

УДК 532.59; 551.466

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ УЕДИНЕННЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В МНОГОСЛОЙНОЙ МЕЛКОЙ ВОДЕ

В. Ю. Ляпидевский, А. А. Чесноков, В. Е. Ермишина

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

E-mails: liapid@hydro.nsc.ru, chesnokov@hydro.nsc.ru, eveyrg@gmail.com

Предложена неоднородная система одномерных законов сохранения, описывающая в приближении Буссинеска распространение придонных (приповерхностных) внутренних волн большой амплитуды в многослойной стратифицированной мелкой воде. Модель применима для слоистых течений устойчиво стратифицированной жидкости и является гиперболической при умеренном сдвиге скорости в слоях. Исследованы стационарные решения уравнений движения и сформулированы условия формирования уединенных волн первой моды. Модель верифицирована путем сравнения результатов, полученных с ее использованием, с результатами натурных наблюдений и расчетов по двумерным уравнениям движения. Выполнено численное моделирование распространения нестационарных нелинейных волновых пакетов в многослойной жидкости.

Ключевые слова: уравнения многослойной мелкой воды, уединенные внутренние волны, приближение Буссинеска.

DOI: 10.15372/PMTF20210404

Введение. Приповерхностные (придонные) внутренние волны, понижающие (повышающие) уровень пикноклина, регулярно наблюдаются в океане [1, 2] и прибрежных водах [3, 4]. Необходимым условием генерации и распространения внутренних волн является вертикальная плотностная стратификация жидкости, обусловленная неоднородностью распределения температуры и солености. Характерная особенность внутренних волн, обуславливающая интерес к их исследованию, состоит в том, что амплитуда уединенной волны может существенно превышать начальную толщину одного из слоев, вдоль границы которых распространяется волна. В стратифицированном океане наиболее часто наблюдаются волны первой моды [5–7], однако в последнее время появились работы [8, 9], содержащие описание экспериментов, в которых зарегистрированы внутренние волны второй моды. В прибрежной зоне приповерхностные волны преобразуются в придонные и распространяются в направлении берега в виде волнового бора, на фронте которого формируются внутренние волны, соответствующие высшим модам [10, 11].

При математическом моделировании распространения и трансформации внутренних волн используются модификации уравнений Кортвега — де Фриза и уравнения второго приближения теории многослойной мелкой воды [12, 13]. В работе [14] с использованием двухслойной сильнонелинейной модели исследованы уединенные внутренние волны большой амплитуды. Квазипериодические решения уравнений двухслойного течения с учетом

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 20-11-20189).

© Ляпидевский В. Ю., Чесноков А. А., Ермишина В. Е., 2021

завихренности одного слоя и негидростатичности другого построены в [15]. Распространение и трансформация внутренних волн второй моды в трехслойной мелкой воде исследованы в работах [16, 17]. В [10] выведена и верифицирована дисперсионно-гидростатическая модель трехслойного течения стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска. Более общая модель, включающая произвольное число гидростатических слоев, построена в [18]. Следует отметить, что численная реализация нестационарных дисперсионных моделей представляет определенные трудности. В работе [19] предложен гибридный метод решения уравнений Грина — Нагди, позволяющий применить схему Годунова с дополнительным обращением эллиптического оператора на каждом шаге по времени. Однако и в этом случае сохраняются трудности, возникающие при постановке неотражающих граничных условий. Кроме того, применение метода прогонки для решения трехдиагональной системы линейных уравнений на каждом шаге по времени существенно повышает время расчета. Альтернативный подход, предложенный в [20], состоит в построении гиперболической аппроксимации исходной дисперсионной модели, что позволяет применять стандартные численные методы, разработанные для решения систем гиперболических законов сохранения. В последнее время такой подход широко применяется при численном моделировании течений с негидростатическим распределением давления [17, 21, 22].

В данной работе предложена математическая модель распространения придонных (или приповерхностных) внутренних волн большой амплитуды в многослойной жидкости, представленная в виде системы неоднородных законов сохранения первого порядка. Наличие вещественных характеристик уравнений движения позволяет использовать модификации схемы Годунова для моделирования нестационарных волновых процессов. Исследуются стационарные решения уравнений и формулируются условия формирования уединенных приповерхностных и придонных внутренних волн большой амплитуды. Проводятся верификация модели и численное моделирование трансформации волновых пакетов в многослойной стратифицированной жидкости.

1. Математическая модель. Система уравнений, описывающая распространение нелинейных длинных волн в многослойной стратифицированной мелкой воде (рис. 1) с учетом негидростатического распределения давления, выведена в работе [13]. В приближении Буссинеска ($0 < (\rho_i - \rho_1)/\rho_1 \ll 1$, ρ_i — плотность жидкости в i -м слое, $\rho_{i+1} > \rho_i$) и в предположении, что дисперсионные эффекты учитываются только в верхнем слое, уравнения [13] для течений над плавно меняющимся рельефом дна упрощаются и принимают

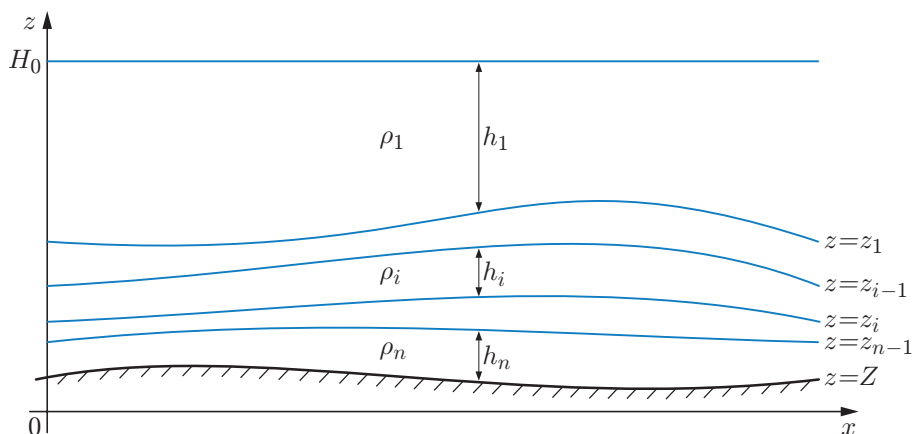


Рис. 1. Схема течения многослойной жидкости, в которой распространяются придонные внутренние волны

