразованием сдвига. Причина использования именно регуляризации Тихонова нулевого порядка связана с желанием получить решение с минимальным модулем средней ошибки сдвига $|b|$. Поэтому мы ищем решение с минимальной средней по ансамблю нормой $\|\Delta u_m\|_{L_2}$, обозначив ее квадрат как $\delta(b_m) = \sum_{j=1}^n (\Delta u_m^{(j)})^2 / (2n)$. Соответственно,

$$\min_{b_m} (\delta(b_m)) = \min_{b_m} \sum_{j=1}^n (\Delta u_m^{(j)})^2 / (2n) = \min_{b_m} \sum_{j=1}^n (\Delta \tilde{u}_m^{(j)} + b_m)^2 / (2n). \quad (9)$$

Из минимальности (9) следуют ограничения на величину $|b_m|$. Приращение

$$\Delta \delta(b_m) = \sum_{j=1}^n (\Delta \tilde{u}_m^{(j)} + b_m) \Delta b_m \quad (10)$$

показывает, что минимум (9) по b_m реализуется при

$$b_m^* = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Delta \tilde{u}_m^{(j)} = -\Delta \bar{u}_m. \quad (11)$$

Таким образом, на минимуме выражения (9) неустранимая ошибка сдвига b_m^* ограничена и равна средней погрешности аппроксимации на используемом ансамбле решений. Соответственно,

$$\Delta u_m^{(j)} = \Delta \tilde{u}_m^{(j)} + b_m^* = \Delta \tilde{u}_m^{(j)} - \Delta \bar{u}_m. \quad (12)$$

С учетом (11) выражение (9) можно интерпретировать как минимум дисперсии точной ошибки на ансамбле решений.

Минимум (9) реализуется при ошибке сдвига b_m^* , равной средней ошибке аппроксимации. Поэтому оценка $\Delta u_m^{(j)}$ содержит неизвестную неустранимую погрешность. Однако выполнение предположения о минимальности $\delta(b_m)$ обеспечивает ограниченность этой погрешности b_m^* . Величина b_m^* является средней истинной погрешностью на ансамбле решений (11), вследствие чего не может быть слишком велика и может уменьшаться при увеличении числа решений в ансамбле.

3. Метод Ричардсона для решений с разрывами

Как уже отмечалось, самым универсальным методом оценки погрешности аппроксимации (а также рекомендуемым рядом стандартов [2, 3]) является метод Ричардсона [28–31]. Поэтому мы проведем сравнение качества работы рассматриваемого нами метода именно с ним.

В классическом варианте метод Ричардсона использует решения на двух сетках (с шагами h_1 и h_2), записанные в форме

$$\begin{aligned} u_m^{(1)} &= \tilde{u}_m + C_m h_1^\alpha, \\ u_m^{(2)} &= \tilde{u}_m + C_m h_2^\alpha. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь m — номер расчетной точки, $\tilde{u}_m$ — проекция истинного решения на грубую сетку, α — априори известный порядок сходимости. Предполагается, что численные решения $u_m^{(1)}$, $u_m^{(2)}$ принадлежат асимптотическому диапазону сходимости, т.е. C_m не зависит от h , а члены высшего порядка пренебрежимо малы.

Система уравнений (13) решается для неизвестных $\tilde{u}_m$, C_m , что дает как точное решение, так и оценку погрешности аппроксимации $\Delta u_m^{(1)} \approx C_m h_1^\alpha$. С учетом $C_m = (u_m^{(2)} - u_m^{(1)}) / (h_2^\alpha - h_1^\alpha)$ имеем

$$\Delta u_m^{(1)} \approx C_m h_1^\alpha = (u_m^{(2)} - u_m^{(1)}) h_1^\alpha / (h_2^\alpha - h_1^\alpha) = (u_m^{(2)} - u_m^{(1)}) \frac{1}{(1/2)^\alpha - 1}. \quad (14)$$

Таким образом, оценка $\Delta u_m^{(1)} \approx C_m h_1^\alpha$ устойчива при $\alpha \rightarrow \infty$ и неустойчива при $\alpha \rightarrow 0$. Последнее обстоятельство может быть критично для ряда задач, где порядок сходимости мал (см., например, [40]).

Проверка принадлежности решения к асимптотическому диапазону требует как минимум еще одного уровня мельчения сетки (в некоторых случаях требуется до 7 уровней [30]), что крайне отрицательно сказывается на экономичности алгоритма. К достоинствам алгоритма относится то, что он не требует модификации кода программы (является неинтрузивным) и осуществляется в режиме постпроцессора.

Метод Рундсона достаточно успешно применяется для параболических и эллиптических уравнений, как правило имеющих достаточно гладкие регулярные решения (хотя и там возможны исключения [40]).

