УДК 539.376
DOI: 10.15372/PMTF202215115

ИССЛЕДОВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПОЛЗУЧЕСТИ ОРТОТРОПНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

И. А. Банщикова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
E-mail: binna@ngs.ru

С использованием метода Бхатнагара — Гупты рассмотрено решение задачи о кручении стержня с круглым сечением, вырезанного в продольном направлении из трансверсально-изотропной плиты в условиях ползучести. Показано, что решение удовлетворительно согласуется с нижней и верхней оценками угловой скорости закручивания, полученными на основе принципов минимума полной мощности и дополнительного рассеяния, а также с результатами численного моделирования в конечно-элементной программе Ansys. На основе решения Бхатнагара — Гупты показана возможность применения метода характеристических параметров для оценки напряженно-деформированного состояния и скорости угла закручивания стержня, находящегося под действием постоянного момента.

Ключевые слова: конструкционные сплавы, ортотропия, ползучесть, кручение стержня с круглым сечением, минимум дополнительного рассеяния и полной мощности, метод характеристических параметров

Эксперименты на кручение обычно проводятся с целью определения параметров материала на сдвиг, а также для проверки моделей при сложном напряженном состоянии. Испытания для нахождения параметров на сдвиг выполняются, как правило, на трубчатых тонкостенных образцах в условиях, близких к квазиоднородному напряженному состоянию [1]. Поскольку при больших температурах в режимах ползучести и пластичности тонкостенные образцы подвержены потере устойчивости, они заменяются на толстостенные или сплошные [2, 3]. Аналитическое решение задачи о кручении в условиях установившейся ползучести сплошного или трубчатого стержня с круглым сечением из изотропного материала известно [4]. Часто в результате обработки исходных заготовок (прокатки плит, листов) материал приобретает свойства ортотропии или трансверсальной изотропии. Например, в случае трансверсальной изотропии свойства материала по нормали к плите и (или) в направлении под углом $\pi/4$ к направлению нормали к плите могут отличаться от свойств в направлениях плоскости плиты [5–8]. Как следствие, при кручении стержня, вырезанного из такой плиты, депланация поперечного сечения (смещение точек сечения вдоль оси стержня) может возникать не только за счет геометрической формы поперечного сечения, но и вследствие наличия ортотропных свойств материала. В силу физической нелинейности решение задачи о кручении стержня из такого материала можно найти, используя только вычислительные методы.

В [9] получено решение задачи о кручении постоянным моментом ортотропного стержня с круглым сечением в условиях ползучести. Торцы стержня могут свободно смещаться в направлении его оси, при этом предполагается, что депланация поперечного сечения описывается функцией, подобной функции в случае ортотропного упругого стержня [10]. В данной работе проведено сравнение этого решения с результатами численного расчета в программе конечно-элементного анализа Ansys [11–13] и с оценками, найденными с использованием принципов минимума полной мощности и дополнительного рассеяния [5, 11, 12]. На основе решения Бхатнагара — Гупты [9] исследована возможность получения оценки напряженно-деформированного состояния методом характеристических параметров.

1. Разрешающие соотношения задачи о кручении. Для учета свойств ортотропии будем использовать модель, предложенную в работе [14]:

$$\eta_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \qquad \Phi = \frac{T_s^{n+1}}{n+1}. \tag{1}$$

Здесь $\eta_{ij} = d\varepsilon_{ij}^c/dt$ — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести; ε_{ij}^c, σ_{ij} — компоненты тензора деформаций ползучести и напряжений; Φ — скалярная потенциальная функция, зависящая от квадратичной формы

$$T_s(\sigma_{ij}) = (A_{11}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + A_{22}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + A_{33}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \\ + 2A_{12}\sigma_{12}^2 + 2A_{23}\sigma_{23}^2 + 2A_{31}\sigma_{31}^2)^{1/2}; \tag{2}$$

$$A_{11} = (B_{22}^{2/(n+1)} + B_{33}^{2/(n+1)} - B_{11}^{2/(n+1)})/2, \qquad 2A_{12} = 4B_{12}^{2/(n+1)} - A_{11} - A_{22}. \tag{3}$$

