

## ВЛИЯНИЕ ТОНКОГО ПОКРЫТИЯ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ С УЧЕТОМ ФРИКЦИОННОГО ТЕПЛООБРАЗОВАНИЯ

Р. Д. Кульчицкий-Жигайло, А. А. Евтушенко

Львовский государственный университет им. И. Франко, 290602 Львов

Рассмотрена задача термоупругости для слоя конечной толщины, одна из поверхностей которого подвергается воздействию нормального давления и теплового потока. Найдена взаимосвязь между вертикальными перемещениями поверхности слоя, поверхностной температурой и возмущающими факторами. Получены соответствующие зависимости для слоя малой толщины. В качестве примера исследована осесимметричная контактная задача для жесткого теплопроводного основания, на поверхность которого нанесено тонкое упругое покрытие.

**Введение.** Анализ напряженного состояния слоистых сред при совместном воздействии механической и температурной нагрузки очень важен с точки зрения различных практических приложений. Сюда относятся защитное напыление, слоистые композиционные среды, тонкие пленки и т. п. В настоящей работе исследуется влияние фрикционной нагрузки на напряженное состояние кусочно-однородного полупространства. Для решения соответствующей граничной задачи термоупругости используется двойное интегральное преобразование Фурье по пространственным переменным.

Осесимметричные контактные задачи для сферического индентора, взаимодействующего с однородным упругим полупространством, рассмотрены в [1–5]. Решения для кусочно-однородного полупространства отсутствуют. Отметим, что изотермические (при отсутствии нагрева) контактные задачи для слоя и полупространства исследовались в [6–8].

**1. Решение граничной задачи термоупругости для кусочно-однородного полупространства.** Рассмотрим кусочно-однородное полупространство, состоящее из слоя толщины  $h$ , покоящегося на поверхности упругого полупространства. Данную механическую систему отнесем к прямоугольной системе координат  $x, y, z$  (рис. 1). Поверхность

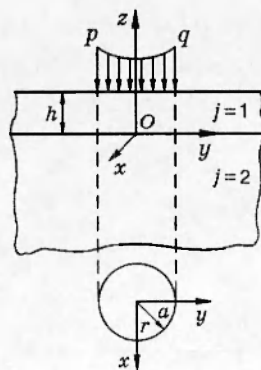


Рис. 1

слоя  $z = h$  в конечной области  $\Omega$  находится под воздействием нормального давления  $p$  и теплового потока  $q$ . Вне этой области поверхность слоя не нагружена и теплоизолирована. Механический и тепловой контакт слоя и полупространства идеальный.

Исследование задачи сводится к решению уравнений Дюамеля — Неймана [9]:

$$(1 - 2\nu_j)\nabla^2 \mathbf{u}^{(j)} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}^{(j)} = 2\alpha_j(1 + \nu_j)a\nabla T^{(j)}, \quad j = 1, 2. \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{u}^{(j)} = (au_{\xi}^{(j)}, au_{\eta}^{(j)}, au_{\zeta}^{(j)})$  — вектор упругого перемещения;  $T^{(j)}$  — температура;  $\nabla \equiv (\partial/\partial\xi, \partial/\partial\eta, \partial/\partial\zeta)$ ;  $\nu_j, \alpha_j$  — коэффициенты Пуассона и линейного температурного расширения;  $\xi = x/a$ ;  $\eta = y/a$ ;  $\zeta = z/a$ ;  $a$  — характерный линейный размер области  $\Omega$ . Индексы  $j = 1, 2$  здесь и далее относятся к слою и полупространству соответственно.