Для гиперболических уравнений достаточно часто порядок сходимости локален и должен определяться для каждого узла сетки отдельно. В задачах аэрогазодинамики он падает в окрестностях разрывов (скачков уплотнения, контактных линий) до величин, принадлежащих интервалу $\alpha_m \in [0.5, 1.0]$ (см. [41–43]). В связи с этим локальные значения порядка сходимости α_m в рамках метода Рундсона должны быть рассчитаны с использованием дополнительных сеток. Для этого можно составить систему уравнений:

$$\begin{aligned} u_m^{(1)} &= \tilde{u}_m + C_m h_1^{\alpha_m}, \\ u_m^{(2)} &= \tilde{u}_m + C_m h_2^{\alpha_m}, \\ u_m^{(3)} &= \tilde{u}_m + C_m h_3^{\alpha_m}. \end{aligned} \quad (15)$$

Эта система (обобщенный метод Рундсона [30]) может быть разрешена относительно $\tilde{u}_m$, C_m , α_m несколькими способами [31]. Для проверки того, что решение находится в асимптотическом диапазоне, потребуется одно или несколько дополнительных уровней сгущения сетки, что делает этот подход еще более затратным. Более того, расчет α_m делает задачу неустойчивой [31]. Это связано со следующими обстоятельствами. Учитывая $C_m = (u_m^{(2)} - u_m^{(1)}) / (h_2^{\alpha_m} - h_1^{\alpha_m})$ и $C_m = (u_m^{(3)} - u_m^{(2)}) / (h_3^{\alpha_m} - h_2^{\alpha_m})$, получим уравнение, которое надо решить:

$$(u_k^{(3)} - u_k^{(2)}) (h_3^{\alpha_k} - h_2^{\alpha_k}) - (u_k^{(2)} - u_k^{(1)}) (h_2^{\alpha_k} - h_1^{\alpha_k}) = 0 \quad (16)$$

или

$$\frac{u_m^{(2)} - u_m^{(1)}}{u_m^{(3)} - u_m^{(2)}} = \frac{h_3^{\alpha_m} - h_2^{\alpha_m}}{h_2^{\alpha_m} - h_1^{\alpha_m}}.$$

Для $h_2 = h/2$, $h_3 = h/4$ оно принимает вид (см. рисунок 1):

$$\varphi(\alpha_m) = \frac{u_m^{(2)} - u_m^{(1)}}{u_m^{(3)} - u_m^{(2)}} = \frac{(1/4)^{\alpha_m} - (1/2)^{\alpha_m}}{(1/2)^{\alpha_m} - 1} = (1/2)^{\alpha_m} \frac{(1/2)^{\alpha_m} - 1}{(1/2)^{\alpha_m} - 1} = (1/2)^{\alpha_m}.$$

Соответственно, решение

$$\alpha_m = \ln \left(\frac{u_m^{(2)} - u_m^{(1)}}{u_m^{(3)} - u_m^{(2)}} \right) / \ln(1/2). \quad (17)$$

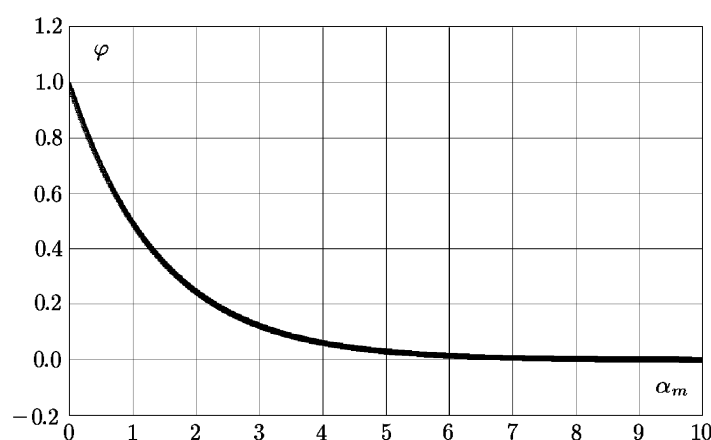


Рис. 1. Чувствительность оценки порядка сходимости

Легко видеть из рис. 1, что малые вариации $\frac{u_m^{(2)} - u_m^{(1)}}{u_m^{(3)} - u_m^{(2)}}$ при больших α_m соответствуют большим вариациям α_m , что приводит к усилению шумов, содержащихся в анализируемых данных, и неустойчивости решения для больших α_m .

На первый взгляд большие значения α_m не очень актуальны для наиболее распространенных в настоящее время схем (типичный порядок аппроксимации — второй), тем более с учетом понижения порядка сходимости на разрывах решения. Однако в зонах гладкого или постоянного решения превышение порядка сходимости над номинальным порядком аппроксимации возможно, так как ведущие члены в погрешности усечения могут быть равны нулю. Поэтому даже для схем умеренного порядка аппроксимации возможно существование зон в решении, где оценка порядка сходимости и погрешности аппроксимации неустойчивы.

Несмотря на все трудности, метод Ричардсона остается одним из самых мощных средств оценки погрешности расчета. Поэтому в данной работе представлено сравнение погрешностей аппроксимации, полученных с помощью обобщенного метода Ричардсона и обратной задачи.

4. Тестовые задачи

В качестве иллюстрации представлены результаты оценки погрешности расчета для течений, соответствующих взаимодействию ударных волн VI типа по классификации

Edney [44]. Проекции аналитических решений, существующих для этих задач, на расчетную сетку рассматриваются как точные решения, сравнение с которыми позволяет оценить погрешность расчета.