Остальные коэффициенты A_{ij} $(i,j = 1,2,3)$ можно получить путем циклической перестановки индексов. Константы B_{ii} $(i = 1,2,3)$ характеризуют процесс одномерной установившейся ползучести в трех главных направлениях $\eta_{ii} = B_{ii}\sigma_{ii}^n$ (n — показатель, который считается одинаковым при растяжении и сжатии и не зависит от направления). Константы B_{ij} $(i \ne j)$ характеризуют процесс одномерной ползучести на установившейся стадии в направлениях осей системы координат, полученной в результате поворота исходной системы координат на угол $\pi/4$.

Так же как в случае изотропной ползучести, выполняется соотношение $G_\eta = T_s^n$, где G_η — квадратичная форма скоростей деформаций ползучести:

$$G_\eta(\eta_{ij}) = \Big(\frac{A_{11}}{\Delta}\,\eta_{11}^2 + \frac{A_{22}}{\Delta}\,\eta_{22}^2 + \frac{A_{33}}{\Delta}\,\eta_{33}^2 + \frac{2}{A_{12}}\,\eta_{12}^2 + \frac{2}{A_{23}}\,\eta_{23}^2 + \frac{2}{A_{31}}\,\eta_{31}^2\Big)^{1/2}, \tag{4}$$

$\Delta = A_{11}A_{22} + A_{22}A_{33} + A_{11}A_{33}$. Из (1), (2) для η_{ij} получаем

$$\eta_{11} = T_s^{n-1}((A_{22} + A_{33})\sigma_{11} - A_{33}\sigma_{22} - A_{22}\sigma_{33}), \qquad \eta_{12} = \eta_{21} = T_s^{n-1}A_{12}\sigma_{12}. \tag{5}$$

Для сдвиговых компонент тензора скоростей деформаций ползучести выполняется соотношение $\eta_{ij} = \xi_{ij}/2 = \dot\gamma_{ij}^c/2$ (γ_{ij}^c, ξ_{ij} — деформации сдвига и скорости деформаций сдвига в условиях ползучести).

При трансверсальной изотропии, т. е. в случае если свойства материала в направлении нормали (совпадает с направлением оси x_3) к плите и в направлении под углом $\pi/4$ к нормали отличаются от свойств в плоскости плиты (срединная плоскость плиты совпадает с плоскостью Ox_1x_2), для констант B_{ij} имеем следующие равенства:

$$B_{11} = B_{22} = B_{12} = B_0, \qquad B_{23} = B_{31} = B_\Delta, \qquad B_{33} \ne B_{11} \ne B_{23}. \tag{6}$$

Из (3), (6) следует

$$2A_{12} = 4B_0^{2/(n+1)} - B_{33}^{2/(n+1)}, \qquad 2A_{31} = 2A_{23} = 4B_\Delta^{2/(n+1)} - B_0^{2/(n+1)}, \\ A_{11} = A_{22} = B_{33}^{2/(n+1)}/2, \qquad A_{33} = (2B_0^{2/(n+1)} - B_{33}^{2/(n+1)})/2. \tag{7}$$

Если свойства ползучести в плоскости плиты отличаются от свойств только в направлении нормали к плите, то условие (6) для B_{ij} заменяется на следующее:

$$B_{11} = B_{22} = B_{12} = B_0, \qquad B_{23} = B_{31} = B_0, \qquad B_{33} \neq B_0. \tag{8}$$

Тогда из (7), (8) получаем

$$\begin{gathered} 2A_{12} = 4B_0^{2/(n+1)} - B_{33}^{2/(n+1)}, \qquad 2A_{31} = 2A_{23} = 3B_0^{2/(n+1)}, \\ A_{11} = A_{22} = B_{33}^{2/(n+1)}/2, \qquad A_{33} = (2B_0^{2/(n+1)} - B_{33}^{2/(n+1)})/2. \end{gathered} \tag{9}$$