Температуры  $T^{(j)}$  находим из решения уравнений теплопроводности

$$\nabla^2 T^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (1.2)$$

Граничные условия на поверхности слоя  $\zeta = h^* = h/a$  следующие:

$$\sigma_{\zeta\zeta}^{(1)} = \begin{cases} -p(\xi, \eta), & (\xi, \eta) \in \Omega, \\ 0, & (\xi, \eta) \notin \Omega; \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)} = \sigma_{\eta\zeta}^{(1)} = 0; \quad (1.4)$$

$$K_1 \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \zeta} = \begin{cases} aq(\xi, \eta), & (\xi, \eta) \in \Omega, \\ 0, & (\xi, \eta) \notin \Omega \end{cases} \quad (1.5)$$

( $K_j$  ( $j = 1, 2$ ) — коэффициенты теплопроводности). На поверхности раздела материалов  $\zeta = 0$  перемещения, напряжения, температуры и тепловые потоки непрерывны:

$$u_{\xi}^{(1)} = u_{\xi}^{(2)}, \quad u_{\eta}^{(1)} = u_{\eta}^{(2)}, \quad u_{\zeta}^{(1)} = u_{\zeta}^{(2)}; \quad (1.6)$$

$$\sigma_{\zeta\zeta}^{(1)} = \sigma_{\zeta\zeta}^{(2)}, \quad \sigma_{\xi\zeta}^{(1)} = \sigma_{\xi\zeta}^{(2)}, \quad \sigma_{\eta\zeta}^{(1)} = \sigma_{\eta\zeta}^{(2)}; \quad (1.7)$$

$$T^{(1)} = T^{(2)}. \quad (1.8)$$

$$K_1 \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \zeta} = K_2 \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \zeta}. \quad (1.9)$$

Частное решение уравнений термоупругости (1.1) имеет вид [10]

$$u_{\xi}^{(j)} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi}, \quad u_{\eta}^{(j)} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta}, \quad u_{\zeta}^{(j)} = -\frac{\partial \varphi_j}{\partial \zeta}, \quad (1.10)$$

где термоупругие потенциалы  $\varphi_j$  ( $j = 1, 2$ ) связаны с температурами  $T^{(j)}$  соотношениями

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \eta^2} = \alpha_j(1 + \nu_j)T^{(j)}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \zeta^2} = -\alpha_j(1 + \nu_j)T^{(j)}. \quad (1.11)$$

Термоупругие потенциалы  $\varphi_j$  ( $j = 1, 2$ ) генерируют поля напряжений

$$\sigma_{\xi\xi}^{(j)} = -2\mu_j \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \eta^2}, \quad \sigma_{\eta\eta}^{(j)} = -2\mu_j \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \xi^2}, \quad \sigma_{\xi\eta}^{(j)} = -2\mu_j \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \xi \partial \eta}, \quad (1.12)$$

$$\sigma_{\zeta\zeta}^{(j)} = \sigma_{\xi\zeta}^{(j)} = \sigma_{\eta\zeta}^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2$$

( $\mu_j$  — коэффициенты сдвига).

Система однородных дифференциальных уравнений (1.1) эквивалентна уравнениям [11]

$$\nabla^2 \theta^{(j)} = 0; \quad (1.13)$$

$$\nabla^2 \chi^{(j)} = 0; \quad (1.14)$$

$$\nabla^2 u_\zeta^{(j)} = -d_j \frac{\partial \theta^{(j)}}{\partial \zeta}, \quad d_j = (1 - 2\nu_j)^{-1}, \quad (1.15)$$

где

$$\theta^{(j)} = \frac{\partial u_\xi^{(j)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\eta^{(j)}}{\partial \eta} + \frac{\partial u_\zeta^{(j)}}{\partial \zeta}; \quad \chi^{(j)} = \frac{\partial u_\eta^{(j)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_\xi^{(j)}}{\partial \eta}.$$

С использованием условия (1.4) из уравнения (1.14) следует  $\chi^{(j)} = 0$ . Решение дифференциальных уравнений (1.13), (1.15) получим путем применения интегрального преобразования Фурье по безразмерным переменным  $\xi$  и  $\eta$ :

$$\hat{\theta}^{(1)}(\alpha, \beta, \zeta) = C_1(\alpha, \beta) \operatorname{ch}(s\zeta) + C_2(\alpha, \beta) \operatorname{ch}[s(h^* - \zeta)]; \quad (1.16)$$