вид [18]

$$\begin{aligned} h_{it} + (u_i h_i)_x &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ u_{1t} + \left(\frac{u_1^2}{2} + \Pi \right)_x + \frac{\varepsilon^2}{3h_1} \left(h_1^2 \frac{d^2 h_1}{dt^2} \right)_x &= 0, \\ u_{it} + (u_i^2/2 + p_i)_x &= -b_i Z_x, \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u_i , h_i — средняя скорость и толщина i -го слоя жидкости; $\rho_1 \Pi$ — модифицированное давление на верхней границе; уравнение $z = Z(x)$ задает рельеф дна; $b_i = g(\rho_i - \rho_1)/\rho_1 \geq 0$ — плавучесть; g — ускорение свободного падения; ε — длинноволновый параметр (отношение полной глубины канала к характерной длине волны); выражения для переменных p_i и оператора d/dt имеют вид

$$p_i = \Pi + \sum_{j=2}^{i-1} b_j h_j + b_i \sum_{j=i}^n h_j, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial x}.$$

При выводе модели сделано предположение о плавном изменении рельефа дна (малости производных функции $z = Z(x)$), что позволяет не учитывать члены $\varepsilon^2 Z_x$ и $\varepsilon^2 Z_{xx}$ в уравнениях (1). Следует отметить, что в приближении Буссинеска свободная граница жидкости фиксирована, а полный расход Q является функцией времени:

$$H + Z(x) = H_0 = \text{const}, \quad H = \sum_{i=1}^n h_i, \quad Q(t) = \sum_{i=1}^n u_i h_i. \quad (2)$$

Поэтому систему уравнений (1) дополним соотношениями (2), которые позволяют выразить, например, переменные u_n , h_n через остальные искомые функции u_i , h_i ($i = 1, \dots, n-1$).

Система (1), (2) описывает распространение придонных внутренних волн большой амплитуды (толщина верхнего дисперсионного слоя значительно превышает толщины нижележащих гидростатических слоев). Заметим, что уравнения (1), (2) можно использовать также для описания приповерхностных уединенных волн в случае течений над ровным дном. Для этого следует выполнить инверсию слоев, показанных на рис. 1, относительно линии $z = H_0$ и поменять знаки плавучести в слоях для восстановления устойчивой стратификации. Таким образом, рассматриваемая модель применима для описания как приповерхностных, так и придонных внутренних волн большой амплитуды.

При $n = 2$ система (1) представляет собой модификацию известной модели [14], описывающей распространение уединенных волн большой амплитуды в двухслойной жидкости. Случай $n = 3$ рассматривался в работах [10, 17, 23] при моделировании внутренних волн второй моды. Решения в классе бегущих волн для многослойной модели (1) исследованы в [18]. Ниже предложены модифицированные уравнения (1), представленные в виде неоднородной системы законов сохранения первого порядка, подходящей для численного моделирования нестационарных волновых процессов. При этом полученная система учитывает дисперсионные свойства исходной модели и допускает решения в форме уединенных волн.

В работе [23] отмечено, что слагаемое с производными высокого порядка в уравнениях Грина — Нагди допускает представление

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(h_1^2 \frac{d^2 h_1}{dt^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(h_1 \frac{d^2 h_1}{dt^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dh_1}{dt} \right)^2 \right) + L, \\ L &= \frac{\partial h_1}{\partial t} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t}. \end{aligned} \quad (3)$$

В классе стационарных решений и бегущих волн (для течений над ровным дном) переменная L тождественно равна нулю. В общем случае $L \neq 0$, но отбрасывание этой величины в уравнениях (1) приводит к ошибке, не превышающей порядок ε^2 . С учетом соотношения (3) при $L = 0$ уравнение импульса в верхнем слое можно представить в консервативном виде

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_1^2}{2} + \Pi + \frac{\varepsilon^2 h_1}{3} \frac{d^2 h_1}{dt^2} + \frac{\varepsilon^2}{6} \left(\frac{dh_1}{dt} \right)^2 \right) = 0. \quad (4)$$

Обе модели (исходная (1), (2) и модифицированная, в которой уравнение импульса для верхнего слоя выбрано в форме (4)) допускают единообразное представление в виде замкнутой системы $2(n-1)$ уравнений для определения искомым функций $\mathbf{u} = (h_1, \dots, h_{n-1}, K, s_2, \dots, s_{n-1})$:

$$\begin{aligned} h_{it} + (u_i h_i)_x &= 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ K_t + \left(K u_1 - \frac{(u_1 - u_2)^2}{2} + b_2 h_1 - \frac{\varepsilon^2}{2(2\delta + 1)} h_1^2 u_{1x}^2 \right)_x &= 0, \\ s_{it} + \left(u_{ci} s_i - (b_{i+1} - b_i) \sum_{j=1}^i h_j \right)_x &= 0, \quad i = 2, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (5)$$

где $s_i = u_{i+1} - u_i$; $u_{ci} = (u_{i+1} + u_i)/2$; функция K задана следующим образом:

$$\begin{aligned} K &= u_1 - u_2 - \frac{\varepsilon^2}{3h_1^{1-\delta}} (h_1^{3-\delta} u_{1x})_x, \\ u_2 &= \frac{1}{H - h_1} \left(Q - u_1 h_1 - \sum_{i=3}^n h_i \sum_{j=2}^{i-1} s_j \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Для исходной модели (1) параметр $\delta = 0$, при использовании модифицированного уравнения импульса для верхнего слоя (4) $\delta = 1$. Запись модели в расщепленном виде (5), (6) позволяет применить предложенный в [19] подход. Известные в момент времени t консервативные переменные \mathbf{u} определяются на шаге $t + dt$ из уравнений (5) методом Годунова. Затем по известным переменным K, h_i, s_i в результате решения уравнения второго порядка (6) находятся переменные u_1, u_2 в момент времени $t + dt$ и по формулам $u_{i+1} = s_i + u_i$ ($i = 2, \dots, n-1$) восстанавливается скорость жидкости во всех гидростатических слоях.