Коэффициенты квадратичных форм (9) можно привести к виду [14]

$$A_{11} = A_{22} = \frac{k}{k+1}\,B_0^{2/(n+1)}, \qquad A_{33} = \frac{1}{k+1}\,B_0^{2/(n+1)},$$

$$A_{12} = \frac{k+2}{k+1}\,B_0^{2/(n+1)}, \qquad A_{13} = A_{23} = \frac{3}{2}\,B_0^{2/(n+1)},$$

где $k = \eta_{33}/\eta_{22} = A_{22}/A_{33}$ — коэффициент "анизотропии", получаемый в экспериментах на растяжение. Выражая k через B_{ij}, находим

$$k = \frac{B_{33}^{2/(n+1)}}{2B_0^{2/(n+1)} - B_{33}^{2/(n+1)}}.$$

Модель (1)–(3) с коэффициентами (9) была применена и экспериментально апробирована для расчета сложного напряженного состояния при изгибе и кручении гибких пластин, вырезанных из трансверсально-изотропной плиты (сплав 1163Т) толщиной 12 мм ($T = 400$ °С, $k = 2{,}5$), получена оценка влияния коэффициента "анизотропии" k на величину прогиба пластин [7].

В случае отличия свойств ползучести в направлении под углом $\pi/4$ к нормали к плите (т. е. в направлении сдвига) от свойств в плоскости плиты и по нормали к ней для констант B_{ij} выполняются условия

$$B_{11} = B_{22} = B_{33} = B_{12} = B_0, \qquad B_{23} = B_{31} = B_\Delta \neq B_0. \tag{10}$$

Из (7), (10) следует

$$\begin{gathered} 2A_{12} = 3B_0^{2/(n+1)}, \qquad 2A_{31} = 2A_{23} = 4B_\Delta^{2/(n+1)} - B_0^{2/(n+1)}, \\ A_{11} = A_{22} = A_{33} = B_0^{2/(n+1)}/2. \end{gathered} \tag{11}$$

В [5] с помощью модели (1)–(3), (11), обобщенной на случай различия свойств материала при растяжении и сжатии, численно и экспериментально исследовано влияние трансверсально-изотропных свойств материала на процесс кручения трубчатых образцов, вырезанных в продольном направлении и в направлении нормали к плите толщиной 42 мм из сплава АК4-1 при $T = 200$ °С. Экспериментальные данные хорошо согласуются с результатами расчетов по предложенной модели.

В работе [15] получены экспериментальные данные для случая одноосного растяжения стержня с круглым сечением в условиях ползучести, удовлетворительно согласующиеся с результатами расчета по модели (1)–(3), обобщенной на случай учета повреждений в тензорной формулировке и встроенной в пакет программ Ansys. Таким образом, модель (1)–(3) можно считать в достаточной степени апробированной.

Применим модель (1)–(3) для решения задачи о кручении постоянным моментом стержня со сплошным круглым сечением, вырезанного в продольном направлении из трансверсально-изотропной плиты (направление оси стержня совпадает с направлением оси x_1). Сечения обоих торцов стержня могут свободно депланировать.

Для компонент напряжений при кручении стержня, на торцах которого отсутствует стеснение, выполняются соотношения [5, 10]

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{12} \neq 0, \quad \sigma_{13} \neq 0.$$

Компоненты (5) преобразуются к виду

$$\eta_{12} = \xi_{12}/2 = T_s^{n-1} A_{12}\sigma_{12}, \qquad \eta_{13} = \xi_{13}/2 = T_s^{n-1} A_{31}\sigma_{13}, \tag{12}$$

где $T_s = (2A_{12}\sigma_{12}^2 + 2A_{31}\sigma_{13}^2)^{0,5}$. С учетом (4), (12) имеем

$$\sigma_{12} = \frac{\xi_{12}}{2A_{12}}\, G_\eta^{(1-n)/n}, \qquad \sigma_{13} = \frac{\xi_{13}}{2A_{31}}\, G_\eta^{(1-n)/n}, \tag{13}$$

где $G_\eta = (\xi_{13}^2/(2A_{31}) + \xi_{12}^2/(2A_{12}))^{0,5}$. Из уравнений Коши определяются скорости деформаций ползучести

$$\xi_{12} = \dot W_{,2} - \theta x_3, \qquad \xi_{13} = \dot W_{,3} + \theta x_2. \tag{14}$$

Здесь $W(x_2, x_3)$ — депланация поперечного сечения в направлении оси x_1; θ — угловая скорость закручивания.

Уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0. \tag{15}$$

На контуре сечения задается граничное условие

$$\sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = 0. \tag{16}$$

Функция напряжений $F_s(x_2, x_3)$, такая что $\sigma_{12} = \partial F_s/\partial x_3$, $\sigma_{13} = -\partial F_s/\partial x_2$, тождественно удовлетворяет уравнению равновесия (15). Условие совместности деформаций ползучести преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(2A_{31} T_s^{n-1}\, \frac{\partial F_s}{\partial x_2}\Big) + \frac{\partial}{\partial x_3}\Big(2A_{12} T_s^{n-1}\, \frac{\partial F_s}{\partial x_3}\Big) = -2\theta. \tag{17}$$

Крутящий момент равен

$$M = \iint\limits_S (\sigma_{13} x_2 - \sigma_{12} x_3)\, dx_2\, dx_3, \tag{18}$$

где S — площадь поперечного сечения стержня.

Решение задачи (12)–(18) можно получить, сводя разрешающие соотношения к уравнениям относительно функции депланации $W(x_2, x_3)$ [16] либо относительно функции напряжений $F_s(x_2, x_3)$ [4]. Подставляя (13), (14) в (18), выражение для момента преобразуем к виду

$$M = \iint\limits_S \Big(\frac{(W_{,3} + \theta x_2) x_2}{2A_{31}} - \frac{(W_{,2} - \theta x_3) x_3}{2A_{12}}\Big)\Big(\frac{(W_{,3} + \theta x_2)^2}{2A_{31}} + \frac{(W_{,2} - \theta x_3)^2}{2A_{12}}\Big)^{k_1/2} dx_2\, dx_3, \tag{19}$$

где $k_1 = (1-n)/n$. Если контур поперечного сечения односвязанный, то соотношение (18) для крутящего момента, выраженного через функцию напряжений, записывается следующим образом [4]:

$$M = 2 \iint\limits_S F_s\, dx_2\, dx_3. \tag{20}$$

2. Методы решения задачи о кручении стержня. Рассмотрим несколько подходов, используемых при решении задачи о кручении стержня.

2.1. *Метод Бхатнагара — Гупты.* Исследуем подход, развитый в работе [9] (метод 1). В [9] получено решение задачи о кручении ортотропного стержня со сплошным круглым сечением в предположении установившейся ползучести материала. Полагается, что вид функции $W(x_2, x_3)$ подобен ее виду в случае ортотропной упругости [10]:

$$W(x_2, x_3) = \theta W_0(x_2, x_3) = \theta c_1 x_2 x_3. \tag{21}$$

С учетом (14), (21) имеем

$$\xi_{13} = (c_1 + 1)\theta x_2, \qquad \xi_{12} = (c_1 - 1)\theta x_3. \tag{22}$$

После ряда преобразований, аналогичных преобразованиям в [9], получаем $c_1 = (A_{31} - A_{12})/(A_{31} + A_{12})$. Выражения для напряжений через координаты цилиндрической системы (r, φ, z) записываются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= -\Big(\frac{r}{R}\Big)^{1/n} K_0 (A_{31}\cos^2\varphi + A_{12}\sin^2\varphi)^{(1-n)/(2n)} \sin\varphi, \\ \sigma_{13} &= \Big(\frac{r}{R}\Big)^{1/n} K_0 (A_{31}\cos^2\varphi + A_{12}\sin^2\varphi)^{(1-n)/(2n)} \cos\varphi; \end{aligned} \tag{23}$$

$$K_0 = \Big(\frac{\theta R}{(\sqrt{2}\,)^{n-1}(A_{31} + A_{12})}\Big)^{1/n}, \tag{24}$$