$$\hat{u}_\zeta^{(1)}(\alpha, \beta, \zeta) = -(1/2)d_1 C_1(\alpha, \beta) \zeta \operatorname{ch}(s\zeta) + (1/2)d_1 C_2(\alpha, \beta) (h^* - \zeta) \operatorname{ch}[s(h^* - \zeta)] + \\ + D_1(\alpha, \beta) \operatorname{sh}(s\zeta) + D_2(\alpha, \beta) \operatorname{sh}[s(h^* - \zeta)]; \quad (1.17)$$

$$\hat{\theta}^{(2)}(\alpha, \beta, \zeta) = C_3(\alpha, \beta) \exp(s\zeta); \quad (1.18)$$

$$\hat{u}_\zeta^{(2)}(\alpha, \beta, \zeta) = -(1/2)d_2 C_3(\alpha, \beta) \zeta \exp(s\zeta) + D_3(\alpha, \beta) \exp(s\zeta). \quad (1.19)$$

Здесь

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}^{(j)} \\ \hat{u}_\zeta^{(j)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \theta^{(j)} \\ u_\zeta^{(j)} \end{bmatrix} \exp[-i(\alpha\xi + \beta\eta)] d\xi d\eta, \quad s = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (1.20)$$

Компоненты перемещений и напряжений в пространстве изображений интегрального преобразования Фурье (1.20) удовлетворяют соотношениям

$$\hat{u}_\xi^{(j)} = \frac{i}{2\alpha} \left( \frac{\partial \hat{u}_\zeta^{(j)}}{\partial \zeta} - \hat{\sigma}_{\zeta\xi}^{(j)} \right), \quad \hat{u}_\eta^{(j)} = \frac{i}{2\beta} \left( \frac{\partial \hat{u}_\zeta^{(j)}}{\partial \zeta} - \hat{\sigma}_{\zeta\eta}^{(j)} \right); \quad (1.21)$$

$$\hat{\sigma}_{\zeta\zeta}^{(j)} = 2\mu_j \left( 2 \frac{\partial \hat{u}_\zeta^{(j)}}{\partial \zeta} + (d_j - 1) \hat{\theta}^{(j)} \right); \quad (1.22)$$

$$\hat{\sigma}_{\xi\xi}^{(j)} = \frac{i}{\alpha} \mu_j \left( (s^2 + 2\alpha^2) \hat{u}_\zeta^{(j)} - (1 + d_j) \frac{\partial \hat{\theta}^{(j)}}{\partial \zeta} \right); \quad (1.23)$$

$$\hat{\sigma}_{\eta\eta}^{(j)} = \frac{i}{\beta} \mu_j \left( (s^2 + 2\beta^2) \hat{u}_\zeta^{(j)} - (1 + d_j) \frac{\partial \hat{\theta}^{(j)}}{\partial \zeta} \right). \quad (1.24)$$

Решение уравнений (1.1) является суперпозицией решений (1.10), (1.12), (1.16)–(1.19), (1.21)–(1.24). Подставляя это решение в граничные условия (1.3), (1.4), (1.6), (1.7), получим систему шести алгебраических уравнений для искомых функций  $C_k, D_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) вида

$$[A](C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3) = (0, \hat{p}/\mu_1, F_1, F_2, 0, 0). \quad (1.25)$$

Выражения для коэффициентов матрицы  $A$  и правых частей системы ввиду их громоздкости не приводятся.

После решения системы уравнений (1.25) из соотношений (1.10), (1.11), (1.17) найдем

$$\hat{u}_\zeta^{(1)}(\alpha, \beta, h^*) = \frac{1 + d_1}{2s} C_1(\alpha, \beta) + \frac{\alpha_1(1 + \nu_1)}{s^2} \frac{\partial \hat{T}^{(1)}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=h^*}. \quad (1.26)$$

