

AMS subject classification: 35A35, 35A40, 65D06, 65N15, 65N22

## Об интерполяционном операторе четвертого порядка точности для разностного решения трехмерного уравнения Лапласа

А.А. Досиев<sup>1</sup>, Э. Целикер<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Mechanics and Mathematics, Western Caspian University, 27 Istiglaliyyat Str., Baku AZ1001, Azerbaijan

<sup>2</sup>University of Leicester, University Road, Leicester, LE1 7RH, UK

E-mails: dosiyevadiguzel@gmail.com (Досиев А.А.), ec403@leicester.ac.uk (Целикер Э.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 17, 2024.

Досиев А.А., Целикер Э. Об интерполяционном операторе четвертого порядка точности для разностного решения трехмерного уравнения Лапласа // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2024. — Т. 27, № 1. — С. 33–48.

Для получения решения четвертого порядка точности задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольном параллелепипеде предлагается трехмерный (3D) оператор согласования. Оператор строится на основе однородных ортогонально-гармонических многочленов в трех переменных и использует разностное решение задачи на кубической сетке для получения приближенного решения между узлами сетки. Разностное решение в узлах, используемых оператором интерполяции, вычисляется по новой формуле, разработанной на основе дискретного преобразования Фурье. Эта формула может применяться прямо к требуемым узлам без решения всей системы разностных уравнений. Четвертый порядок точности построенных численных инструментов демонстрируется на численном примере.

DOI: 10.15372/SJNM20240103

EDN: QVITJA

**Ключевые слова:** 3D уравнение Лапласа, кубические сетки на параллелепипеде, 15-и точечная схема, интерполяция для гармонических функций, дискретное преобразование Фурье.

Dosiyev A.A., and Celiker E. On the fourth order accurate interpolation operator for the difference solution of the 3-dimensional Laplace equation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2024. — Vol. 27, № 1. — P. 33–48.

A three-dimensional (3D) matching operator is proposed for a fourth-order accurate solution of a Dirichlet problem of Laplace's equation in a rectangular parallelepiped. The operator is constructed based on homogeneous, orthogonal-harmonic polynomials in three variables, and employs a cubic grid difference solution of the problem for the approximate solution inbetween the grid nodes. The difference solution on the nodes used by the interpolation operator is calculated by a novel formula, developed on the basis of the discrete Fourier transform. This formula can be applied on the required nodes directly, without requiring the solution of the whole system of difference equations. The fourth-order accuracy of the constructed numerical tools is demonstrated further through a numerical example.

**Keywords:** 3D Laplace equation, cubic grids on parallelepiped, 15-point scheme, interpolation for harmonic functions, discrete Fourier transform.

---

### 1. Введение

Интерполяционные многочлены имеют важные приложения в качестве операторов согласования для решения краевых задач (КЗ) методами декомпозиции области [1]. Они включают методы декомпозиции перекрывающихся областей (такие как методы

составных сеток [2–8], блочно-сеточные методы [9–14]) и различные типы комбинированных методов [15, 16], операторы согласования используют для соединения подсистем. Следовательно, для используемого интерполяционного многочлена важно иметь соответствующий порядок точности применяемого метода, сохранять основные свойства рассматриваемого дифференциального уравнения (такие как принцип максимума) и иметь легко реализуемый алгоритм.

Для 2-х мерного (2D) решения КЗ для уравнения Лапласа в [5] был построен оператор согласования четвертого порядка на квадратной сетке и применен для метода составных сеток четвертого порядка, а также для метода блочной сетки [12]. В [13, 14] на шестиугольной сетке был построен оператор согласования четвертого порядка для использования в методе блочно-шестиугольной сетки. Кроме того, в [11] был построен оператор согласования шестого порядка для метода блочной сетки, и он также использовался для метода составных сеток шестого порядка [6].

Следует отметить некоторые важные свойства упомянутых выше операторов порядка  $k$ . Эти операторы согласования (i) дают точное значение любого гармонического многочлена порядка  $(k - 1)$ , (ii) удовлетворяют принципу максимума, и (iii) для успешного применения в методах декомпозиции перекрывающихся областей они лишь должны быть определены в некоторой закрытой подобласти области решения.

В 3-х мерном случае использовался оператор согласования второго порядка в прямоугольном параллелепипеде в [4], а в [7, 8] он использовался для построения и обоснования метода составных сеток второго порядка в многограннике и призме соответственно. Несмотря на вычислительные преимущества использования численных методов более высокого порядка точности чем второй, оператор согласования высокой точности, который мог бы использоваться в методах декомпозиции перекрывающихся областей и удовлетворяющий свойствам (i)–(iii), не был создан для 3D задач. В данной статье для конечно-разностного решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа построен оператор согласования четвертого порядка в трех переменных со свойствами (i)–(iii). Используя решение 15-и точечной кубической сетки, мы строим интерполяционный оператор на основе гармонических многочленов в трех переменных.

Численная реализация решения в узлах, необходимых для построения оператора, получается путем развития метода, введенного в [17] для 5-и точечной схемы в прямоугольной области (см. также [18]). Формула в [17] была обобщена до решения 3D уравнения Лапласа в кубе с использованием 7-и точечной схемы (второго порядка аппроксимации) в [19], где решение в узлах вдоль ребер и в вершинах предполагалось равным нулю. В настоящем исследовании мы обобщаем дискретное представление Фурье, данное в [17, 19], до формулы четвертого порядка в прямоугольном параллелепипеде, вычитая соответствующие гармонические функции, чтобы сделать решение в вершинах и на ребрах равным нулю. Следовательно, благодаря разработанной методике вычитания метод может применяться для решения широкого класса КЗ для уравнения Лапласа.

Статья построена следующим образом. В пункте 2 мы дадим формальную постановку задачи и определим систему конечно-разностных уравнений, которые будут использоваться для получения приближенного решения на кубической сетке. Пункт 3 посвящен построению трехмерного оператора согласования четвертого порядка для приближенного решения уравнения Лапласа между узлами кубической сетки. В п. 4 будет подробно описан метод реализации разностного решения четвертого порядка уравнения Лапласа на построенной кубической сетке. Для демонстрации теоретических результатов, полученных в п. 5, представлен численный пример. Заключительные замечания даны в п. 6.

Краткое введение к построению оператора согласования было дано в [20].

## 2. Краевая задача в прямоугольном параллелепипеде

Пусть  $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) : 0 < x_i < a_i, i = 1, 2, 3\}$  — прямоугольный параллелепипед с гранями  $\Gamma_j$  ( $\Gamma'_j$ ),  $j = 1, 2, \dots, 6$ , включая (исключая) ребра, так что  $\Gamma = \cup_{j=1}^6 \Gamma_j$  — граница  $\Pi$ , и  $\bar{\Pi} = \Gamma \cup \Pi$ . Для  $j = 1, 2, 3$  грань  $\Gamma_j$  лежит в плоскости  $x_j = 0$ , для  $j = 4, 5, 6$  — в плоскости  $x_{j-3} = a_{j-3}$ . Кроме того,  $\gamma_{\mu\nu} = \Gamma_\mu \cap \Gamma_\nu$  — ребро, соединяющее грани  $\Gamma_\mu$  и  $\Gamma_\nu$  параллелепипеда, а  $\gamma$  — объединение ребер  $\Pi$ .