Формулировка уравнений движения в виде (5), (6) позволяет проводить нестационарные расчеты распространения внутренних волн в многослойной жидкости, но при этом сохраняются указанные выше трудности, обусловленные постановкой неотражающих граничных условий и необходимостью обращать эллиптический оператор на каждом шаге по времени. Ниже будут получены эволюционные уравнения первого порядка, аппроксимирующие рассматриваемую дисперсионную модель и обладающие вещественными характеристиками.

Следуя [20], введем новые переменные: мгновенную толщину η и мгновенную скорость жидкости верхнего слоя v :

$$\frac{d\eta}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha b_2}{h_1} (h_1 - \eta),$$

где $\alpha > 0$ — безразмерный параметр; $b_2 > 0$ — плавучесть. Заменим дисперсионные члены в уравнении (4) следующим образом:

$$\frac{d_1 h_1}{dt} \rightarrow v, \quad \frac{d_1^2 h_1}{dt^2} \rightarrow \frac{\alpha b_2}{h_1} (h_1 - \eta).$$

В результате получаем систему уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} h_{it} + (u_i h_i)_x &= 0, & u_{1t} + \left(\frac{u_1^2}{2} + \Pi + \frac{\alpha b_2 \varepsilon^2}{3} (h_1 - \eta) + \frac{\varepsilon^2 v^2}{6} \right)_x &= 0, \\ u_{it} + \left(\frac{u_i^2}{2} + p_i \right)_x &= -b_i Z_x, & \eta_t + u_1 \eta_x = v, & v_t + u_1 v_x = \frac{\alpha b_2}{h_1} (h_1 - \eta) \end{aligned} \quad (7)$$

с дополнительными соотношениями (2). При $\alpha \rightarrow \infty$ решения системы (7) являются аппроксимацией решений дисперсионной модели (1) с уравнением импульса для верхнего слоя в форме (4).

Переход к переменным $s_i = u_{i+1} - u_i$ ($i = 1, \dots, n-1$) позволяет исключить функцию Π , а два последних уравнения в (7) допускают консервативное представление. Таким образом, для численного моделирования внутренних волн в многослойной мелкой воде имеем неоднородную систему законов сохранения, состоящую из $2n$ уравнений для определения $2n$ искомым функций $\mathbf{U} = (\eta, v, s_1, \dots, s_{n-1}, h_1, \dots, h_{n-1})$:

$$\begin{aligned} (h_1 \eta)_t + (u_1 h_1 \eta)_x &= v h_1, & (v h_1)_t + (u_1 v h_1)_x &= \alpha b_2 (h_1 - \eta), \\ s_{1t} + \left(\frac{u_2 + u_1}{2} s_1 - b_2 h_1 - \frac{\alpha b_2 \varepsilon^2}{3} (h_1 - \eta) - \frac{\varepsilon^2 v^2}{6} \right)_x &= 0, \\ s_{it} + \left(\frac{u_{i+1} + u_i}{2} s_i - (b_{i+1} - b_i) \sum_{j=1}^i h_j \right)_x &= 0, & h_{it} + (u_i h_i)_x &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$u_{i+1} = s_i + u_i, \quad u_1 = \frac{1}{H} \left(Q - \sum_{i=2}^n h_i \sum_{j=1}^{i-1} s_j \right), \quad h_n = H - \sum_{i=1}^{n-1} h_i, \quad H = H_0 - Z.$$

Заметим, что главная часть системы (8) представляет собой (при переносе членов, содержащих производные функций η, v , в правую часть) классические уравнения многослойной мелкой воды с измененными значениями плавучести в каждом слое. Сформулировать условия гиперболичности системы (8) в общем случае затруднительно, но можно утверждать, что при незначительном сдвиге скорости в слоях система является гиперболической. Выбирая достаточно большое значение параметра α , можно обеспечить существование двух вещественных звуковых характеристик. Кроме того, в силу первых двух уравнений (8) имеется контактная характеристика $dx/dt = u_1$ кратности два.

При $n = 2$ (двухслойная жидкость) система (8) является гиперболической при выполнении условия

$$\alpha > \frac{3}{\varepsilon^2} \left(\frac{(u_2 - u_1)^2}{b_2 H} - 1 \right). \quad (9)$$

Действительно, представляя уравнения (8) в векторном виде $\mathbf{U}_t + A \mathbf{U}_x = \mathbf{F}$ и вычисляя собственные значения матрицы, получаем следующие значения скоростей характеристик:

$$\lambda_{1,2} = u_1, \quad \lambda_{3,4} = \frac{u_2 + u_1}{2} \mp \sqrt{\frac{h_1 h_2}{H^2} \left(\left(1 + \frac{\alpha \varepsilon^2}{3} \right) b_2 H - s_1^2 \right)}.$$

Таким образом, выбор параметра $\alpha > 0$ согласно условию (9) обеспечивает гиперболичность уравнений (8) в случае $n = 2$. Однако увеличение α приводит к увеличению скоростей характеристик $\lambda_{3,4}$, замедляющих в силу условия Куранта численные расчеты. Выполненные в [22] сравнения решений дисперсионных уравнений и их аппроксимаций

показывают, что даже при небольших значениях α уравнения первого порядка с высокой точностью описывают профиль головной волны. Увеличение параметра α требуется для аппроксимации вторичных волн небольшой амплитуды.