Течение описывается двумерными уравнениями Эйлера:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u h_0)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v h_0)}{\partial y} = 0. \quad (21)$$

Здесь $h_0 = \frac{u^2 + v^2}{2} + h$, $h = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} = \kappa e$, $e = \frac{RT}{\kappa - 1}$, $E = \left(e + \frac{u^2 + v^2}{2} \right)$, $p = \rho RT$, $\kappa = \frac{C_p}{C_v} = 1.4$.

5. Критерии точности оценок погрешности

Качество апостериорной оценки можно оценить с использованием индекса эффективности (первое известное авторам упоминание этого индекса содержится в работе [45]), сравнивающего глобальные (по всем узлам сетки) нормы погрешности расчета:

$$I_{\text{eff}}^{(j)} = \frac{\|\Delta u^{(j)}\|_{L_2}}{\|\Delta \tilde{u}^{(j)}\|_{L_2}}. \quad (22)$$

Для надежной оценки погрешности должно выполняться соотношение $I_{\text{eff}}^{(j)} \geq 1$, в то же время индекс не должен быть слишком велик: в конечно-элементных приложениях $1 \leq I_{\text{eff}}^{(j)} \leq 3$ (см. [9]).

Для рассматриваемой задачи этот индекс может быть записан как

$$I_{\text{eff}}^{(j)} = \frac{\|\Delta \tilde{u}^{(j)} - \Delta \bar{u}\|_{L_2}}{\|\Delta \tilde{u}^{(j)}\|_{L_2}}. \quad (23)$$

На одном и том же ансамбле расчетов в зависимости от соотношения $\Delta \tilde{u}^{(j)}$ и $\Delta \bar{u}$ индекс эффективности может принимать значения из диапазона

$$1 - \frac{\|\Delta \bar{u}\|_{L_2}}{\|\Delta \tilde{u}^{(j)}\|_{L_2}} \leq I_{\text{eff}}^{(j)} \leq 1 + \frac{\|\Delta \bar{u}\|_{L_2}}{\|\Delta \tilde{u}^{(j)}\|_{L_2}}.$$

Таким образом, возможна как недооценка $I_{\text{eff}}^{(j)} < 1$, так и переоценка погрешности $I_{\text{eff}}^{(j)} > 1$ в зависимости от структуры ансамбля ошибок. Если ошибки имеют один знак и их разброс по значениям меньше средней ошибки, погрешность будет недооценена для всех элементов ансамбля. Этот случай кажется наиболее вероятным для оценки погрешности в окрестности разрыва для монотонных схем. Индекс эффективности показывает, что если знаки ошибок различны, то на одном и том же ансамбле одни оценки погрешности

будут больше истинного значения погрешности (надежны), другие — меньше истинного значения (ненадежны). Особенное ухудшение результатов получаются для тех решений, где $\Delta \tilde{u}^{(j)} \approx \Delta \tilde{u}$. Наилучший же ансамбль решений соответствует случаю стремления к нулю средней по ансамблю погрешности $b = -\Delta \tilde{u} \rightarrow 0$ при увеличении числа элементов ансамбля решений. К сожалению, для задач аэрогазодинамики этот случай труднодостижим, так как ошибка монотонных методов скоррелирована в окрестности разрывов (имеет волнообразную форму с отрицательной и положительной полуволнами).

Относительная точность оценки погрешности

$$I_{\text{rel}}^{(j)} = \frac{\|\Delta u^{(j)} - \Delta \tilde{u}^{(j)}\|_{L_2}}{\|\Delta \tilde{u}^{(j)}\|_{L_2}} \quad (24)$$

может использоваться как другой индикатор качества оценки.

Эти два критерия связаны соотношением $I_{\text{rel}}^{(j)} \leq 1 + I_{\text{eff}}^{(j)}$ вследствие неравенства треугольника.

6. Результаты расчетов

В работе анализировался ансамбль из трех численных алгоритмов, состоящий из схемы первого порядка аппроксимации Куранта–Изаксона–Риза (в варианте [46]), второго порядка из [47] и третьего порядка из [48]. Сетка однородная, содержит четыре уровня мельчения (100×100 , 200×200 , 400×400 , 800×800 узлов). Поскольку на наборах узлов (100×100 , 200×200 , 400×400) и (200×200 , 400×400 , 800×800) результаты аппроксимации Ричардсона отличались слабо (норма решения и осцилляции не совпадали), мы считаем, что набор решений находится в асимптотическом диапазоне. Тестирование проводилось для течения типа Edney-VI ($M = 4$, последовательные углы отклонения потока $\Theta_1 = 10^\circ$, $\Theta_2 = 15^\circ$).

На рис. 2 представлено распределение плотности для расчета, выполненного с помощью метода из [47].

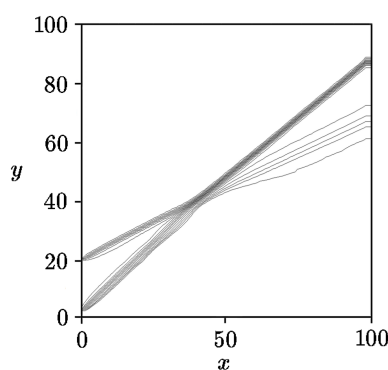


Рис. 2. Поле плотности; Edney-VI

В расчетах использовалось значение коэффициента регуляризации $\gamma = 10^{-3}$, так как отдельные расчеты показали, что в диапазоне $\gamma \in (10^{-6}, 10^{-1})$ результат слабо зависит от коэффициента регуляризации. На рис. 3 и 4 представлена истинная погрешность — оценка погрешности с помощью решения обратной задачи и с помощью метода Ричардсона для начальной части течения (до слияния скачков) и для финальной (после слияния скачков).