Мы говорим, что  $f \in C^{k,\lambda}(D)$ , если  $f$  имеет  $k$ -е производные на  $D$ , удовлетворяющее условию Гельдера с экспонентой  $\lambda \in (0, 1)$ .

Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta u = 0 \quad \text{на } \Pi, \quad (1)$$

$$u = \varphi_j \quad \text{на } \Gamma_j, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad (2)$$

где  $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ ,  $\varphi_j$  — заданные функции. Предположим, что

$$\varphi_j \in C^{4,\lambda}(\Gamma_j), \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad (3)$$

$$\varphi_\mu = \varphi_\nu \quad \text{на } \gamma_{\mu\nu}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial t_\mu^2} + \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial t_\nu^2} + \frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial t_{\mu\nu}^2} = 0 \quad \text{на } \gamma_{\mu\nu}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^4 \varphi_\mu}{\partial t_\mu^4} + \frac{\partial^4 \varphi_\mu}{\partial t_\mu^2 \partial t_{\mu\nu}^2} = \frac{\partial^4 \varphi_\nu}{\partial t_\nu^4} + \frac{\partial^4 \varphi_\nu}{\partial t_\nu^2 \partial t_{\nu\mu}^2} \quad \text{на } \gamma_{\mu\nu}, \quad (6)$$

где  $1 \leq \mu < \nu \leq 6$ ,  $\nu - \mu \neq 3$ ,  $t_{\mu\nu}$  — элемент  $\gamma_{\mu\nu}$ , а  $t_\mu$  и  $t_\nu$  — нормали к  $\gamma_{\mu\nu}$  на  $\Gamma_\mu$  и  $\Gamma_\nu$  соответственно.

Доказательство следующей теоремы следует из [21, теорема 2.1].

**Теорема 1.** *Решение задачи (1), (2) и  $u \in C^{4,\lambda}(\bar{\Pi})$ , если и только если удовлетворяются условия (3)–(6).*

Возьмем  $h > 0$  с целыми числами  $a_i/h \geq 4$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и образуем кубическую сетку путем пересечения плоскостей  $x_i = 0, h, 2h, \dots$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Пусть  $D^h$  — множество узлов построенной сетки, и пусть  $\Pi^h = \Pi \cap D^h$  — узлы, лежащие в  $\Pi$ . Кроме того, множество узлов, лежащих на  $j$ -й грани  $\Pi$ , обозначим  $\Gamma_j^h = \Gamma_j \cap D^h$ ,  $\Gamma'_j{}^h = \Gamma'_j \cap D^h$ ,  $\Gamma^h = \cup_{j=1}^6 \Gamma_j^h$ . Наконец, обозначим кубическую сетку, построенную в  $\bar{\Pi}$ , как  $\bar{\Pi}^h = \Pi^h \cup \Gamma^h$ .

Определим 14-и точечный оператор усреднения  $\mathcal{R}$  на кубической сетке следующим образом (см. [22]):

$$\mathcal{R}u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{56} \left( 8 \sum_{p=1}^6 u_p + \sum_{q=7}^{14} u_q \right), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \Pi^h, \quad (7)$$

где сумма  $\sum_{(k)}$  взята по узлам сетки, находящимся на расстоянии  $\sqrt{k}h$  от точки  $(x_1, x_2, x_3)$ , и  $u_p, u_q$  — значения  $u$  в соответствующих точках сетки.

Рассмотрим следующую систему сеточных уравнений, аппроксимирующих задачу Дирихле (1), (2):

$$u_h = \mathcal{R}u_h \text{ на } \Pi^h, \quad (8)$$

$$u_h = \varphi_j \text{ на } \Gamma_j^h, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad (9)$$

где  $\mathcal{R}$  — оператор, заданный путем (7).

Поскольку коэффициенты оператора  $\mathcal{R}$  являются неотрицательными и их сумма не превышает единицы, согласно принципу максимума решение системы (8), (9) существует и является единственным (см. [23, глава 4]).

Доказательство следующей теоремы имеется в [22].

**Теорема 2.** Пусть  $u$  — след решения задачи (1), (2) с условиями (3)–(6) на  $\Pi^h$ , а  $u_h$  — решение системы (8), (9). Тогда

$$\max_{\Pi^h} |u - u_h| \leq ch^4,$$

где  $c$  — постоянная, не зависящая от  $h$ .

### 3. Построение интерполяционного оператора на кубической сетке

Пусть  $B = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$  — единичный шар,  $\zeta$  — его граница,  $\bar{B} = B \cup \zeta$ . На основе формулы Тейлора любая гармоническая функция  $u \in C^{4,\lambda}(\bar{B})$  может быть представлена для любой точки  $(x_1, x_2, x_3) \in B$  в виде

$$u(x_1, x_2, x_3) = c_{0,0}H_0^0 + \sum_{n=1}^3 \left( c_{0,n}H_n^0(x_1, x_2, x_3) + \sum_{m=1}^n \left[ c_{m,n}H_n^m(x_1, x_2, x_3) + \tilde{c}_{m,n}\tilde{H}_n^m(x_1, x_2, x_3) \right] \right) + O(r^4), \quad (10)$$

где  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ . Обозначения  $H_k^0$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ),  $H_n^m$  и  $\tilde{H}_n^m$  ( $n, m = 1, 2, 3$ ) используются для гармонических многочленов, приведенных в таблице 1 (см. также [24, глава 12]). Кроме того,

$$\begin{aligned} c_{0,n} &= \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial x_3^n}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \\ c_{1,1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad c_{1,2} = \frac{1}{2!} \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad c_{1,3} = \frac{1}{3!} \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_3^2}, \\ c_{2,2} &= \frac{1}{2!} \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right), \quad c_{2,3} = \frac{1}{3!} \frac{1}{10} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_3} - \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^2 \partial x_3} \right), \\ c_{3,3} &= \frac{1}{3!} \frac{1}{15} \left( -\frac{3}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_{1,1} &= \frac{\partial u}{\partial x_2}, & \tilde{c}_{1,2} &= \frac{1}{2!} \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3}, & \tilde{c}_{1,3} &= \frac{1}{3!} \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x_2 \partial x_3^2}, \\
\tilde{c}_{2,2} &= \frac{1}{2!} \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}, & \tilde{c}_{2,3} &= \frac{1}{3!} \frac{1}{5} \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}, \\
\tilde{c}_{3,3} &= \frac{1}{3!} \frac{1}{15} \left( \frac{3}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x_2 \partial x_1^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} \right)
\end{aligned}$$

суть значения частных производных гармонической функции  $u$  в  $(0, 0, 0)$ .