Здесь

$$C_1(\alpha, \beta) = C_1^*(\alpha, \beta)/C(\alpha, \beta);$$

$$C_1^*(\alpha, \beta) = -\frac{\hat{F}(\alpha, \beta)}{\mu_1} [\mu^*(1 + d_1)(1 + d_2) \operatorname{ch}(2 \operatorname{sh}^*) + d_1(\mu^* - 1)(d_2 + 2\mu^* + d_2\mu^*) \operatorname{sh}^* + \\ + (2\mu^* + 2d_2 + 2d_1\mu^* + d_1d_2(1 + \mu^{*2})) \operatorname{sh}(\operatorname{sh}^*) \operatorname{ch}(\operatorname{sh}^*)] - 2sF_1(\alpha, \beta)[d_2(1 + d_1) \operatorname{ch}(\operatorname{sh}^*) + \\ + \mu^*d_1(1 + d_2)[\operatorname{sh}(\operatorname{sh}^*) + \operatorname{sh}^*\operatorname{ch}(\operatorname{sh}^*)] + d_1(\mu^* + d_2) \operatorname{sh}^* \operatorname{sh}(\operatorname{sh}^*)] - \\ - 2F_2(\alpha, \beta)[\mu^*d_1(1 + d_2) \operatorname{sh}^* \operatorname{sh}(\operatorname{sh}^*) + (d_1\mu^* - d_2) \operatorname{sh}(\operatorname{sh}^*) + d_1(\mu^* + d_2) \operatorname{sh}^* \operatorname{ch}(\operatorname{sh}^*)];$$

$$C(\alpha, \beta) = d_1(\mu^* + 2d_2 + d_1d_2) \operatorname{ch}^2(\operatorname{sh}^*) + d_1\mu^*(1 + 2\mu^*d_1 + \mu^*d_1d_2) \operatorname{sh}^2(\operatorname{sh}^*) + \\ + 2d_1\mu^*(1 + d_1)(1 + d_2) \operatorname{sh}(\operatorname{sh}^*) \operatorname{ch}(\operatorname{sh}^*) - d_1^2(\mu^* - 1)(d_2 + 2\mu^* + d_2\mu^*)(\operatorname{sh}^*)^2 + (d_2 - d_1\mu^*);$$

$$F_1(\alpha, \beta) = -\frac{1}{s^2} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \alpha_j(1 + \nu_j) \frac{\partial \hat{T}^{(j)}(\alpha, \beta, \zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0};$$

$$F_2(\alpha, \beta) = \sum_{j=1}^2 (-1)^j \alpha_j(1 + \nu_j) \hat{T}^{(j)}(\alpha, \beta, \zeta) \Big|_{\zeta=0}; \quad \mu^* = \mu_1/\mu_2.$$

После решения граничной задачи теплопроводности (1.2), (1.5), (1.8), (1.9) поверхностную температуру в пространстве изображений интегрального преобразования Фурье представим в виде

$$\hat{T}^{(1)}(\alpha, \beta, h^*) = \frac{\hat{q}(\alpha, \beta)a}{K_2s} + \frac{a}{K_2s} \left( \frac{1}{K^*} - K^* \right) \frac{\hat{q}(\alpha, \beta) \operatorname{sh}(\operatorname{sh}^*)}{\operatorname{ch}(\operatorname{sh}^*) + K^* \operatorname{sh}(\operatorname{sh}^*)} \quad (K^* = K_1/K_2). \quad (1.27)$$

Отметим, что в случае соответствующей изотермической задачи ( $q = 0$ ) при  $\mu^* \rightarrow 0$  из соотношения (1.26) следует известное выражение для нормальных поверхностных перемещений упругого слоя, жестко заземленного по основанию [12].

Для малой толщины слоя ( $h^* \ll 1$ ) асимптотический анализ соотношений (1.26), (1.27) методом [13] приводит к формулам

$$u_\zeta^{(1)}(\xi, \eta, h^*) \approx -\frac{1 - \nu_2}{4\pi^2\mu_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i(\alpha\xi + \beta\eta)]}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} d\alpha d\beta \int_{\Omega} p(x, y) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] dx dy + \\ + \frac{\delta_2 a}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i(\alpha\xi + \beta\eta)]}{\alpha^2 + \beta^2} d\alpha d\beta \int_{\Omega} q(x, y) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] dx dy - \frac{(d_2 + \mu^*)(d_2 - d_1\mu^*)}{\mu_1(1 + d_1)d_2^2} \times \\ \times h^* p(\xi, \eta) + \left[ \frac{2d_1\mu^* - d_2 + d_1d_2}{(1 + d_1)d_2} \left( \varepsilon_1 - \frac{\delta_2}{K^*} \right) + \delta_1 - \delta_2 \right] K_1 T^{(1)}(\xi, \eta, h^*); \quad (1.28)$$