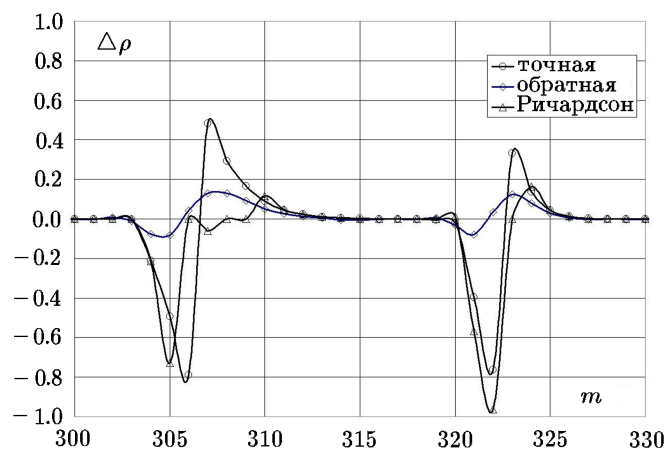


Рис. 3. Сравнение погрешности плотности, оцененной с помощью обратной задачи и метода Ричардсона с точной ошибкой; зона до слияния скачков

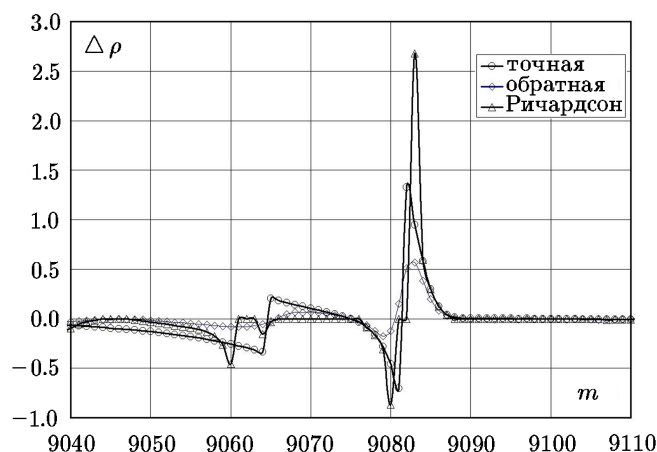


Рис. 4. Сравнение погрешности плотности, оцененной с помощью обратной задачи и метода Ричардсона с точной ошибкой; зона после слияния скачков

Для достаточно слабых скачков (до их слияния) качество оценки ошибки методом Ричардсона лучше, чем с помощью решения обратной задачи. После слияния (на сильном скачке) качества в целом сравнимы. Решение, полученное с помощью обратной задачи, заметно глаже, чем истинная ошибка. Метод Ричардсона дает менее гладкие результаты в сравнении с истинной погрешностью.

Анализ таблиц 1 и 2 показывает следующее. С точки зрения относительной точности оценки погрешности (24) оценка по Ричардсону и оценка с помощью обратной задачи практически эквивалентны. С точки зрения индекса эффективности (22) оценки погрешности с помощью обратной задачи демонстрируют недооценку значений нормы погрешности и, таким образом, уступают оценкам погрешности по Ричардсону с точки зрения надежности. С точки зрения относительной точности погрешности (24) разница между двумя этими подходами не велика. В то же время, для данного набора сеток используемая в методе обратной задачи память в 64 раза меньше максимальной памяти, используемой методом Ричардсона (с учетом проверки принадлежности решения к асимптотическому диапазону). Таким образом, оценка погрешности по разности реше-

ний несколько уступает методу Ричардсона с точки зрения надежности результатов, но зато заметно превосходит с точки зрения экономии вычислительных ресурсов.

Таблица 1. Индекс эффективности (22)

Метод	$I_{\text{eff}}^{(1)}$	$I_{\text{eff}}^{(2)}$	$I_{\text{eff}}^{(3)}$
Обратная задача	0.61	0.35	0.42
Ричардсон	0.51	1.05	0.95

Таблица 2. Относительная точность оценки погрешности (24)

Метод	$I_{\text{rel}}^{(1)}$	$I_{\text{rel}}^{(2)}$	$I_{\text{rel}}^{(3)}$
Обратная задача	0.69	1.16	1.07
Ричардсон	1.21	0.96	0.99

7. Обсуждение

С формальной точки зрения рассматриваемый метод менее точен в сравнении с экстраполяцией Ричардсона, так как содержит неустранимую ошибку. Однако для обобщенного метода Ричардсона, пригодного для анализа течений с разрывами, характерно наличие осцилляций, вызываемых слабой чувствительностью при определении больших значений порядка сходимости. В результате практические результаты, полученные решением методом Ричардсона и с помощью обратной задачи, отличаются незначительно. Это показано в данной работе и в работе [36], где представлено сравнение для косоугольного скачка уплотнения, рассчитанного с помощью четырех алгоритмов открытого программного комплекса OpenFOAM [49].