**Таблица 1.** Гармонические многочлены в разложении (10)

$H_0^0$	1	$H_1^0$	$x_3$	$H_2^0$	$x_3^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2$	$H_3^0$	$x_3^3 - \frac{3}{2}x_1^2x_3 - \frac{3}{2}x_2^2x_3$
		$H_1^1$	$x_1$	$H_2^1$	$3x_1x_3$	$H_3^1$	$6x_1x_3^2 - \frac{3}{2}x_1^3 - \frac{3}{2}x_1x_2^2$
		$\tilde{H}_1^1$	$x_2$	$H_2^2$	$3x_1^2 - 3x_2^2$	$H_3^2$	$15x_1^2x_3 - 15x_2^2x_3$
				$\tilde{H}_2^1$	$3x_2x_3$	$H_3^3$	$15x_1^3 - 45x_1x_2^2$
				$\tilde{H}_2^2$	$6x_1x_2$	$\tilde{H}_3^1$	$6x_2x_3^2 - \frac{3}{2}x_1^2x_2 - \frac{3}{2}x_2^3$
						$\tilde{H}_3^2$	$30x_1x_2x_3$
						$\tilde{H}_3^3$	$45x_1^2x_2 - 15x_2^3$

Представим разложение (10) в виде

$$u(x_1, x_2, x_3) = R_1(x_1, x_2, x_3) + R_2(x_1, x_2, x_3) + R_3(x_1, x_2, x_3) + O(r^4),$$

где

$$\begin{aligned}
R_1(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{n=0}^3 c_{n,n} H_n^n(x_1, x_2, x_3) + \sum_{m=2}^3 c_{m-2,m} H_m^{m-2}(x_1, x_2, x_3), \\
R_2(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{n=1}^3 \left( \sum_{m=1}^n \tilde{c}_{m,n} \tilde{H}_n^m(x_1, x_2, x_3) \right), \\
R_3(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{n=1}^2 c_{0,2n-1} H_{2n-1}^0(x_1, x_2, x_3) + \sum_{m=2}^3 c_{m-1,m} H_m^{m-1}(x_1, x_2, x_3).
\end{aligned}$$

Можно заметить, что

- (а) многочлены  $R_1(x_1, x_2, x_3)$  являются четными по отношению как к  $x_2$ , так и  $x_3$ ;
- (б) многочлены  $R_2(x_1, x_2, x_3)$  равны нулю на плоскости  $x_1x_3$  и также являются нечетными по  $x_2$  относительно этой плоскости;
- (в) многочлены  $R_3(x_1, x_2, x_3)$  равны нулю на плоскости  $x_1x_2$  и также являются нечетными по  $x_3$  относительно этой плоскости.

Пусть  $\Omega_\delta$  — подобласть параллелепипеда  $\Pi$ , такая что расстояние до каждой точки от  $\gamma$  не меньше  $\delta > 0$  за исключением ребер  $\gamma_{\mu_0\nu_0}$ , для которых  $\varphi_{\mu_0} = \varphi_{\nu_0} = 0$ . Кроме того, пусть

$$F_3(x_1, x_2, x_3) = R_1(x_1, x_2, x_3) + R_2(x_1, x_2, x_3) + R_3(x_1, x_2, x_3). \quad (12)$$

Интерполяционный оператор четвертого порядка  $S_3^4$  строится, исходя из условия, что выражение  $S_3^4(F_3)$  дает точное значение любого гармонического многочлена  $F_3(x_1, x_2, x_3)$ , определяемого (12) в каждой точке  $P \in \Omega_\delta$ .

Пусть  $h_0 < \delta/5$  — фиксированное вещественное число и пусть  $h \leq h_0$  — размер шага сетки  $\bar{\Pi}^h$  (см. п. 2).

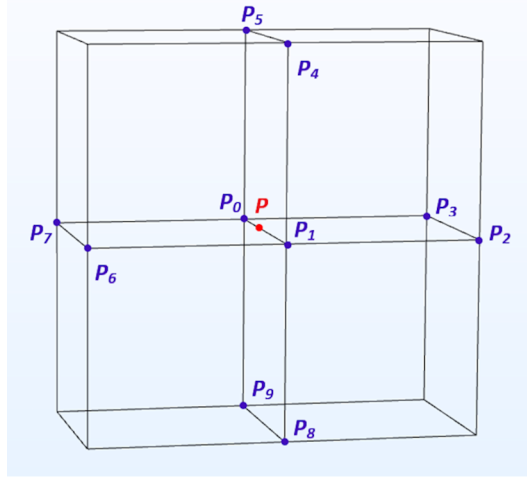
**Случай 1.** Точка  $P \in \Omega_\delta$  лежит на ребре ячейки кубической сетки.

Расположим начало прямоугольной системы координат на узле  $P_0$  и направим положительную ось  $x_1$  вдоль ребра ячейки сетки таким образом, чтобы  $P = P(\alpha h, 0, 0)$ ,  $0 < \alpha < 1$  (рисунок 1). Возьмем узлы  $P_1(h, 0, 0)$ ,  $P_2(h, h, 0)$ ,  $P_3(0, h, 0)$ ,  $P_4(h, 0, h)$ ,  $P_5(0, 0, h)$  и получим коэффициенты  $\lambda_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, 5$ , такие чтобы представление

$$u = \lambda_0 u_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 + \lambda_5 u_5 \quad (13)$$

удовлетворялось для всех гармонических многочленов  $R_1(x_1, x_2, x_3)$ , где  $u = u(P)$ ,  $u_k = u(P_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, 5$ . Это дает систему уравнений

$$\begin{aligned} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 &= 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 &= \alpha, \\ -\frac{1}{2}\lambda_1 - \lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_3 + \frac{1}{2}\lambda_4 + \lambda_5 &= -\frac{\alpha^2}{2}, \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_3 + 3\lambda_4 &= 3\alpha^2, \\ -\frac{3}{2}\lambda_1 - 3\lambda_2 + \frac{9}{2}\lambda_4 &= -\frac{3\alpha^3}{2}, \\ 15\lambda_1 - 30\lambda_2 + 15\lambda_4 &= 15\alpha^3. \end{aligned} \quad (14)$$



**Рис. 1.** Узлы, используемые в случае 1 для построения  $S_3^4 u$

Решив систему (14), мы получим

$$\begin{aligned} \lambda_0(\alpha) &= \frac{1}{3}(3 - 7\alpha + 6\alpha^2 - 2\alpha^3), \\ \lambda_1(\alpha) &= \frac{1}{3}(\alpha + 2\alpha^3), \\ \lambda_2(\alpha) &= \lambda_4(\alpha) = -\frac{1}{3}(-1 + \alpha)\alpha(1 + \alpha), \\ \lambda_3(\alpha) &= \lambda_5(\alpha) = \frac{1}{3}(-2 + \alpha)(-1 + \alpha)\alpha. \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь возьмем узлы  $P_6(h, -h, 0)$  и  $P_7(0, -h, 0)$ , которые симметричны узлам  $P_2$  и  $P_3$  соответственно, относительно плоскости  $x_1x_3$ , а также узлы  $P_8(h, 0, -h)$  и  $P_9(0, 0, -h)$ , которые симметричны  $P_4$  и  $P_5$  соответственно, относительно плоскости  $x_1x_2$  (см. рис. 1, показывающий распределение используемых узлов). Поскольку

$$R_1(x_1, x_2, 0) = -R_1(x_1, -x_2, 0), \quad R_1(x_1, 0, x_3) = -R_1(x_1, 0, -x_3), \quad (16)$$