$$T^{(1)}(\xi, \eta, h^*) = \frac{a}{4\pi^2 K_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i(\alpha\xi + \beta\eta)]}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} d\alpha d\beta \int_{\Omega} q(x, y) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] dx dy + \\ + \frac{a}{K_2} \left( \frac{1}{K^*} - K^* \right) h^* q(\xi, \eta) \quad (\delta_i = \alpha_i(1 + \nu_i)/K_i). \quad (1.29)$$

Последние два слагаемых в правой части соотношения (1.28) и последнее слагаемое в (1.29) определяют влияние тонкого упругого теплопроводящего покрытия. При  $h^* \rightarrow 0$  из (1.28), (1.29) получим решение для полупространства.

Возникает естественный вопрос: при какой относительной толщине слоя  $h^*$  можно пользоваться решениями (1.28), (1.29)? Математически строго аргументированный ответ на этот вопрос дать сложно. Для получения приближенных оценок рассмотрим вспомогательную осесимметричную граничную задачу теплопроводности (1.2), (1.5), (1.8), (1.9) при  $q(\xi, \eta) = q = \text{const}$  ( $\Omega$  — круг радиуса  $a$ ). Точное решение этой задачи при  $\zeta = h^*$  имеет вид

$$T^{(1)}(\rho, h^*) = \frac{aq}{K_2} \int_0^\infty s^{-1} J_1(s) J_0(s\rho) \left[ 1 + \left( \frac{1}{K^*} - K^* \right) \frac{\text{sh}(\text{sh}^*)}{\text{ch}(\text{sh}^*) + K^* \text{sh}(\text{sh}^*)} \right] ds, \quad (1.30)$$

а приближенное, полученное методом [13], дается формулой

$$T^{(1)}(\rho, h^*) = \frac{aq}{K_2} \left[ \int_0^\infty s^{-1} J_1(s) J_0(s\rho) ds + \left( \frac{1}{K^*} - K^* \right) h^* \right], \quad (1.31)$$

где  $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ ;  $J_0(\cdot)$ ,  $J_1(\cdot)$  — функции Бесселя первого рода.

Решения (1.30), (1.31) совпадают при условии

$$\frac{1}{h} \int_0^\infty s^{-1} J_1(s) J_0(s\rho) \frac{\text{sh}(\text{sh}^*)}{\text{ch}(\text{sh}^*) + K^* \text{sh}(\text{sh}^*)} ds \approx 1, \quad \rho < 1. \quad (1.32)$$

Таким образом, соотношение (1.32) является критерием для определения таких значений  $h^*$ , для которых возможно использование приближенного решения (1.31). Численный анализ показал, что допустимый диапазон  $h^*$  существенно зависит от параметра  $K^*$ . Так,  $h^* < 0,2$  при  $K^* = 0,1$ ,  $h^* < 0,05$  при  $K^* = 1$ ,  $h^* < 0,01$  при  $K^* = 5$ . Это объясняется тем, что коэффициент при  $(\text{sh}^*)^2$  в разложении  $T^{(1)}(s, h^*)$  в ряд Маклорена по степеням  $\text{sh}^*$  возрастает с увеличением  $K^*$ .

На основании аналогии между формулами (1.28), (1.29) можно сделать вывод о подобии влияния на точность решения безразмерных параметров  $K^*$  и  $\mu^*$ . Следовательно, предложенная методика наиболее эффективна для механической системы, в которой жесткость и теплопроводность тонкого покрытия существенно меньше соответствующих характеристик основания.

**2. Осесимметричная контактная задача с учетом теплообразования от трения.** В качестве примера рассмотрим взаимодействие двух тел, контактирующих под воздействием прижимающей силы  $P$  по круговой площадке радиуса  $a$ . Одно из тел движется вдоль поверхности другого с постоянной скоростью  $v$ . Движущееся тело неоднородно: оно состоит из жесткого теплопроводного основания, на поверхность которого нанесено тонкое упругое покрытие толщины  $h$ .