2. Стационарные решения. В случае течений над ровным дном модель инвариантна относительно преобразования Галилея, поэтому решения в классе бегущих волн (искомые функции зависят от переменной $\zeta = x - Dt$, $D = \text{const}$) эквивалентны стационарным ($D = 0$) решениям. Рассмотрим класс стационарных решений уравнений (7) (или (8)), определяемый системой

$$\begin{aligned} (u_i h_i)' &= 0, & (u_i^2/2 + p_i)' &= -b_i Z_x = f_i, & i &= 2, \dots, n, \\ \left(\frac{u_1^2}{2} + \Pi + \alpha b_2 \frac{h_1 - \eta}{3} + \frac{v^2}{6} \right)' &= 0, & u_1 \eta' &= v, & u_1 v' &= \alpha b_2 \frac{h_1 - \eta}{h_1}, \\ p_i &= \Pi + \sum_{j=2}^{i-1} b_j h_j + b_i \sum_{j=i}^n h_j, & H &= H_0 - Z = \sum_{j=1}^n h_j. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь и далее $\varepsilon = 1$; штрих означает дифференцирование по переменной x .

Для построения решений системы (10) нужно привести ее к нормальной форме (разрешенному относительно производных виду) следующим образом. Из законов сохранения массы в слоях можно выразить скорости u_i через толщины слоев h_i по формулам

$$u_i = Q_i/h_i, \quad Q_i = \text{const}. \quad (11)$$

Из уравнения импульса для второго слоя ($i = 2$) системы (10) с учетом (11) выразим производную h_2' следующим образом:

$$h_2' = a_2 \Pi' + c_2 h_1' + d_2, \quad (12)$$

где a_2, c_2, d_2 — коэффициенты:

$$a_2 = \frac{h_2^3}{Q_2^2}, \quad c_2 = -\frac{b_2 h_2^3}{Q_2^2}, \quad d_2 = \frac{(b_2 H' - f_2) h_2^3}{Q_2^2}. \quad (13)$$

Из уравнения импульса для третьего слоя ($i = 3$) и выражения для h_2' (12) получаем

$$\begin{aligned} h_3' &= a_3 \Pi' + c_3 h_1' + d_3, & a_3 &= \frac{h_3^3}{Q_3^2} ((b_2 - b_3) a_2 + 1), \\ c_3 &= -\frac{h_3^3}{Q_3^2} (b_3 - (b_2 - b_3) c_2), & d_3 &= \frac{h_3^3}{Q_3^2} ((b_2 - b_3) d_2 - f_3 + b_3 H'). \end{aligned}$$

С учетом этих соотношений можно предположить, что для произвольного значения $i = k$ ($3 \leq k < n$) производная h_k' выражается через h_1' и Π' следующим образом:

$$h_k' = a_k \Pi' + c_k h_1' + d_k, \quad (14)$$

где коэффициенты a_k, c_k, d_k определяются по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{h_k^3}{Q_k^2} \left(1 + \sum_{j=2}^{k-1} (b_j - b_k) a_j \right), & c_k &= -\frac{h_k^3}{Q_k^2} \left(b_k - \sum_{j=2}^{k-1} (b_j - b_k) c_j \right), \\ d_k &= \frac{h_k^3}{Q_k^2} \left(b_k H' - f_k + \sum_{j=2}^{k-1} (b_j - b_k) d_j \right), \end{aligned}$$

коэффициенты a_2, c_2, d_2 заданы согласно (13). Справедливость представления (14) несложно доказать методом математической индукции. Дифференцируя последнее уравнение в (10) и используя формулы (14), получаем соотношение

$$H' = h'_1 + \sum_{j=2}^n h'_j = h'_1 + \sum_{j=2}^n (a_j \Pi' + c_j h'_1 + d_j),$$

из которого следует выражение для производной Π' :

$$\Pi' = R - S h'_1, \quad R = \left(H' - \sum_{j=2}^n d_j \right) \left(\sum_{j=2}^n a_j \right)^{-1}, \quad S = \left(1 + \sum_{j=2}^n c_j \right) \left(\sum_{j=2}^n a_j \right)^{-1}.$$

Подставляя выражения для Π' в уравнение импульса для верхнего слоя с учетом уравнений

$$\eta' = \frac{v}{u_1}, \quad v' = \frac{\alpha b_2}{Q_1} (h_1 - \eta), \quad (15)$$

имеем

$$h'_1 = \frac{F}{\Delta}, \quad F = R - \frac{\alpha b_2 v \eta}{3Q_1}, \quad \Delta = \frac{Q_1^2}{h_1^3} + S - \frac{\alpha b_2}{3}. \quad (16)$$

Таким образом, соотношения (12), (14)–(16) являются нормальной формой системы для определения стационарных решений.