с использованием (13) и (15) мы получим

$$R_1(P) = S_3^4 R_1(P) \equiv \sum_{k=0}^9 \mu_k(\alpha) R_1(P_k), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_0(\alpha) &= \lambda_0(\alpha), & \mu_1(\alpha) &= \lambda_1(\alpha), \\ \mu_q(\alpha) &= \mu_{q+2}(\alpha) = \mu_{q+4}(\alpha) = \mu_{q+6}(\alpha) = \lambda_q(\alpha)/2, & q &= 2, 3. \end{aligned} \quad (18)$$

Используя свойства симметричности многочленов в суммах  $R_2$  и  $R_3$ , приведенных выше, мы получим равенства

$$0 = R_2(P) = S_3^4 R_2(P), \quad 0 = R_3(P) = S_3^4 R_3(P). \quad (19)$$

На основании (12), (17) и (19) имеем

$$F_3(P) = S_3^4 F_3(P) \equiv \sum_{k=0}^9 \mu_k(\alpha) F_3(P_k). \quad (20)$$

Следовательно, построенный оператор дает точное значение любого гармонического многочлена  $F_3(x_1, x_2, x_3)$ , определяемого (12) в каждой точке  $P \in \Omega_\delta$ . Из (10), (12) и (20) следует, что для аппроксимации решения в точке  $P \in \Omega_\delta$ , лежащей на ребре сетки, с точностью четвертого порядка используем оператор  $S_3^4$ :

$$u_h = S_3^4 u_h, \quad (21)$$

где

$$S_3^4 u_h \equiv \sum_{k=0}^9 \mu_k(\alpha) u_{h;k}, \quad u_{h;k} = u_h(P_k), \quad (22)$$

и  $u_h$  — конечно-разностное решение, описанное в п. 2. Мы назовем  $P_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, 9$ , соседними к  $P$  узлами.

Легко убедиться в том, что

$$\mu_k(\alpha) \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, 9, \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^9 \mu_k(\alpha) = 1. \quad (23)$$

**Случай 2.** Точка  $P \in \Omega_\delta$  лежит на одной из граней ячейки кубической сетки.

Используя прямоугольную систему координат, определенную в случае 1, мы положим  $P = P(\alpha h, 0, \sigma h)$ ,  $0 < \alpha, \sigma < 1$ , и на ребрах ячейки сетки возьмем дополнительные точки (см. рис. 2):

$$\begin{array}{llll}
P'_0(0, 0, \sigma h), & P'_1(h, 0, \sigma h), & P'_2(h, h, \sigma h), & P'_3(0, h, \sigma h), \\
P'_4(h, 0, \sigma h + h), & P'_5(0, 0, \sigma h + h), & P'_6(h, -h, \sigma h), & \\
P'_7(0, -h, \sigma h), & P'_8(h, 0, \sigma h - h), & P'_9(0, 0, \sigma h - h), & 
\end{array}$$

которые являются вершинами искусственных кубических сеток.

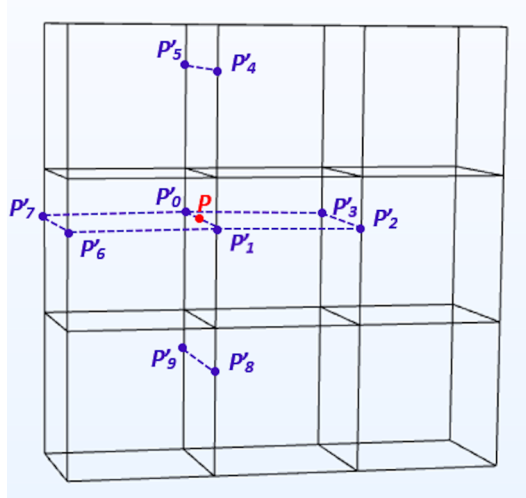
Поскольку точка  $P$  лежит на одной из граней ячейки искусственной сетки, мы можем сформировать выражение

$$S_3^4 u \equiv \sum_{l=0}^9 \mu_l(\sigma) u'_l,$$

где  $u'_l = u(P'_l)$ . Поскольку все искусственные узлы  $P'_l$ ,  $l = 0, 1, \dots, 9$ , лежат на гранях ячеек сетки, выразим все значения  $u'_l$  в терминах узловых значений функции по формуле (22) и получим выражение

$$S_3^4 u_h \equiv \sum_{l,k=0}^9 \mu_l(\sigma) \mu_k(\alpha) u_{h;l,k}, \quad (24)$$

где  $u_{h;l,k} = u_h(P_{l,k})$ ,  $P_{l,k}$  ( $l, k = 0, 1, \dots, 9$ ) являются соседними узлами  $P$  в случае 2.



**Рис. 2.** Ребра искусственной сетки, используемые в случае 2 для построения  $S_3^4 u$

**Случай 3.** Точка  $P \in \Omega_\delta$  лежит внутри ячейки сетки.

Пусть точка  $P$ , в прямоугольной системе координат случая 1, есть  $P = P(\alpha h, \beta h, \sigma h)$ ,  $0 < \alpha, \beta, \sigma < 1$ . На гранях сетки мы используем точки  $P''_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, 9$ , приведенные ниже, для образования искусственной кубической сетки (см. рис. 3, где показаны плоскости искусственной сетки):

$$\begin{array}{llll}
P''_0(0, \beta h, \sigma h), & P''_1(h, \beta h, \sigma h), & P''_2(h, \beta h + h, \sigma h), & P''_3(0, \beta h + h, \sigma h), \\
P''_4(h, \beta h, \sigma h + h), & P''_5(0, \beta h, \sigma h + h), & P''_6(h, \beta h - h, \sigma h), & \\
P''_7(0, \beta h - h, \sigma h), & P''_8(h, \beta h, \sigma h - h), & P''_9(0, \beta h, \sigma h - h). & 
\end{array}$$