В результате трения на площадке контакта генерируется тепло по закону

$$q(\rho) = \begin{cases} fvp(\rho), & \rho \leq 1, \\ 0, & \rho > 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

( $f$  — коэффициент трения,  $p$  — контактное давление,  $\rho = r/a$ ).

Считаем, что:

а) касательные напряжения, действующие на площадке контакта, не влияют на вертикальные перемещения [2, 14],

б) неподвижное тело является жестким теплоизолятором, вследствие чего все выделяемое на площадке контакта тепло идет на нагревание подвижного тела.

Неизвестное распределение давления  $p(\rho)$  находим из условия контакта

$$u_{\zeta}^{(1)} = \frac{\rho^2}{2R} - \Delta, \quad \rho \leq 1 \quad (2.2)$$

( $R \gg a$  — радиус кривизны поверхности подвижного тела,  $\Delta$  — сближение тел) и условия равновесия

$$2\pi a^2 \int_0^1 \rho p(\rho) d\rho = P. \quad (2.3)$$

Переходя к пределу при  $\mu^* \rightarrow 0$ ,  $\alpha_2 \rightarrow 0$ , из соотношения (1.28) получим упругое перемещение поверхности подвижного тела в виде

$$u_{\zeta}^{(1)}(\rho, h^*) = -\frac{h^*}{\mu_1(1+d_1)} p(\rho) + \frac{2d_1\alpha_1(1+\nu_1)h^*}{1+d_1} T^{(1)}(\rho, h^*), \quad \rho \geq 0. \quad (2.4)$$

На основе уравнения (1.29) для контактной температуры имеем

$$T^{(1)}(\rho, h^*) = \frac{a}{K_2} \left( \frac{1}{K^*} - K^* \right) h^* q(\rho) + \frac{a}{K_2} \int_0^{\infty} J_0(s\rho) ds \int_0^1 \tau q(\tau) J_0(\tau s) d\tau, \quad \rho \geq 0. \quad (2.5)$$

Подставляя выражения (2.1), (2.5) в формулу (2.4), а полученный результат — в граничное условие (2.2), придем (отбросив члены порядка  $h^{*2}$ ) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно контактного давления  $p(\rho)$ :

$$p(\rho) = \beta^* a \int_0^{\infty} J_0(s\rho) ds \int_0^1 \tau p(\tau) J_0(\tau s) d\tau + \frac{\mu_1(1+d_1)}{h^*} \left( \Delta - \frac{a\rho^2}{2R} \right), \quad 0 \leq \rho \leq 1. \quad (2.6)$$

Здесь  $\beta^* = \delta_1 f v K^* / \gamma$ ;  $\gamma = (1 - 2\nu_1) / (2\mu_1)$ .

В случае слегка искривленной поверхности подвижного тела ( $R \neq 0$ ) контактное давление должно удовлетворять условию непрерывности  $p(1) = 0$ , из которого находим

$$\frac{\mu_1(1+d_1)}{h^*} \Delta = \frac{\mu_1(1+d_1)a}{2h^*R} - \beta^* a \int_0^{\infty} J_0(s) ds \int_0^1 \tau p(\tau) J_0(\tau s) d\tau. \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.6), запишем

$$p(\rho) = \frac{\mu_1(1+d_1)a}{2h^*R} (1 - \rho^2) + \beta^* a \int_0^{\infty} [J_0(s\rho) - J_0(s)] ds \int_0^1 \tau p(\tau) J_0(\tau s) d\tau, \quad 0 \leq \rho \leq 1. \quad (2.8)$$

Поскольку интегральное уравнение (2.8) по своей структуре сходно с уравнением, полученным в [5], можно сделать вывод о существовании критического значения радиуса площадки контакта, достигаемого при  $P \rightarrow \infty$  или  $R \rightarrow \infty$ . Используя методику, предложенную в [5], имеем  $a_{cr} = 2,64/\beta^* = 2,64\gamma/(\delta_1 f v K^*)$ .