Построим нетривиальное решение уравнений (10) для течения над ровным рельефом дна ($Z = 0$), стремящегося к постоянному сдвиговому потоку при $x \rightarrow -\infty$:

$$(h_i, u_i, \eta, v) \rightarrow (h_i^0, u_i^0, h_1^0, 0), \quad i = 1, \dots, n$$

(h_i^0, u_i^0 — постоянные толщины слоев и скорости на бесконечности). Для построения такого решения необходимо исследовать асимптотическое поведение искомых функций. Выполним линеаризацию уравнений (10) на постоянном решении. Подставляя выражения

$$h_i = h_i^0 + \tilde{h}_i, \quad u_i = u_i^0 + \tilde{u}_i, \quad \eta = h_1^0 + \tilde{\eta}, \quad v = \tilde{v}$$

в уравнения (15), (16) для определения малых возмущений $\tilde{\eta}, \tilde{v}, \tilde{h}_1$, получаем линейную систему

$$\tilde{\eta}' = \frac{\tilde{v}}{u_1^0}, \quad \tilde{v}' = \frac{\alpha b_2}{u_1^0 h_1^0} (\tilde{h}_1 - \tilde{\eta}), \quad \tilde{h}'_1 = -\frac{\alpha b_2}{3u_1^0 \Delta_0} \tilde{v}, \quad (17)$$

где

$$\Delta_0 = \frac{(u_1^0)^2}{h_1^0} + S_0 - \frac{\alpha b_2}{3}, \quad S_0 = \left(1 + \sum_{j=2}^n c_j^0 \right) \left(\sum_{j=2}^n a_j^0 \right)^{-1}, \quad a_2^0 = \frac{h_2^0}{(u_2^0)^2}, \quad c_2^0 = -b_2 a_2^0,$$

$$a_k^0 = \frac{h_k^0}{(u_k^0)^2} \left(1 + \sum_{j=2}^{k-1} (b_j - b_k) a_j^0 \right), \quad c_k^0 = -\frac{h_k^0}{(u_k^0)^2} \left(b_k - \sum_{j=2}^{k-1} (b_j - b_k) c_j^0 \right).$$

Следует отметить, что в случае $Z = 0$ полная глубина равна $H = H_0 = \text{const}$ и в уравнениях импульсов гидростатических слоев в системе (10) правые части равны нулю ($f_i = 0$). Поэтому определенные выше коэффициенты d_k и функция R равны нулю. С учетом этого малые возмущения толщин гидростатических слоев \tilde{h}_k и скорости жидкости в слоях u_i находятся из уравнений

$$\tilde{h}'_k = (c_k^0 - a_k^0 S_0) \tilde{h}'_1, \quad \tilde{u}'_i = \frac{u_i^0}{h_i^0} \tilde{h}'_1. \quad (18)$$

Решение линеаризованных уравнений (17), (18), стремящееся к нулю при $x \rightarrow -\infty$, будем искать в виде

$$\tilde{\eta} = \hat{\eta} e^{\nu x}, \quad \tilde{v} = \hat{v} e^{\nu x}, \quad \tilde{h}_i = \hat{h}_i e^{\nu x}, \quad \tilde{u}_i = \hat{u}_i e^{\nu x}, \quad (19)$$

где постоянные $\hat{\eta}$, \hat{v} , \hat{h}_i , \hat{u}_i — амплитуды малого возмущения; $\nu > 0$. Подставляя представление решения (19) в (17), получаем однородную систему линейных уравнений для нахождения амплитуд $\hat{\eta}$, \hat{v} , \hat{h}_1 :

$$\nu u_1^0 \hat{\eta} = \hat{v}, \quad \nu u_1^0 \hat{h}_1 \hat{v} = \alpha b_2 (\hat{h}_1 - \hat{\eta}), \quad \nu u_1^0 \hat{h}_1 = -\frac{\alpha b_2}{3\Delta_0} \hat{v}. \quad (20)$$

Приравнивая к нулю определитель системы (20), имеем условие существования нетривиальных решений

$$\nu^2 = -\frac{\alpha b_2}{(u_1^0)^2 h_1^0} \left(1 + \frac{\alpha b_2}{3\Delta_0}\right). \quad (21)$$

Таким образом, при значении $\nu > 0$, заданном формулой (21), малая амплитуда \hat{h}_1 выбирается произвольно. Амплитуды \hat{h}_k , \hat{u}_i , $\hat{\eta}$, \hat{v} определяются из уравнений (18), (19) по заданному значению \hat{h}_1 .

В силу (21) построение решения в виде уединенной волны, примыкающей к заданному сдвиговому потоку h_i^0 , u_i^0 , возможно, если выполняется условие $\Delta_0 < -\alpha b_2/3$. С учетом определения функции Δ_0 это условие принимает вид

$$(u_1^0)^2 + h_1^0 S_0 < 0.$$

Следует отметить, что в предельном случае $\alpha \rightarrow \infty$ из соотношения (21) следует условие

$$\nu_\infty^2 = \frac{3}{(u_1^0)^2 h_1^0} \left(\frac{(u_1^0)^2}{h_1^0} + S_0\right),$$

совпадающее с условием построения уединенной волны в рамках дисперсионной модели [18].

3. Результаты численных расчетов и верификация модели. Ниже приводятся результаты численного моделирования распространения нестационарных волновых возмущений с использованием дисперсионных уравнений (5), (6) и их аппроксимации системой (8) первого порядка. Выполнена верификация предложенной многослойной модели путем сопоставления стационарных решений с данными натуральных наблюдений и результатами двумерных расчетов [7, 10].

3.1. Нестационарный расчет: формирование уединенной волны. Рассмотрим пример формирования пакета волн из кусочно-постоянного начального распределения устойчиво стратифицированной жидкости. Пусть канал длиной $L_0 = 200$ и высотой $H_0 = 10$ содержит шесть слоев жидкости с плавучестью $b_k = 0,1(k+4)$, $k = 2, \dots, 6$. В момент времени $t = 0$ заданы толщины слоев покоящейся жидкости: $h_1 = 5$, $h_2 = h_3 = h_4 = h_5 = 0,5$, $h_6 = 3$ при $x < 10$ и $h_1 = 7,5$, $h_k = 0,5$ ($k = 2, \dots, 6$) при $x > 10$. Все эти переменные

считаются безразмерными. Границы раздела слоев $z = z_i = H_0 - \sum_{k=1}^i h_k$ ($i = 1, \dots, n-1$)

в начальный момент времени ($t = 0$) показаны на рис. 2 штрихпунктирными линиями.