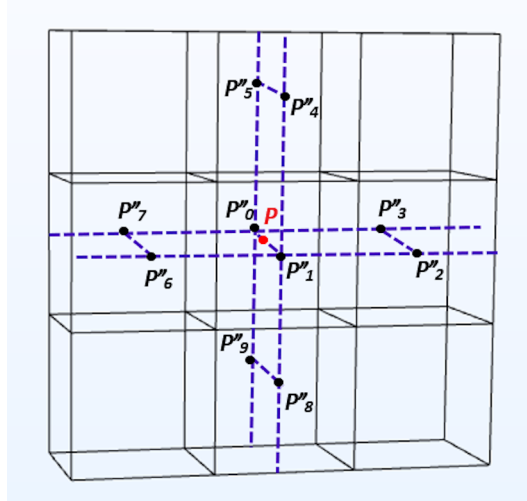
Следовательно, мы сформулируем выражение для  $u(P)$  как в случае 1:

$$S_3^4 u \equiv \sum_{m=0}^9 \mu_m(\beta) u_m'', \quad (25)$$

где  $u_m'' = u(P_m'')$ ,  $m = 0, 1, \dots, 9$ . Наконец, выразим все значения  $u(P_m'')$  через узловые значения функции  $u$ , таким образом, получим выражение

$$S_3^4 u_h \equiv \sum_{m,l,k=0}^9 \mu_m(\beta) \mu_l(\sigma) \mu_k(\alpha) u_{h;m,l,k} \quad (26)$$

для приближенного значения  $u(P)$ . Как и выше,  $u_{h;m,l,k} = u_h(P_{m,l,k})$ ,  $m, l, k = 0, 1, \dots, 9$ , и  $P_{m,l,k}$  являются соседними узлами  $P$ .



**Рис. 3.** Искусственные плоскости, используемые в случае 3 для построения  $S_3^4 u$

**Замечание 1.** Коэффициенты  $\mu_l(\sigma)$ ,  $\mu_k(\alpha)$  выражения (24) и  $\mu_m(\beta)$ ,  $\mu_l(\sigma)$ ,  $\mu_k(\alpha)$  ( $m, l, k = 0, 1, \dots, 9$ ) выражения (26) неотрицательные и их сумма равна 1.

В случаях 1, 2 и 3 предполагается, что все соседние узлы  $P$  находятся в  $\bar{\Pi}^h$ . Теперь рассмотрим случай, когда некоторые из соседних узлов выходят через границу  $\Pi$ .

**Случай 4.** Соседние узлы выходят через грани  $\bar{\Pi} \cap \Omega_\delta$ .

**Подслучай 4а.** Пусть соседние узлы выходят только через грань  $\Gamma_m$ ,  $1 \leq m \leq 6$ , и пусть  $\varphi_m = 0$ .

Для простоты представления мы предполагаем, что узлы выходят через грань  $x_3 = 0$ . Поскольку любая гармоническая функция при  $u(x_1, x_2, 0) = 0$  является нечетно продолжаемой относительно плоскости  $x_1 x_2$ , мы имеем

$$u(x_1, x_2, x_3) = -u(x_1, x_2, -x_3). \quad (27)$$

Используя (27) в выражении (26), мы получим приближение  $u(P)$  с узлами в  $\Pi^h$ .

**Подслучай 4б.** Пусть  $\varphi_m \in C^{4,\lambda}(\Gamma_m)$ ,  $0 < \lambda < 1$ . Расположим начало прямоугольной системы координат на грани  $\Gamma_m$ , так чтобы узел  $P(x_1, x_2, x_3)$  лежал на положительной

оси  $x_2$ . Решение задачи (1), (2) представим в окрестности  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq 5h$  начала новой системы координат с использованием формулы Тейлора вида (10).

Поскольку

$$R_2(x_1, 0, x_3) = 0,$$

путем разложения функции  $\varphi_m \in C^{4,\lambda}(\Gamma_m)$  в начале системы координат, используя формулу Тейлора, коэффициенты (11) можно найти с использованием граничной функции  $\varphi_m$  и ее производных.

Определим для  $x_2 > 0$  функцию

$$\tilde{u}(x_1, x_2, x_3) \equiv u(x_1, x_2, x_3) - R_1(x_1, x_2, x_3) - R_3(x_1, x_2, x_3) = R_2(x_1, x_2, x_3) + O(h^4),$$

и поскольку  $R_2(x_1, x_2, x_3)$  является нечетным по отношению к плоскости  $x_1 x_3$ , завершим определение  $\tilde{u}(x_1, x_2, x_3)$  для  $x_2 < 0$  следующим образом:

$$\tilde{u}(x_1, x_2, x_3) = -\tilde{u}(x_1, -x_2, x_3).$$

Очевидно, что  $\tilde{u}(x_1, x_2, x_3)$  равно гармоническому многочлену  $R_2(x_1, x_2, x_3)$  с точностью  $O(h^4)$ . Следовательно, создав выражение для  $S_3^4 \tilde{u}(x_1, x_2, x_3)$  и прибавив величину  $(R_1 + R_3)(P)$ , мы получим приближение четвертого порядка для  $u(P)$ .

**Подслучай 4в.** Если  $P \in \Omega_\delta$  находится на расстоянии менее  $5h$  от одной из граней  $\Pi$ , соседние узлы будут выходить через обе грани  $\Gamma_{\mu_0}$  и  $\Gamma_{\nu_0}$ , прилегающие к грани  $\gamma_{\mu_0 \nu_0}$ , где  $\varphi_{\mu_0} = \varphi_{\nu_0} = 0$ .

Предположим, например, что  $P$  находится рядом с ребром  $(0, 0, x_3)$ ,  $\delta < x_3 < a_3 - \delta$ . Поскольку  $u(0, 0, x_3) = 0$  и  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ , решение может быть продолжено относительно обеих плоскостей  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 0$  как нечетная функция. Следовательно, для узла  $(x_1, x_2, x_3) \in \Pi^h$  имеем

$$-u(-x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_2, x_3), \quad -u(x_1, -x_2, x_3) = u(x_1, x_2, x_3).$$

Кроме того, для точек  $(-x_1, -x_2, x_3)$ , участвующих в построении  $S_3^4 u_h$ , мы используем свойство

$$u(-x_1, -x_2, x_3) = -u(x_1, -x_2, x_3) = u(x_1, x_2, x_3).$$

**Замечание 2.** Несмотря на нечетное продолжение в случае 4, коэффициенты оператора остаются неотрицательными и их сумма не превышает единицы.

Пусть  $\omega_1$  обозначает множество точек  $P \in \Omega_\delta$  в случаях 1, 2 и 3, а  $\omega_2$  — множество точек в случае 4. Выразим оператор  $S_3^4$  следующим образом:

$$S_3^4(u, \varphi) = \begin{cases} S_3^4 u & \text{на } \omega_1, \\ S_3^4(u - R_1 - R_3) + (R_1 + R_3)(P) & \text{на } \omega_2, \end{cases}$$

где

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1 & \text{на } \Gamma_1, \\ \varphi_j & \text{на } \Gamma_j \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{j-1} \Gamma_i \right), \quad j = 2, \dots, 6. \end{cases} \quad (28)$$

**Теорема 3.** Пусть граничные функции  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 6$ , в (2) удовлетворяют условиям (3)–(6). Тогда для точного решения  $u$  задачи (1), (2)

$$\max_{\bar{\Omega}_\delta} |S_3^4(u, \varphi) - u| \leq c_0 h^4, \quad (29)$$

где  $c_0$  — постоянная, не зависящая от  $h$ .