Никаких предположений, типичных для вычислительной аэрогазодинамики, здесь не сделано, поэтому этот метод потенциально применим к решению любых систем уравнений в частных производных.

8. Заключение

Набор численных решений, полученных различными численными методами, обладает информацией относительно точечной (локальной) погрешности аппроксимации. Эту информацию можно извлечь с помощью решения обратной задачи с использованием разности решений и тихоновской регуляризации нулевого порядка. Полученная таким образом оценка погрешности содержит неустранимую ошибку, равную средней погрешности по всему ансамблю решений. Описываемый алгоритм реализуется на одной сетке в режиме постпроцессора (неинтрузивно), что обеспечивает его предельную простоту и вычислительную экономичность.

Численные эксперименты, проведенные для двумерных уравнений Эйлера сжимаемой жидкости, показали, что точность полученной оценки сравнима с точностью ошибки, получаемой обобщенным методом Ричардсона, при существенно меньших требованиях к вычислительным ресурсам.

Литература

1. ГОСТ Р 57700.12-2018. Численное моделирование сверхзвуковых течений невязкого газа. Верификация ПО / Национальный стандарт РФ по численному моделированию физических процессов. — 2018.
2. AIAA-G-077-1998. Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations. — Reston, VA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998.
3. ASME V&V 20-2009. Standard for Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer. — ASME, 2009.
4. **Skeel R.D.** Thirteen ways to estimate global error // Numer. Math. — 1986. — Vol. 48. — P. 1–20. — DOI: 10.1007/BF01389440.
5. **Roy Ch.J.** Review of discretization error estimators in scientific computing // AIAA J. — 2010. — Vol. 126. — P. 1–29.
6. **Chamoin L., Legoll F.** A pedagogical review on a posteriori error estimation in Finite Element computations. — 2021. — URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.02160>.
7. **Synge J.L.** The Hypercircle in Mathematical Physics. — London: CUP, 1957.
8. **Prager W., Synge J.L.** Approximation in elasticity based on the concept of function spaces // Quart. Appl. Math. — 1947. — Vol. 5. — P. 241–269.
9. **Repin S.I.** A Posteriori Estimates for Partial Differential Equations. — Walter de Gruyter, 2008. — (Radon Series on Computational and Applied Mathematics; Vol. 4). — URL: <https://doi.org/10.1515/9783110203042>.
10. **Ainsworth M., Oden J.T.** A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis. — NY: Wiley, 2000.
11. **Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.** A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis // Intern. J. for Numerical Methods in Engineering. — 1987. — Vol. 24. — P. 337–357.
12. **Bertrand B., Boffi D.** The Prager-Synge theorem in reconstruction based a posteriori error estimation // Numer. Math. — 2019. — (arXiv:1907.00440v1).
13. **Zhiqiang Cai, Cuiyu He, Shun Zhang** Generalized Prager-Synge inequality and equilibrated error estimators for discontinuous elements // Numer. Math. — 2020. — (arXiv:2001.09102v1).
14. **Babuska I., Rheinboldt W.C.** Error estimates for adaptive finite element computations // SIAM J. on Numerical Analysis. — 1978. — Vol. 15. — P. 736–754.
15. **Johnson C., Hansbo P.** Adaptive finite element methods in computational mechanics // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1992. — Vol. 101, iss. 1–3. — P. 143–181.
16. **Braess D., Schoberl J.** Equilibrated residuae error estimator for edge elements // Mathematics of Computation. — 2008. — Vol. 77, № 262. — P. 651–672.
17. **Anjam I., Pauly D.** An elementary method of deriving a posteriori error equalities and estimates for linear partial differential equations // Comput. Methods Appl. Math. — 2019. — Vol. 19. — P. 311–322.
18. **Репин С.И., Фролов М.Е.** Об апостериорных оценках точности приближенных решений краевых задач для уравнений эллиптического типа // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2002. — Т. 42, № 12. — С. 1774–1787.
19. **Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф.** Исследование точности разрывного метода Галеркина при расчете решений с ударными волнами. — 2018. — (Препринт / ИПМ им. М.В. Келдыша; 195).
20. **Collins J.B., Estep D., Tavenara S.** Aposteriori error estimation for the Lax–Wendroff finite difference scheme // J. Comp. Appl. Math. — 2014. — Vol. 263. — P. 299–311.