Решение уравнения (2.8) ищем в виде

$$p(\rho) = \frac{\mu_1(1+d_1)a}{2h^*R} (1 - \rho^2) \tilde{F}^*(\rho),$$

где функция  $p^*(\rho)$  удовлетворяет уравнению

$$p^*(\rho) = 1 + \beta^* a \int_0^\infty \frac{J_0(s\rho) - J_0(s)}{1 - \rho^2} ds \int_0^1 \tau p^*(\tau)(1 - \tau^2) J_0(\tau s) d\tau, \quad 0 \leq \rho \leq 1. \quad (2.9)$$

Для построения численного алгоритма решения интегрального уравнения (2.9) разобьем интервал  $[0, 1]$  на  $N$  участков точками  $a_m = k/N$  ( $m = 0, 1, \dots, N$ ), предполагая, что  $p^*(\rho) = p_m^* = \text{const}$  при  $a_{m-1} \leq \rho \leq a_m$ . После интегрирования приходим к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=1}^N b_{km} p_m^* = 1, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Здесь

$$b_{km} = \delta_{km} - \beta^* a (1 - \rho_k^2)^{-1} [B(\rho_k, a_m) - B(\rho_k, a_{m-1})];$$

$$B(\rho, a) = \begin{cases} a(1 - a^2)F(1/2, -1/2; 1; \rho^2/a^2) + (2/3)a^3 F(1/2, -3/2; 1; \rho^2/a^2) - \\ - (1/2)a^2(1 - a^2)F(1/2, 1/2; 2; a^2) - (1/4)a^4 F(1/2, 1/2; 3; a^2), & \rho < a, \\ (1/2)a^2(1 - a^2)\rho^{-1} F(1/2, 1/2; 2; a^2/\rho^2) + (1/4)a^4 \rho^{-1} F(1/2, 1/2; 3; a^2/\rho^2) - \\ - (1/2)a^2(1 - a^2)F(1/2, 1/2; 2; a^2) - (1/4)a^4 F(1/2, 1/2; 3; a^2), & \rho > a; \end{cases}$$

$\rho = (k - 1/2)/N$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ );  $\delta_{km}$  — символ Кронекера;  $F$  — гипергеометрическая функция Гаусса [15].

Расчеты показали, что отношение  $P_H/P$  ( $P_H$  — сила, необходимая для образования площадки контакта радиуса  $a$  в соответствующей изотермической задаче Герца) линейно зависит от параметра  $\beta^* a$ :

$$P_H/P = 1 - \beta^* a/2,64.$$

Распределение безразмерных контактных напряжений  $p(\rho)/p(0)$  для некоторых значений параметра  $\beta^* a$  показано на рис. 2.

Исследуем также поведение решения задачи для случая плоского основания подвижного тела ( $1/R = 0$ ). Тогда радиус  $a$  площадки контакта будет фиксирован. Представив решение уравнения (2.6) в виде

$$p(\rho) = \mu_1(1 + d_1)\Delta p^*(\rho)/h^*, \quad (2.10)$$

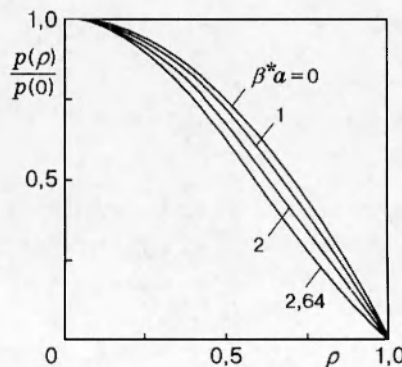


Рис. 2

получим

$$p^*(\rho) = 1 + \beta^* a \int_0^\infty J_0(s\rho) ds \int_0^1 \tau p^*(\tau) J_0(\tau s) d\tau, \quad 0 \leq \rho \leq 1. \quad (2.11)$$

Подставляя в условие статики (2.3) выражение (2.10), находим

$$\Delta = \frac{P_1}{P^*} \left( P_1 = \frac{Ph^*}{2\pi a^2 \mu_1 (1 + d_1)}, \quad P^* = \int_0^1 \rho p^*(\rho) d\rho \right). \quad (2.12)$$

Из формул (2.12) следует, что величина  $P_1$  фиксирована, а  $P^*$  определяется решением  $p^*(\rho)$  уравнения (2.11) и, следовательно, зависит от параметра  $\beta^* a$ .