**Доказательство.** Согласно теореме 1, из условий (3)–(6) следует, что  $u \in C^{4,\lambda}(\bar{\Pi})$ . Тогда на основании (10), (21)–(26) и замечаний 1 и 2 мы получим неравенство (29).  $\square$

**Теорема 4.** Для оператора четвертого порядка  $S_3^4$  верна следующая оценка:

$$\max_{\bar{\Pi}^h \cap \bar{\Omega}_\delta} |S_3^4(u_h, \varphi) - u| \leq c_1 h^4,$$

где  $u_h$  — решение системы (8), (9),  $u$  — точное решение задачи (1)–(6), а  $c_1$  — постоянная, не зависящая от  $h$ .

**Доказательство.** На основании теорем 2, 3 и линейности оператора  $S_3^4$  имеем

$$|S_3^4(u_h, \varphi) - u| \leq |S_3^4(u_h - u, 0)| + |S_3^4(u, \varphi) - u| \leq c_2 h^4 + c_0 h^4 \leq c_1 h^4,$$

где  $c_2$  — постоянная, не зависящая от  $h$ .  $\square$

#### 4. Реализация разностной задачи

Для вычисления приближенного значения  $u(P)$ ,  $P \in \bar{\Omega}_\delta$ , при помощи интерполяционного оператора, построенного в п. 3, необходимо решить разностную задачу (8), (9) в соседних узлах  $P$ . Следовательно, мы рассматриваем вопрос о численной реализации задачи (8), (9) путем развития формулы Вазова [17] в двух направлениях:

- i) расширение до трех измерений,
- ii) увеличение порядка точности до четвертого.

Для построения формулы реализации в трех измерениях необходимо, чтобы граничные значения обращались в нуль на ребрах параллелепипеда, а также на вершинах. Поэтому мы определяем гармонический многочлен  $Q(x_1, x_2, x_3)$  в виде

$$\begin{aligned} a_1 a_2 a_3 Q(x_1, x_2, x_3) = & -A_{000}(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)(x_3 - a_3) + A_{a_1 00} x_1 (x_2 - a_2)(x_3 - a_3) + \\ & A_{0a_2 0} (x_1 - a_1) x_2 (x_3 - a_3) + A_{00a_3} (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) x_3 - \\ & A_{a_1 a_2 0} x_1 x_2 (x_3 - a_3) - A_{a_1 0a_3} x_1 (x_2 - a_2) x_3 - \\ & A_{0a_2 a_3} (x_1 - a_1) x_2 x_3 + A_{a_1 a_2 a_3} x_1 x_2 x_3, \end{aligned}$$

где  $A_{abc}$  — значения граничной функции  $\varphi$ , определяемой посредством (28) в вершинах  $(a, b, c)$ . Этот многочлен используется для замены  $\varphi$  на  $\varphi^* = \varphi - Q$ , где  $\varphi^*$  обращается в нуль в вершинах  $\Pi$  и его вторые и высшие производные такие же, что и у  $\varphi$ .

Чтобы граничные значения обращались в нуль, например на ребре  $x_2 = a_2$ ,  $x_3 = 0$ ,  $0 < x_1 < a_1$ , обозначенном  $\gamma_{35}$ , вычтем следующую функцию:

$$u_{3,5}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{n=1}^{\frac{a_1}{h}-1} d_n \sin \frac{n\pi x_1}{a_1} \frac{\sin \frac{n\pi}{\sqrt{2}a_1} x_2}{\sin \frac{n\pi a_2}{\sqrt{2}a_1}} \frac{\sinh \beta_n (a_3 - x_3)}{\sinh \beta_n a_3}, \quad (30)$$

при

$$d_n = \frac{2h}{a_1} \sum_{k=1}^{\frac{a_1}{h}-1} \varphi^*(kh, a_2, 0) \sin \frac{n\pi x_1}{a_1}$$

и

$$\beta_n = \frac{2}{h} \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{6 \sin^2 \frac{n\pi h}{2a_1} + 6 \sin^2 \frac{n\pi h}{2\sqrt{2}a_1} - 4 \sin^2 \frac{n\pi h}{2a_1} \sin^2 \frac{n\pi h}{2\sqrt{2}a_1}}{6 - 4 \sin^2 \frac{n\pi h}{2a_1} - 4 \sin^2 \frac{n\pi h}{2\sqrt{2}a_1} + 8 \sin^2 \frac{n\pi h}{2a_1} \sin^2 \frac{n\pi h}{2\sqrt{2}a_1}}} \right).$$

Функция (30) имеет следующие свойства:

- (i) удовлетворяет уравнению (8),
- (ii) обращается в нуль на всех ребрах за исключением  $\gamma_{35}$ ,
- (iii)  $u_{3,5}(x_1, a_2, 0) = \sum_{n=1}^{\frac{a_1}{h}-1} d_n \sin \frac{n\pi x_1}{a_1}$ .

Для остальных 11 ребер вычитаемые функции могут быть получены по аналогии с (30). Обозначим сумму этих 12 функций путем  $u^*(x_1, x_2, x_3)$ . Рассмотрим конечно-разностную задачу

$$\bar{u}_h = \mathcal{R}\bar{u}_h \quad \text{на } \Pi^h, \quad (31)$$

$$\bar{u}_h = \phi \quad \text{на } \Gamma^h, \quad (32)$$

где  $\phi = \varphi^* - u^*$ . Поскольку граничная функция  $\phi$  задачи (31), (32) обращается в нуль на всех ребрах и вершинах, решение может быть представлено в виде суммы решений шести частных задач:

$$\bar{u}_h^l = \mathcal{R}\bar{u}_h^l \quad \text{на } \Pi^h, \quad (33)$$

$$\bar{u}_h^l = \psi_l \quad \text{на } \Gamma_j^h, \quad l, j = 1, 2, \dots, 6, \quad (34)$$

$$\bar{u}_h^l = 0 \quad \text{на } \gamma, \quad l = 1, 2, \dots, 6, \quad (35)$$

где

$$\psi_l = \begin{cases} 0 & \text{на } \Gamma_j^h, \quad j \neq l, \\ \phi_l = \phi & \text{на } \Gamma_l^h. \end{cases} \quad (36)$$

Рассмотрим случай  $l = 3$  в задаче (33)–(35). Его решение может быть представлено на  $\Pi^h$  в виде

$$\bar{u}_h^3(x_1, x_2, x_3) = \sum_{m=1}^{\frac{a_1}{h}-1} \sum_{n=1}^{\frac{a_2}{h}-1} b_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{a_1} \sin \frac{n\pi x_2}{a_2} \frac{\sinh \beta_{mn}(a_3 - z)}{\sinh \beta_{mn}a_3}, \quad (37)$$