21. **Cao T., Kelly D.W.** Pointwise and local error estimates for the quantities of interest in two-dimensional elasticity // *Computers and Mathematics with Applications*. — 2003. — Vol. 46, № 1. — P. 69–79.
22. **Ainsworth M., Rankin R.** Guaranteed computable bounds on quantities of interest in finite element computations // *Intern. J. for Numerical Methods in Engineering*. — 2012. — Vol. 89, № 13. — P. 1605–1634.
23. **Gratsch T., Bathe K.-J.** A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis // *Computers and Structures*. — 2005. — Vol. 83. — P. 235–265.
24. **Venditti D.A., Darmofal D.L.** Adjoint error estimation and grid adaptation for functional outputs: application to quasi-one-dimensional flow // *J. of Computational Physics*. — 2000. — Vol. 164. — P. 204–227.
25. **Linss T., Kopteva N.** A posteriori error estimation for a defect-correction method applied to convection-diffusion problems // *Intern. J. of Numerical Analysis and Modeling*. — 2009. — Vol. 1, № 1. — P. 1–16.
26. **Tyson W.C., Roy Ch.J., Olliver-Gooch C.F.** A novel reconstruction technique for finite-volume truncation error estimation // *Proc. AIAA Scitech 2019 Forum*. — Corpus ID: 126737409. — DOI: 10.2514/6.2019-2174.
27. **Banks J.W., Hittinger J.A.F., Connors J.M., Woodward C.S.** A posteriori error estimation via nonlinear error transport with application to shallow water // *Recent. Adv. Sci. Comput. Appl. — Contemporary Mathematics*, 2013. — Vol. 586. — P. 35–42.
28. **Марчук Г.И., Шайдуров В.В.** Повышение точности решения разностных схем. — М.: Наука, 1979.
29. **Banks J.W., Aslam T.D.** Richardson extrapolation for linearly degenerate discontinuities // *J. of Scientific Computing*. — 2012. — Vol. 57, № 1. — P. 1–15.
30. **Roy Ch.J.** Grid convergence error analysis for mixed-order numerical schemes // *AIAA J.* — 2003. — Vol. 41, № 4. — P. 595–604.
31. **Alexeev A.K., Bondarev A.E.** On some features of Richardson extrapolation for compressible inviscid flows // *Mathematica Montisnigri*. — 2017. — Vol. XL. — P. 42–54.
32. **Alexeev A.K., Bondarev A.E.** On exact solution enclosure on ensemble of numerical simulations // *Mathematica Montisnigri*. — 2017. — Vol. XXXVIII. — P. 63–77.
33. **Alekseev A.K., Bondarev A.E., Kuvshinnikov A.E.** On uncertainty quantification via the ensemble of independent numerical solutions // *J. of Computational Science*. — 2020. — Vol. 42. — Article № 101114. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.jocs.2020.101114>.
34. **Алексеев А.К., Бондарев А.Е.** Об апостериорной оценке нормы погрешности численного расчета на ансамбле независимых решений // *Сиб. журн. вычисл. математики. / РАН. Сиб. отд-ние*. — Новосибирск, 2020. — Т. 23, № 3. — С. 233–246.
35. **Alekseev A.K., Bondarev A.E., Kuvshinnikov A.E.** A posteriori error estimation via differences of numerical solutions / V.V. Krzhizhanovskaya et al. // *Proc. ICCS 2020*. — Springer Nature, 2020. — P. 508–519. — (Lect. Notes in Comp. Sci.; 12143). — DOI: 10.1007/978-3-030-50436-6_37.
36. **Alekseev A.K., Bondarev A.E., Kuvshinnikov A.E.** A comparison of the Richardson extrapolation and the approximation error estimation on the ensemble of numerical solutions / M. Paszynski et al. // *Proc. Computational Science – ICCS 2021*. — Springer, 2021. — P. 554–566. — (Lect. Notes in Comp. Sci.; 12747) — DOI: 10.1007/978-3-030-77980-1_42.
37. **Torgerson W.S.** Multidimensional scaling: theory and method // *Psychometrika*. — 1952. — Vol. 17. — P. 401–419.
38. **Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.** Экстремальные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1988.
39. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.

40. **Babuska I., Osborn J.** Can a finite element method perform arbitrarily badly? // *Math. Comp.* — 2000. — Vol. 69, № 230. — P. 443–462.
41. **Кузнецов Н.Н.** Точность некоторых приближенных методов расчета слабых решений квазилинейного уравнения первого порядка // *Журн. вычисл. матем. и мат. физики.* — 1976. — Т. 16, № 6. — С. 1489–1502.
42. **Carpenter M.H., Casper J.H.** Accuracy of shock capturing in two spatial dimensions // *AIAA J.* — 1999. — Vol. 37, № 9. — P. 1072–1079.
43. **Banks J.W., Aslam T., Rider W.J.** On sub-linear convergence for linearly degenerate waves in capturing schemes // *J. Comput. Phys.* — 2008. — Vol. 227. — P. 6985–7002.
44. **Edney B.** Effects of shock impingement on the heat transfer around blunt bodies // *AIAA J.* — 1968. — Vol. 6, № 1. — P. 15–21.
45. **Babuska I., Duran R., Rodriguez R.** Analysis of the efficiency of an a posteriori error estimator for linear triangular finite elements // *SIAM J. on Numer. Anal.* — 1992. — Vol. 29, № 4. — P. 947–964.
46. **Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.** Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2001.
47. **Sun M., Katayama K.** An artificially upstream flux vector splitting for the Euler equations // *J. Comput. Phys.* — 2003. — Vol. 189. — P. 305–329.
48. **Osher S., Chakravarthy S.** Very high order accurate TVD schemes // *Oscillation Theory, Computation, and Methods of Compensated Compactness.* — 1984. — P. 229–274. — (The IMA Volumes in Mathematics and its Applications; 2). — DOI:10.1007/978-1-4613-8689-6_9.
49. OpenFOAM. — URL: <http://www.openfoam.org>.