где $0 \leqslant r \leqslant R$ — текущий радиус; ось z совпадает с осью x_1. Компоненты напряжений в цилиндрической системе координат связаны с компонентами напряжений в декартовой системе координат соотношениями $\tau_{\varphi z} = -\sigma_{12}\sin\varphi + \sigma_{13}\cos\varphi$, $\tau_{rz} = \sigma_{12}\cos\varphi + \sigma_{13}\sin\varphi$. Учитывая (23), получаем

$$\tau_{\varphi z} = \Big(\frac{r}{R}\Big)^{1/n} K_0 (A_{31}\cos^2\varphi + A_{12}\sin^2\varphi)^{(1-n)/(2n)}, \qquad \tau_{rz} = 0. \tag{25}$$

С учетом (25) выражение для момента (18) приводится к виду

$$M = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R} \tau_{\varphi z} r^2\, dr\, d\varphi = \frac{K_0}{R^{1/n}} \int\limits_0^{R} r^{2+1/n}\, dr \int\limits_0^{2\pi} (A_{31}\cos^2\varphi + A_{12}\sin^2\varphi)^{(1-n)/(2n)}\, d\varphi,$$

или

$$M = 2\pi K_0 R^3 A_{31}^{(1-n)/(2n)} K/(3 + 1/n), \tag{26}$$

где $K = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \Big(\cos^2\varphi + \frac{A_{12}}{A_{31}}\sin^2\varphi\Big)^{(1-n)/(2n)} d\varphi$. В результате интегрирования имеем

$$K = 1 - \frac{1}{2}\,\frac{1-n}{2n}\,\frac{A_{31} - A_{12}}{A_{31}} + \frac{1}{2!}\,\frac{1-n}{2n}\Big(\frac{1-n}{2n} - 1\Big)\Big(\frac{A_{31} - A_{12}}{A_{31}}\Big)^2 \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} - \ldots.$$

Выражение для параметра K можно записать в виде

$$K = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \prod_{i=1}^{k} \Big(\frac{1-n}{2n} - (i-1)\Big)\Big(\frac{A_{31} - A_{12}}{A_{31}}\Big)^k \prod_{i=1}^{k}(2i-1) \ \Big/ \ \prod_{i=1}^{k}(2i). \tag{27}$$

Тогда для напряжений (25) получаем

$$\tau_{\varphi z}(r, \varphi) = \frac{3n+1}{2\pi n}\,\frac{M}{K}\Big(\cos^2\varphi + \frac{A_{12}}{A_{31}}\sin^2\varphi\Big)^{(1-n)/(2n)} \frac{r^{1/n}}{R^{3+1/n}}, \qquad \tau_{rz} = 0. \tag{28}$$

С учетом (24), (26) скорость изменения погонного угла закручивания равна

$$\theta = D\Big(\frac{3n+1}{2n\pi}\,\frac{M}{R^{3+1/n}}\Big)^n, \tag{29}$$

где $D = (A_{31} + A_{12})/[(2A_{31})^{(1-n)/2}K^n]$. Выражения для напряжений (23) запишем в виде

$$\begin{gathered} \sigma_{12} = -R^{-1/n}K_0(A_{31}x_2^2 + A_{12}x_3^2)^{(1-n)/(2n)}x_3, \\ \sigma_{13} = R^{-1/n}K_0(A_{31}x_2^2 + A_{12}x_3^2)^{(1-n)/(2n)}x_2. \end{gathered} \tag{30}$$

Подставляя (30) в уравнение равновесия (15), получаем

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} = \frac{(1-n)(3n+1)Mx_2x_3}{2n^2\pi R^{3+1/n}K}\,\frac{A_{12}-A_{31}}{A_{31}x_2^2 + A_{12}x_3^2}\Big(x_2^2 + \frac{A_{12}}{A_{31}}\,x_3^2\Big)^{(1-n)/(2n)} = \\ = F_{ort}(x_2, x_3). \tag{31}$$

В случае изотропного материала ($A_{12} = A_{31}$) правая часть (31) равна нулю: $F_{ort}(x_2, x_3) = 0$. Для трансверсально-изотропного материала, т. е. при $A_{12} \ne A_{31}$, из (31) следует $F_{ort}(x_2, x_3) \ne 0$. Таким образом, решение (28), (29) является кинематически допустимым, но не удовлетворяет уравнению равновесия.