где

$$b_{mn} = \frac{4h^2}{a_1 a_2} \sum_{k=1}^{\frac{a_1}{h}-1} \sum_{l=1}^{\frac{a_2}{h}-1} \phi_3(kh, lh) \sin \frac{m\pi kh}{a_1} \sin \frac{n\pi lh}{a_2}$$

суть коэффициенты Фурье-функции  $\phi_3$  и

$$\beta_{mn} = \frac{2}{h} \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{6 \sin^2 \frac{m\pi h}{2a_1} + 6 \sin^2 \frac{n\pi h}{2a_2} - 4 \sin^2 \frac{m\pi h}{2a_1} \sin^2 \frac{n\pi h}{2a_2}}{6 - 4 \sin^2 \frac{m\pi h}{2a_1} - 4 \sin^2 \frac{n\pi h}{2a_2} + 8 \sin^2 \frac{m\pi h}{2a_1} \sin^2 \frac{n\pi h}{2\sqrt{2}a_2}}} \right).$$

Решения разностных задач для остальных 5 задач (33)–(35) могут быть получены по аналогии со случаем  $l = 3$ . Тогда решение  $\bar{u}_h$  задачи (31), (32) можно представить в виде

$$\bar{u}_h = \sum_{l=1}^6 \bar{u}_h^l. \quad (38)$$

Следовательно, приближенное решение задачи (1), (2) — это решение конечно-разностной задачи (8), (9), представленное в виде

$$u_h(x_1, x_2, x_3) = \bar{u}_h(x_1, x_2, x_3) + Q(x_1, x_2, x_3) + u^*(x_1, x_2, x_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \bar{\Pi}^h. \quad (39)$$

Из формулы (39) следует, что для нахождения решения системы (8), (9) только в виде оператора  $S_3^4$  нам не нужно решать всю систему конечно-разностных уравнений, так как решение может быть вычислено прямо в требуемых узлах.

## 5. Численный пример

Пусть  $\Pi$  — единичный куб с границей  $\Gamma$ ,  $\bar{\Pi} = \Pi \cup \Gamma$ . Также определим полусферическую поверхность

$$S = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \left( x_1 - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( x_2 - \frac{1}{2} \right)^2 + x_3^2 = 0.4 \text{ и } x_3 \geq 0 \right\},$$

такую что  $S \subset \bar{\Pi}$  (см. рис 4). Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta u = 0 \quad \text{на } \Pi, \quad (40)$$

$$u = v_2(x_1, x_2, x_3) \quad \text{на } \Gamma, \quad (41)$$

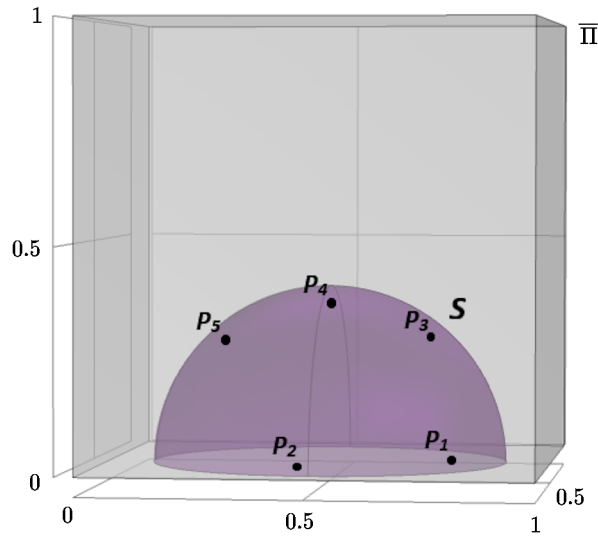
где

$$v_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{100} \cos(2x_1) \sinh(\sqrt{3}(\pi - x_2)) \cosh(x_3)$$

является точным решением. Интерес для нас представляет приближенное решение задачи (40), (41) четвертого порядка точности на поверхности  $S$ . Такие задачи часто встречаются при реализации методов декомпозиции области [1–6], которые являются очень эффективными, благодаря возможности их параллельной обработки [1]. Например, когда  $S$  является частью границы сферической области, пересекающей  $\bar{\Pi}$ , решение на  $S$  необходимо для получения решения внутри сферы методом декомпозиции области. Тогда как конечно-разностное решение задачи четвертого порядка (40), (41) может быть получено на  $\Pi^h$  методом, разработанным в п. 4. Точки на  $S$  обычно лежат между узлами сетки. Следовательно, для получения решения на  $S$  требуется интерполяционный оператор.

Для приближенного решения задачи (40), (41) в различных точках, лежащих на  $S$ , мы используем интерполяционный оператор, построенный в п. 3. Точки, в которых получено решение, показаны на рис. 4.

В табл. 2 приводятся абсолютные ошибки между точным и приближенным решением, т. е.  $|\epsilon_h|_P = |u - u_h|_P$ . Приближенное решение было получено в точках  $P_1, P_2 \in S$ , где  $P_1 = P_1(0.800, 0.237, 0.027)$  и  $P_2 = P_2(0.491, 0.101, 0.017)$ . При  $P_1$  и  $P_2$  использование интерполяционной функции привело к тому, что некоторые соседние узлы выходили через грань  $\bar{\Pi}$ , пересекая  $x_3 = 0$ . Мы также берем  $P_3 = P_3(0.768, 0.379, 0.270)$ ,  $P_4 = P_4(0.522, 0.340, 0.366)$  и  $P_5 = P_5(0.263, 0.335, 0.276)$  такие, что  $P_3, P_4, P_5 \in S$ , и все соседние узлы, используемые интерполяционным оператором, находятся внутри  $\bar{\Pi}$ . Результаты, приведенные в табл. 2, показывают очень точную аппроксимацию, полученную с помощью интерполяционной функции.



**Рис. 4.** Едини́чный куб  $\bar{\Pi}$  и лежащая внутри него полусферическая поверхность  $S$ . Интерполяционный оператор четвертого порядка используется для нахождения приближенного решения задачи (40), (41) в точках  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$

**Таблица 2.** Абсолютная ошибка приближенного решения задачи (40), (41), полученного с помощью интерполяционной функции на поверхности  $S$

$h$	$ \epsilon_h _{P_1}$	$ \epsilon_h _{P_2}$	$ \epsilon_h _{P_3}$	$ \epsilon_h _{P_4}$	$ \epsilon_h _{P_5}$
$2^{-3}$	$4.977 \times 10^{-6}$	$1.474 \times 10^{-4}$	$5.514 \times 10^{-7}$	$4.333 \times 10^{-6}$	$2.519 \times 10^{-5}$
$2^{-4}$	$1.133 \times 10^{-7}$	$5.367 \times 10^{-6}$	$3.243 \times 10^{-8}$	$3.476 \times 10^{-7}$	$1.969 \times 10^{-6}$
$2^{-5}$	$2.370 \times 10^{-9}$	$1.078 \times 10^{-7}$	$3.269 \times 10^{-10}$	$4.056 \times 10^{-8}$	$4.076 \times 10^{-8}$
$2^{-6}$	$2.198 \times 10^{-10}$	$1.219 \times 10^{-9}$	$1.225 \times 10^{-10}$	$3.361 \times 10^{-9}$	$7.395 \times 10^{-9}$
$2^{-7}$	$1.709 \times 10^{-11}$	$2.401 \times 10^{-10}$	$8.160 \times 10^{-12}$	$1.375 \times 10^{-10}$	$3.075 \times 10^{-10}$