Для проведения нестационарных расчетов на основе системы неоднородных законов сохранения (8) используется TVD-схема [24] второго порядка аппроксимации типа предиктор-корректор. Та же схема используется для решения исходных дисперсионных уравнений (5) с дополнительным интегрированием обыкновенного дифференциального уравнения (6) второго порядка на каждом шаге по времени. Решение уравнения (6), аппроксимированного конечными разностями, сводится к обращению трехдиагональной матрицы методом прогонки. Расчеты выполнены на сетке, равномерной по переменной x , с числом узлов $N = 1500$. Шаг по времени определяется из условия Куранта. На границах расчетной области $x = 0$ и $x = L_0$ реализованы условия непротекания.

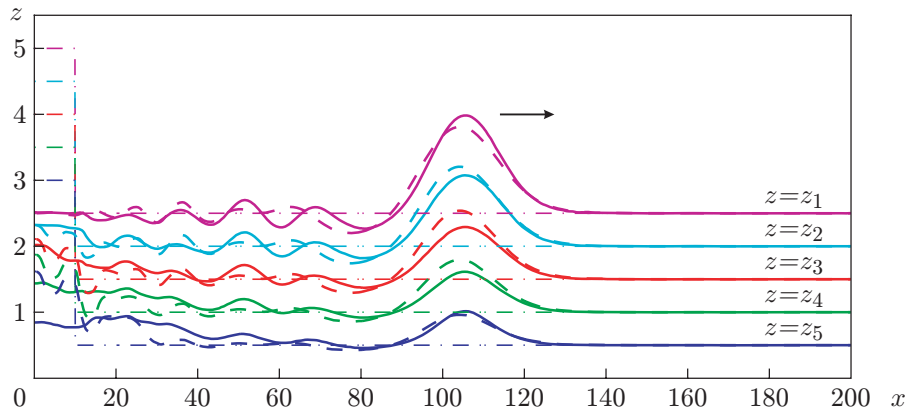


Рис. 2. Решения уравнений (8) и системы (5), (6) при $n = 6$:

сплошные линии — границы раздела слоев $z = z_i$ ($i = 1, \dots, 5$) для решения уравнений (8) при $t = 80$, штриховые — границы раздела слоев $z = z_i$ для решения системы (5), (6) при $t = 80$, штрихпунктирные — начальное положение границ раздела слоев; стрелка — направление распространения волны

На рис. 2 сплошными линиями показано решение уравнений (8) с параметром $\alpha = 70$ при $t = 80$. Штриховые кривые соответствуют решению системы уравнений (5), (6). В рассматриваемом случае формируется уединенная волна с мелкомасштабными возмущениями за головной волной. На рис. 2 видно, что система законов сохранения (8) первого порядка достаточно точно аппроксимирует исходную дисперсионную модель. Уравнения (5), (6) содержат параметр δ , принимающий значения $\delta = 0$ и $\delta = 1$, что соответствует исходному (см. (1)) и модифицированному (см. (4)) представлениям уравнения импульса для верхнего слоя. Решения системы (5), (6) с $\delta = 0$ и $\delta = 1$ практически совпадают. Таким образом, предложенная модель (8) позволяет корректно описывать распространение внутренних волн большой амплитуды в многослойной жидкости.

3.2. Стационарные решения: сравнение с результатами натуральных наблюдений. Приведем примеры сопоставления решений рассматриваемой многослойной модели (8) с зарегистрированными волновыми пакетами. В работах [4, 10, 18] изложена методика проведения натуральных измерений параметров внутренних волн, распространяющихся в прибрежных водах Японского моря (залив Посьета, гидрофизический полигон Тихоокеанского океанологического института ДВО РАН).

На рис. 3 приведен профиль головной уединенной волны повышения в придонном волновом пакете, зарегистрированном в шельфовой зоне Японского моря, а также профиль, полученный в результате численного решения стационарных уравнений (10). Тонкими сплошными линиями на рис. 3 показаны изотермы уединенной волны в диапазоне значений температуры $9 \div 14$ °C с интервалом 1 °C, зарегистрированные измерительной станцией. Жирными сплошными и штриховыми кривыми показаны границы раздела стратифицированных слоев над ровным рельефом дна, полученных с использованием стационарных уравнений (10) ($n = 6$, $H = 40$ м). Невозмущенные толщины слоев и плавучести имели следующие значения: $h_1 = 34,21$ м, $h_2 = h_3 = h_4 = h_5 = 0,66$ м, $h_6 = 3,15$ м, $b_k = 0,2(k-1)b$, $b = 0,02$ м/с², $k = 2, \dots, 6$. Начальный сдвиг скорости в слоях отсутствует. Число Фруда равно $Fr = D/\sqrt{bH} = 0,4576$, что соответствует скорости волны $D = 0,41$ м/с. Для построения решения уравнений (10) при $x = x_0$ использованы малые возмущения указанного выше постоянного течения, выбранные согласно формулам (19)–(21). Из рис. 3 следует, что результаты численных расчетов хорошо согласуются с результатами измерений амплитуды передней части волны. Профили передней части волны, полученные в численном решении и в результате натуральных измерений, практически совпадают. Отличие построен-