Сравнение выражений для $\tau_{\varphi z}$ для ортотропного (28) и изотропного материалов [13] показывает, что они различаются на множитель

$$f(\varphi, n, a) = (\cos^2\varphi + a\sin^2\varphi)^{(1-n)/(2n)}/K(n, a) \tag{32}$$

(функция $K = K(n, a)$ определена в (27); $a = A_{12}/A_{31}$). Выполним анализ (32) в зависимости от угла φ и параметров n, a. Исследуем влияние показателя степени n и коэффициентов B_{ij} на параметр a. Ограничимся случаями трансверсальной изотропии в направлениях по нормали к плите и под углом $\pi/4$ к нормали к плите.

Для трансверсально-изотропного материала со свойствами ползучести в направлении под углом $\pi/4$ к нормали к плите, отличающимися от свойств в других направлениях, т. е. при $B_\Delta \ne B_0$ и $B_{33} = B_0$, из (11) следует

$$a = \frac{3B_0^{2/(n+1)}}{4B_\Delta^{2/(n+1)} - B_0^{2/(n+1)}} = \frac{3}{4b^{2/(n+1)} - 1} = f_1(b),$$

где $b = B_\Delta/B_0$.

Для трансверсально-изотропного материала со свойствами ползучести в направлении нормали к плите, отличающимися от свойств в других направлениях, т. е. при $B_{33} \ne B_0$ и $B_\Delta = B_0$, из (9) получаем

$$a = \frac{4B_0^{2/(n+1)} - B_{33}^{2/(n+1)}}{3B_0^{2/(n+1)}} = \frac{4 - b^{2/(n+1)}}{3} = f_2(b),$$

где $b = B_{33}/B_0$.

На рис. 1 приведены зависимости $a = f_1(b)$ и $a = f_2(b)$ при $n = 3, 5, 10, 20$. Для большинства материалов $n > 3$, а значение $b \leqslant 10$. В этом случае, как правило, параметр $a > 0{,}3$ и с ростом n его значение увеличивается. Например, для трансверсально-изотропного в направлении нормали сплава 1163Т при $T = 400$ °C ($k = 2{,}5$, $n = 7$) [7] получаем $b = B_{33}/B_0 = (2k/(k+1))^{(n+1)/2} = 4{,}165$, $a = 0{,}857$. Полагая $k = 100$, $n = 3$, имеем $b = 3{,}921$, $a = 0{,}673$, причем с уменьшением k значение a увеличивается.

На рис. 2 представлена определенная в (32) функция $f(\varphi, n, a)$ при $\varphi = \pi/4$ и различных значениях a. Видно, что с увеличением a значение f приближается к единице.