## 6. Выводы

Построен 3D интерполяционный оператор с использованием решения на кубической сетке задачи Дирихле для уравнения Лапласа в замкнутой подобласти прямоугольного параллелепипеда. Доказано, что когда четвертые производные граничных функций являются непрерывными по Гельдеру и выполняются некоторые условия согласования при помощи их второй и четвертой производных на гранях параллелепипеда, оператор сходится с точностью четвертого порядка по отношению к размеру сетки. Оператор может использоваться как оператор согласования в версиях методов декомпозиции области, составных сетках, блочных сетках и различных типах комбинированных методов. Кроме того, построенный интерполяционный оператор, обладающий свойствами, указанными в замечаниях 1 и 2, может играть важную роль в приближении четвертого порядка и исследовании задач с многоуровневыми нелокальными условиями для 3D уравнения Лапласа.

Решение в узлах, необходимых для построения оператора, вычисляется по разработанной новой формуле четвертого порядка. Предложенную формулу можно использовать для решения в одном узле или на плоскости внутри области без необходимости решать всю систему конечно-разностных уравнений.

Что касается развития результатов, полученных в данной статье, то дальнейшее развитие оператора согласования и формулы реализации для решения смешанной КЗ для уравнения Лапласа позволило бы применить эти методы к большому семейству КЗ. Также необходимо изучить вопрос повышения точности этих результатов до шестого порядка.

## Литература

1. **Smith B., Bjorstad P., Gropp W.** Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations. — Cambridge University Press, 2004.
2. **Volkov E.A.** On the method of composite meshes for Laplace's equation on polygons // Trudy Mat. Inst. Steklov. — 1976. — Vol. 140. — P. 68–102.
3. **Starius G.** Composite mesh difference methods for elliptic boundary value problems // Numer. Math. — 1977. — Vol. 28, № 2. — P. 243–258.
4. **Volkov E.A.** On the solution of the Laplace equation in a parallelepiped by the uniform and composite grids methods subject to discontinuous boundary conditions // Soviet Math. Dokl. — 1978. — Vol. 239, № 5. — P. 1029–1032.
5. **Dosiyev A.A.** A fourth-order accurate composite grid method for solving Laplace's boundary value problems with singularities // Comp. Math. Math. Phys. — 2002. — Vol. 42, № 6. — P. 832–849.
6. **Volkov E.A., Dosiyev A.A.** A high accurate composite grid method for solving Laplace's boundary value problems with singularities // Russ. J. of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2007. — Vol. 22, № 3. — P. 291–307.
7. **Volkov E.A.** On the smoothness of solutions of the Dirichlet problem, and the composite mesh method on polyhedra // Proc. Steklov Inst. Math. — 1981. — Vol. 150. — P. 71–103.
8. **Volkov E.A.** A method of composite grids on a prism with an arbitrary polygonal base // Proc. Steklov Inst. Math. — 2003. — Vol. 243. — P. 131–153.
9. **Dosiyev A.A.** A block-grid method for increasing accuracy in the solution of the Laplace equation on polygons // Russian Acad. Sci. Dokl. Math. — 1992. — Vol. 45, № 2. — P. 396–399.
10. **Dosiyev A.A.** A block-grid method of increased accuracy for solving Dirichlet's problem for Laplace's equation on polygons // Comp. Math. Math. Phys. — 1994. — Vol. 34, № 5. — P. 591–604.
11. **Dosiyev A.A.** The high accurate block-grid method for solving Laplace's boundary value problem with singularities // SIAM J. Numer. Anal. — 2004. — Vol. 42, № 1. — P. 153–178.
12. **Dosiyev A.A., Buranay S.C.** A fourth order accurate difference-analytical method for solving Laplace's boundary value problem with singularities // Mathematical Methods in Engineering. — Springer, 2007. — P. 167–176.
13. **Dosiyev A.A., Celiker E.** Approximation on the hexagonal grid of the Dirichlet problem for Laplace's equation // Boundary Value Problems. — 2014. — Vol. 2014, № 1. — Article № 73.
14. **Dosiyev A.A., Celiker E.** A fourth order block-hexagonal grid approximation for the solution of Laplace's equation with singularities // Advances in Difference Equations. — 2015. — Vol. 2015. — Article № 59.
15. **Li Z.C.** Combined Methods for Elliptic Problems with Singularities, Interfaces and Infinities. — Dordrech, Boston and London: Kluwer Academic Publishers, 1998.
16. **Li Z.C., Lu T.T.** Singularities and treatments of elliptic boundary value problems // Mathematical and Computer Modelling. — 2000. — Vol. 31, № 8. — P. 97–145.

17. **Wasow W.** On the truncation error in the solution of Laplace's equation by finite differences // J. Res. Nat. Bur. Standards. — 1952. — Vol. 48. — P. 345–348.
18. **Volkov E.A.** An asymptotically fast approximate method of finding a solution of the difference Laplace equation on mesh segments // Proc. Steklov Inst. Math. — 1987. — Vol. 173. — P. 71–92.
19. **Volkov V.Y.** Asymptotically fast approximate methods of solving Laplace's difference equation in a cube // Comp. Math. Math. Phys. — 1996. — Vol. 36, № 5. — P. 627–632.
20. **Celiker E., Dosiyevev A.A.** On the fourth-order accurate approximations of the solution of the Dirichlet problem for Laplace's equation in a rectangular parallelepiped // AIP Conf. Proc. — AIP Publishing LLC, 2016. — Vol. 1776, № 1. — Article № 090008. — <https://doi.org/10.1063/1.4965372>.
21. **Volkov E.A.** On differential properties of solutions of the Laplace and Poisson equations on a parallelepiped and efficient error estimates of the method of nets // Proc. Steklov Inst. Math. — 1969. — Vol. 105. — P. 54–78.
22. **Volkov E.A.** Application of a 14-point averaging operator in the grid method // Comp. Math. Math. Phys. — 2010. — Vol. 50, № 12. — P. 2023–2032.
23. **Samarskii A.A.** The Theory of Difference Schemes. — New York: Marcel Dekker, 2001.
24. **Olver P.J.** Introduction to Partial Differential Equations. — Berlin: Springer, 2014.
25. **Braverman E., Israeli M., Averbuch A., Vozovoi L.** A fast 3D Poisson solver of arbitrary order accuracy // J. Computational Physics. — 1998. — Vol. 144, № 1. — P. 109–136.

*Поступила в редакцию 7 октября 2023 г.*

*После рецензирования без замечаний 30 октября 2023 г.*

*Принята к печати 19 ноября 2023 г.*