Поступила в редакцию 19 декабря 2021 г.

После исправления 10 мая 2022 г.

Принята к печати 18 июля 2022 г.

Литература в транслитерации

1. GOST R 57700.12-2018. Chislennoe modelirovanie sverkhzvukovyh techenii nevyazkogo gaza. Verifikatsiya PO / Natsional'nyi standart RF po chislennomu modelirovaniyu fizicheskikh protsessov. — 2018.
2. AIAA-G-077-1998. Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations. — Reston, VA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998.
3. ASME V&V 20-2009. Standard for Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer. — ASME, 2009.
4. **Skeel R.D.** Thirteen ways to estimate global error // *Numer. Math.* — 1986. — Vol. 48. — P. 1–20. — DOI: 10.1007/BF01389440.
5. **Roy Ch.J.** Review of discretization error estimators in scientific computing // *AIAA J.* — 2010. — Vol. 126. — P. 1–29.
6. **Chamoin L., Legoll F.** A pedagogical review on a posteriori error estimation in Finite Element computations. — 2021. — URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.02160>.
7. **Synge J.L.** The Hypercircle in Mathematical Physics. — London: CUP, 1957.
8. **Prager W., Synge J.L.** Approximation in elasticity based on the concept of function spaces // *Quart. Appl. Math.* — 1947. — Vol. 5. — P. 241–269.
9. **Repin S.I.** A Posteriori Estimates for Partial Differential Equations. — Walter de Gruyter, 2008. — (Radon Series on Computational and Applied Mathematics; Vol. 4). — URL: <https://doi.org/10.1515/9783110203042>.

10. **Ainsworth M., Oden J.T.** A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis. — NY: Wiley, 2000.
11. **Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.** A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis // *Inter. J. for Numerical Methods in Engineering*. — 1987. — Vol. 24. — P. 337–357.
12. **Bertrand B., Boffi D.** The Prager-Synge theorem in reconstruction based a posteriori error estimation // *Numer. Math.* — 2019. — (arXiv:1907.00440v1).
13. **Zhiqiang Cai, Cuiyu He, Shun Zhang** Generalized Prager-Synge inequality and equilibrated error estimators for discontinuous elements // *Numer. Math.* — 2020. — (arXiv:2001.09102v1).
14. **Babuska I., Rheinboldt W.C.** Error estimates for adaptive finite element computations // *SIAM J. on Numerical Analysis*. — 1978. — Vol. 15. — P. 736–754.
15. **Johnson C., Hansbo P.** Adaptive finite element methods in computational mechanics // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 1992. — Vol. 101, iss. 1–3. — P. 143–181.
16. **Braess D., Schoberl J.** Equilibrated residue error estimator for edge elements // *Mathematics of Computation*. — 2008. — Vol. 77, № 262. — P. 651–672.
17. **Anjam I., Pauly D.** An elementary method of deriving a posteriori error equalities and estimates for linear partial differential equations // *Comput. Methods Appl. Math.* — 2019. — Vol. 19. — P. 311–322.
18. **Repin S.I., Frolov M.E.** Ob aposteriornykh otsenках tochnosti priblizhennykh reshenii kraevykh zadach dlya uravnenii ellipticheskogo tipa // *Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki*. — 2002. — T. 42, № 12. — S. 1774–1787.
19. **Ladonkina M.E., Neklyudova O.A., Ostapenko V.V., Tishkin V.F.** Issledovanie tochnosti razryvnogo metoda Galerkina pri raschete reshenii s udarnymi volnami. — 2018. — (Preprinty / IPM im. M.V. Keldysha; 195).
20. **Collins J.B., Estep D., Tavenner S.** Aposteriori error estimation for the Lax–Wendroff finite difference scheme // *J. Comp. Appl. Math.* — 2014. — Vol. 263. — P. 299–311.
21. **Cao T., Kelly D.W.** Pointwise and local error estimates for the quantities of interest in two-dimensional elasticity // *Computers and Mathematics with Applications*. — 2003. — Vol. 46, № 1. — P. 69–79.
22. **Ainsworth M., Rankin R.** Guaranteed computable bounds on quantities of interest in finite element computations // *Inter. J. for Numerical Methods in Engineering*. — 2012. — Vol. 89, № 13. — P. 1605–1634.
23. **Gratsch T., Bathe K.-J.** A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis // *Computers and Structures*. — 2005. — Vol. 83. — P. 235–265.
24. **Venditti D.A., Darmofal D.L.** Adjoint error estimation and grid adaptation for functional outputs: application to quasi-one-dimensional flow // *J. of Computational Physics*. — 2000. — Vol. 164. — P. 204–227.
25. **Linss T., Kopteva N.** A posteriori error estimation for a defect-correction method applied to convection-diffusion problems // *Inter. J. of Numerical Analysis and Modeling*. — 2009. — Vol. 1, № 1. — P. 1–16.
26. **Tyson W.C., Roy Ch.J., Olliver-Gooch C.F.** A novel reconstruction technique for finite-volume truncation error estimation // *Proc. AIAA Scitech 2019 Forum*. — Corpus ID: 126737409. — DOI: 10.2514/6.2019-2174.
27. **Banks J.W., Hittinger J.A.F., Connors J.M., Woodward C.S.** A posteriori error estimation via nonlinear error transport with application to shallow water // *Recent. Adv. Sci. Comput. Appl. — Contemporary Mathematics*, 2013. — Vol. 586. — P. 35–42.
28. **Marchuk G.I., Shaidurov V.V.** Povyshenie tochnosti resheniya raznostnykh skhem. — M.: Nauka, 1979.