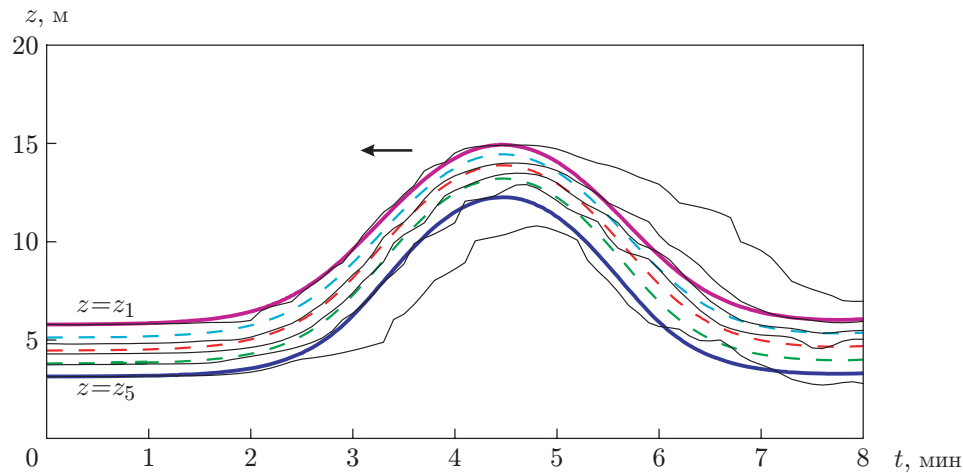


Рис. 3. Границы раздела слоев $z = z_i$ в уединенной волне повышения: сплошные тонкие линии — результаты натуральных измерений [10], сплошные жирные — границы внешних слоев, полученные в результате расчета по модели (10) при $n = 6$, штриховые — границы внутренних слоев

ного солитонобразного решения от изотерм, зарегистрированных на подветренном участке волны, свидетельствует об интенсивном взаимодействии этой волны с другими волнами рассматриваемого волнового пакета.

Как отмечалось выше, предложенная модель применима для описания как придонных, так и приповерхностных волн большой амплитуды. Чтобы построить стационарное решение в случае приповерхностных волн понижения в приближении Буссинеска, достаточно выполнить инверсию слоев, показанных на рис. 1, относительно линии $z = H_0$ и поменять знаки плавучести в слоях для восстановления устойчивой стратификации.

В работе [7] приведены результаты натуральных наблюдений и численного моделирования на основе двумерного уравнения Дюбрей-Жакотен — Лонга распространения уединенных внутренних волн большой амплитуды в Боденском озере. Скорость уединенной волны постоянна, поэтому, если перейти в систему координат, связанную с волной, то можно описать такие возмущения в классе бегущих волн или стационарных решений. Для сравнения с результатами наблюдений [7] используется модель (10) с шестью слоями ($n = 6$). В размерных переменных начальные значения толщины однородных слоев и значения плавучести равны $h_1 = 16$ м, $h_2 = 4$ м, $b_2 = 0,02$ м/с², $h_3 = 8$ м, $b_3 = 0,04$ м/с², $h_4 = 9$ м, $b_4 = 0,06$ м/с², $h_5 = 16$ м, $b_5 = 0,07$ м/с², $h_6 = 68$ м, $b = b_6 = 0,08$ м/с². Волна распространяется по покоящейся стратифицированной жидкости со скоростью D . Число Фруда $Fr = D/\sqrt{bH}$ является единственным параметром, определяющим как амплитуду, так и скорость распространения волны при заданной начальной стратификации. Рис. 4 получен при $Fr = 0,42$.

На рис. 4 сплошными линиями показаны изолинии температуры, зарегистрированной измерительной станцией в центральной части Боденского озера 26 октября 2010 г. (начало отсчета в 15 ч 25 мин), а также результаты расчета по двумерным стационарным уравнениям Дюбрей-Жакотен — Лонга (см. рис. 2, а в [7]). Штриховыми кривыми на рис. 4 показаны результаты расчета границ раздела слоев с использованием стационарных уравнений (10) с учетом выбранных параметров течения. Из рис. 4 следует, что изолинии, зарегистрированные в результате натуральных измерений и полученные по двумерным уравнениям Дюбрей-Жакотен — Лонга в [7], хорошо согласуются с результатами расчета по упрощенной одномерной модели многослойной стратифицированной мелкой воды, выполненного в данной работе.

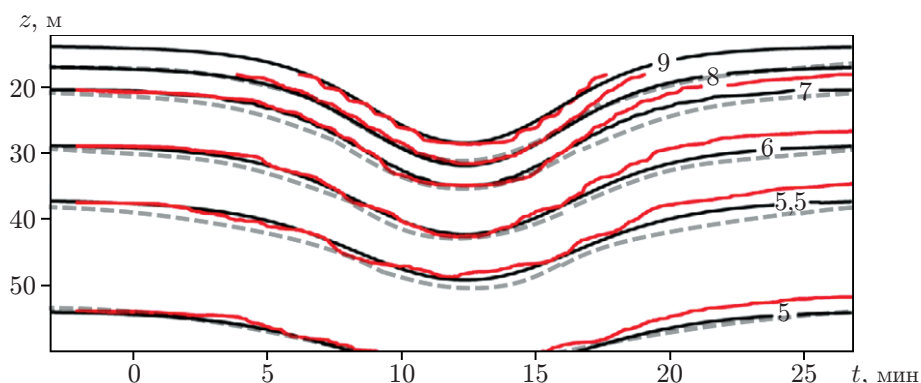


Рис. 4. Уединенная волна понижения:

сплошные линии — результаты натуральных измерений температуры ($^{\circ}\text{C}$) и расчета поля температуры по двумерным уравнениям [7] (числа — значения температуры вдоль изотермы), штриховые — границы раздела слоев, полученные с использованием многослойной модели (10) при $n = 6$

Заключение. В работе предложена математическая модель, описывающая в приближении Буссинеска распространение придонных (приповерхностных) внутренних волн большой амплитуды в многослойной стратифицированной мелкой воде. Модель представлена в виде неоднородной системы законов сохранения первого порядка, которая является гиперболической при малом сдвиге скоростей в слоях. Это позволяет использовать хорошо развитые методы численного решения, основанные на схеме Годунова и ее модификациях. Выполнены нестационарные численные расчеты, результаты которых свидетельствуют о применимости предложенных уравнений движения для описания уединенных внутренних волн. Особенностью модели является возможность описывать внутренние волны с учетом сдвига скорости и тонкой стратификации по плотности в одномерной постановке, что достигается за счет включения в модель произвольного числа гидростатических слоев.