Численное решение интегрального уравнения (2.11) получено с помощью вышеизложенного алгоритма.

Исследования показали, что:

1) при  $0 \leq \beta^* a < 1,12$  имеем  $P^* \geq 0$ , причем  $P^* \rightarrow \infty$  при  $\beta^* a \rightarrow 1,12$ . В результате  $\Delta > 0$ , причем  $\Delta \rightarrow 0$  при  $\beta^* a \rightarrow 1,12$ . Таким образом, для данного интервала изменения параметра  $\beta^* a$  силовые деформации доминируют над тепловыми;

2) при  $\beta^* a > 1,12$  имеем  $\Delta < 0$ , что свидетельствует о преобладании тепловых деформаций над силовыми. Если к тому же  $\beta^* a > 2,64$ , то происходит отрыв краев упругого тела от поверхности полупространства. Неизвестный радиус площадки контакта находим из выражения  $\beta^* a = 2,64$ , а распределение контактного давления — из уравнения

$$p(\rho) = 2,64 \int_0^\infty [J_0(s\rho) - J_0(s)] ds \int_0^1 \tau p(\tau) J_0(\tau s) d\tau \quad (0 \leq \rho \leq 1) \quad (2.13)$$

и условия равновесия штампа (2.3).

Нетривиальное решение уравнения Фредгольма второго рода (2.13) существует, поскольку значение 2,64 совпадает с первым характеристическим числом этого уравнения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Barber J. R. Thermoelastic contact of a rotating sphere and a half-space // *Wear*. 1975. V. 35. P. 283–289.
2. Barber J. R. Some thermoelastic contact problems involving frictional heating // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 1976. V. 29. P. 1–13.
3. Генералов М. Б., Кудрявцев Б. А., Партон В. З. Контактная задача термоупругости для вращающихся тел // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1976. № 3. С. 46–52.
4. Грилицкий Д. В., Кульчицкий-Жигайло Р. Д. Осесимметричная контактная задача термоупругости для вращающихся тел // *Физ.-хим. механика материалов*. 1991. № 3. С. 93–97.
5. Yevtushenko A. A., Kulchytsky-Zhyhailo R. D. Determination of limiting radii of the contact area in axi-symmetric contact problems with frictional heat generation // *J. Mech. Phys. Solids*. 1985. V. 43. P. 599–604.
6. Keer L. M., Dundurs J., Tsai K. C. Problems involving a receding contact between a layer and a half-space // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1972. V. 94. P. 1115–1120.
7. Keer L. M., Luk V. K. Stress analysis of an elastic layer attached to an elastic half-space of the same material // *Int. J. Eng. Sci.* 1976. V. 14. P. 297–302.



8. **Александров В. М., Мхитарян С. М.** Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983.
9. **Nowacki W.** Thermoelasticity. Warsaw: Polish Sci. Publ., 1986.
10. **Barber J. R., Comninou M.** Thermoelastic contact problems // Thermal Stresses 3 / Ed. by R. V. Hetnarski. Amsterdam: Elsevier, 1989.
11. **Галазюк В. А.** О напряженно-деформированном состоянии упругой пластины с некруговым цилиндрическим вырезом // Докл. АН УССР. Сер. А. 1985. № 3. С. 20–24.
12. **Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.** Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
13. **Коваленко Е. В.** Некоторые контактные задачи для тел с тонкими пористо-упругими покрытиями. М., 1990 (Препр. / Ин-т проблем механики АН СССР; № 458).
14. **Джонсон К.** Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989.
15. **Абрамовиц М., Стиган И.** Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.

*Поступила в редакцию 26/II 1996 г.,  
в окончательном варианте — 2/VII 1996 г.*

---