29. **Banks J.W., Aslam T.D.** Richardson extrapolation for linearly degenerate discontinuities // J. of Scientific Computing. — 2012. — Vol. 57, № 1. — P. 1–15.
30. **Roy Ch.J.** Grid convergence error analysis for mixed-order numerical schemes // AIAA J. — 2003. — Vol. 41, № 4. — P. 595–604.
31. **Alexeev A.K., Bondarev A.E.** On some features of Richardson extrapolation for compressible inviscid flows // *Mathematica Montisnigri*. — 2017. — Vol. XL. — P. 42–54.
32. **Alexeev A.K., Bondarev A.E.** On exact solution enclosure on ensemble of numerical simulations // *Mathematica Montisnigri*. — 2017. — Vol. XXXVIII. — P. 63–77.
33. **Alekseev A.K., Bondarev A.E., Kuvshinnikov A.E.** On uncertainty quantification via the ensemble of independent numerical solutions // J. of Computational Science. — 2020. — Vol. 42. — Article № 101114. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.jocs.2020.101114>.
34. **Alekseev A.K., Bondarev A.E.** Ob aposteriornoi otsenke normy pogreshnosti chislennogo rascheta na ansamble nezavisimyyh reshenii // *Sib. zhurn. vychisl. matematiki. / RAN. Sib. otd-nie*. — Novosibirsk, 2020. — T. 23, № 3. — S. 233–246.
35. **Alekseev A.K., Bondarev A.E., Kuvshinnikov A.E.** A posteriori error estimation via differences of numerical solutions / V.V. Krzhizhanovskaya et al. // *Proc. ICCS 2020*. — Springer Nature, 2020. — P. 508–519. — (Lect. Notes in Comp. Sci.; 12143). — DOI: 10.1007/978-3-030-50436-6_37.
36. **Alekseev A.K., Bondarev A.E., Kuvshinnikov A.E.** A comparison of the Richardson extrapolation and the approximation error estimation on the ensemble of numerical solutions / M. Paszynski et al. // *Proc. Computational Science – ICCS 2021*. — Springer, 2021. — P. 554–566. — (Lect. Notes in Comp. Sci.; 12747) — DOI: 10.1007/978-3-030-77980-1_42.
37. **Torgerson W.S.** Multidimensional scaling: theory and method // *Psychometrika*. — 1952. — Vol. 17. — P. 401–419.
38. **Alifanov O.M., Artyuhin E.A., Rummyantsev S.V.** *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnyyh zadach*. — M.: Nauka, 1988.
39. **Tihonov A.N., Arsenin V.Ya.** *Metody resheniya nekorrektnyyh zadach*. — M.: Nauka, 1979.
40. **Babuska I., Osborn J.** Can a finite element method perform arbitrarily badly? // *Math. Comp.* — 2000. — Vol. 69, № 230. — P. 443–462.
41. **Kuznetsov N.N.** Tochnost' nekotorykh priblizhennykh metodov rascheta slabyyh reshenii kvazilineinogo uravneniya pervogo poryadka // *Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki*. — 1976. — T. 16, № 6. — S. 1489–1502.
42. **Carpenter M.H., Casper J.H.** Accuracy of shock capturing in two spatial dimensions // *AIAA J.* — 1999. — Vol. 37, № 9. — P. 1072–1079.
43. **Banks J.W., Aslam T., Rider W.J.** On sub-linear convergence for linearly degenerate waves in capturing schemes // *J. Comput. Phys.* — 2008. — Vol. 227. — P. 6985–7002.
44. **Edney B.** Effects of shock impingement on the heat transfer around blunt bodies // *AIAA J.* — 1968. — Vol. 6, № 1. — P. 15–21.
45. **Babuska I., Duran R., Rodriguez R.** Analysis of the efficiency of an a posteriori error estimator for linear triangular finite elements // *SIAM J. on Numer. Anal.* — 1992. — Vol. 29, № 4. — P. 947–964.
46. **Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu.** *Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravnenii*. — M.: Fizmatlit, 2001.
47. **Sun M., Katayama K.** An artificially upstream flux vector splitting for the Euler equations // *J. Comput. Phys.* — 2003. — Vol. 189. — P. 305–329.
48. **Osher S., Chakravarthy S.** Very high order accurate TVD schemes // *Oscillation Theory, Computation, and Methods of Compensated Compactness*. — 1984. — P. 229–274. — (The IMA Volumes in Mathematics and its Applications; 2). — DOI:10.1007/978-1-4613-8689-6_9.
49. **OpenFOAM**. — URL: <http://www.openfoam.org>.