Проведено исследование класса стационарных решений (бегущих волн). Получены рекуррентные формулы, позволяющие свести стационарные уравнения движения к виду, разрешенному относительно производных. В результате выполненного асимптотического анализа решений сформулированы условия существования уединенной волны и определены данные Коши, позволяющие построить решение солитонного вида. Сравнение результатов численных расчетов с данными натуральных измерений параметров внутренних волн и расчетов по двумерным уравнениям движения показывает, что предложенная одномерная многослойная модель позволяет определить основные характеристики распространения нелинейных волновых пакетов в стратифицированной жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Helfrich K. R., Melville W. K. Long nonlinear internal waves // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2006. V. 38. P. 395–425.
2. Макаренко Н. И., Мальцева Ж. Л., Морозов Е. Г. и др. Внутренние стационарные волны в глубоководных стратифицированных течениях // *ПМТФ.* 2019. Т. 60, № 2. С. 74–83.
3. Scotti A., Pineda J. Observation of very large and steep internal waves of elevation near the Massachusetts coast // *Geophys. Res. Lett.* 2004. V. 31. L22307.
4. Кукарин В. Ф., Ляпидевский В. Ю., Храпченков Ф. Ф., Ярощук И. О. Нелинейные внутренние волны в шельфовой зоне моря // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2019. № 3. С. 38–48.

5. **Vlasenko V., Brandt P., Rubino A.** Structure of large-amplitude internal solitary waves // J. Phys. Oceanography. 2000. V. 30. P. 2172–2185.
6. **Lien R., Henyey F., Ma B., Yang Y. J.** Large-amplitude internal solitary waves observed in the northern South China sea: properties and energetics // J. Phys. Oceanography. 2014. V. 44. P. 1095–1115.
7. **Preusse M., Stastna M., Freistuhler H., Peeters F.** Intrinsic breaking of internal solitary waves in a deep lake // PLoS One. 2012. V. 7. e41674.
8. **Shroyer E. L., Moum J. N., Nash J. D.** Mode 2 waves on the continental shelf: Ephemeral components of the nonlinear internal wavefield // J. Geophys. Res. 2010. V. 115. C07001.
9. **Zhang P., Xu Z., Li Q., et al.** The evolution of mode-2 internal solitary waves modulated by background shear currents // Nonlinear Process. Geophys. 2018. V. 25. P. 441–455.
10. **Ляпидевский В. Ю., Новотрясов В. В., Храпченков Ф. Ф., Яроцук И. О.** Внутренний волновой бор в шельфовой зоне моря // ПМТФ. 2017. Т. 58, № 5. С. 60–71.
11. **Новотрясов В. В., Пермяков М. С.** Экспериментально-теоретическое определение предельной амплитуды и минимальной длительности уединенных волн в слабодиспергирующем мелком море // ПМТФ. 2019. Т. 60, № 3. С. 67–72.
12. **Yuan C., Grimshaw R., Johnson E.** The evolution of second mode internal solitary waves over variable topography // J. Fluid Mech. 2018. V. 836. P. 238–259.
13. **Choi W.** Modeling of strongly nonlinear internal gravity waves // Proc. of the 4th Intern. conf. on hydrodynamics, Yokohama, 7–9 Sept. 2020 / Ed. by Y. Goda, M. Ikehata, K. Suzuki. Yokohama: S. n., 2000. P. 453–458.
14. **Choi W., Camassa R.** Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system // J. Fluid Mech. 1999. V. 386. P. 1–36.
15. **Gavrilyuk S. L., Liapidevskii V. Yu., Chesnokov A. A.** Interaction of a subsurface bubble layer with long internal waves // Europ. J. Mech. B. Fluids. 2019. V. 73. P. 157–169.
16. **Barros R., Choi W., Milewski P. A.** Strongly nonlinear effects on internal solitary waves in three-layer flows // J. Fluid Mech. 2020. V. 883. A16.
17. **Chesnokov A. A., Liapidevskii V. Yu.** Hyperbolic model of internal solitary waves in a three-layer stratified fluid // Europ. Phys. J. Plus. 2020. V. 135. 590.
18. **Ляпидевский В. Ю., Турбин М. В., Храпченков Ф. Ф., Кукарин В. Ф.** Нелинейные внутренние волны в многослойной мелкой воде // ПМТФ. 2020. Т. 61, № 1. С. 53–62.
19. **Le Metayer O., Gavrilyuk S., Hank S.** A numerical scheme for the Green — Naghdi model // J. Comput. Phys. 2010. V. 229. P. 2034–2045.
20. **Ляпидевский В. Ю., Гаврилова К. Н.** Дисперсионные эффекты и блокировка потока при обтекании порога // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 1. С. 45–58.
21. **Favrie N., Gavrilyuk S.** A rapid numerical method for solving Serre — Green — Naghdi equations describing long free surface gravity waves // Nonlinearity. 2017. V. 30. P. 2718–2736.
22. **Chesnokov A. A., Nguyen T. H.** Hyperbolic model for free surface shallow water flows with effects of dispersion, vorticity and topography // Comput. Fluids. 2019. V. 189. P. 13–23.
23. **Гаврилов Н. В., Ляпидевский В. Ю., Ляпидевская З. А.** Влияние дисперсии на распространение внутренних волн в шельфовой зоне // Фундам. и прикл. гидрофизика. 2013. Т. 6, № 2. С. 25–34.
24. **Nessyahu H., Tadmor E.** Non-oscillatory central differencing schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1990. V. 87. P. 408–463.

*Поступила в редакцию 8/XII 2020 г.,
после доработки — 8/XII 2020 г.
Принята к публикации 28/XII 2020 г.*