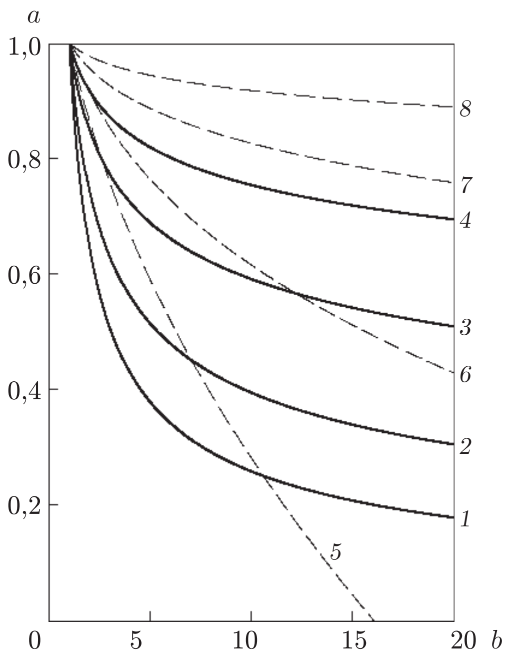

Рис. 1

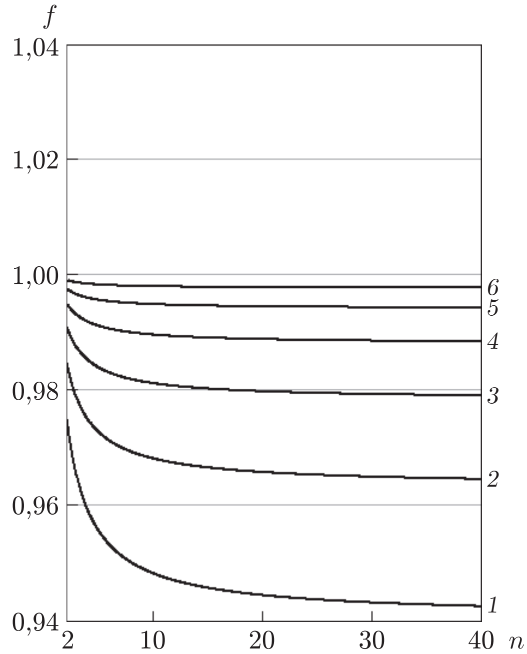

Рис. 2

Рис. 1. Зависимости $a = f_1(b)$ (*1–4*) и $a = f_2(b)$ (*5–8*) при различных значениях n: *1, 5* — $n = 3$, *2, 6* — $n = 5$, *3, 7* — $n = 10$, *4, 8* — $n = 20$

Рис. 2. Зависимость функции $f(\varphi, n, a)$ от n при $\varphi = \pi/4$ и различных значениях a: *1* — $a = 0{,}3$, *2* — $a = 0{,}4$, *3* — $a = 0{,}5$, *4* — $a = 0{,}6$, *5* — $a = 0{,}7$, *6* — $a = 0{,}8$

2.2. *Метод характеристических параметров.* Метод характеристических параметров был развит в 60–80-е гг. XX в. [17–25]. Возможности применения этого метода исследованы в работах [7, 26–28]. В [7] обосновывается применение данного метода для расчета напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропных пластин. В [28] метод характеристических параметров численно и экспериментально апробирован для случая кручения стержней из материала с различными свойствами при растяжении и сжатии.

При кручении стержня с круглым сплошным или кольцевым сечением из изотропного материала с постоянным моментом M интенсивность напряжений $\sigma_i = \sigma_i(t, r) = \sqrt{3}\,\tau_{\varphi z}$ изменяется по времени от значения в начальном упругом состоянии $\sigma_i(0, r)$ до значения в состоянии установившейся ползучести материала. Существует точка $\tilde{r}$, в малой окрестности которой $\sigma_i(t, \tilde{r}) \approx \mathrm{const}$ [24]. Символом “$\sim$” отмечены параметры, являющиеся характеристическими. Совокупность таких точек внутри изотропного стержня образует цилиндрическую поверхность. Для определения положения точки $\tilde{r}$ необходимо приравнять $\sigma_i(0, r)$ к интенсивности напряжений в состоянии установившейся ползучести:

$$\tilde{\sigma}_i = \frac{\sqrt{3}\,M\tilde{r}}{J_1} = \frac{\sqrt{3}\,M\tilde{r}^{1/n}}{J_n}, \qquad J_n = 2\pi \int\limits_{R_1}^{R_2} r^{2+1/n}\,dr \tag{33}$$

(J_n — обобщенный полярный момент инерции поперечного сечения). Если $n \to \infty$, то для стержня со сплошным сечением ($R_1 = 0$, $R_2 = R$) получаем $\tilde{r} = 3R/4$.

В случае стержня, вырезанного из трансверсально-изотропной плиты в направлении ее плоскости, для определения положения характеристических точек необходимо приравнять $\sigma_i(0, r)$ к интенсивности напряжений в состоянии установившейся ползучести, найденной с учетом (28):

$$\tilde{\sigma}_i = \frac{\sqrt{3}\,M\tilde{r}}{J_1} = \sqrt{3}\,\frac{3n+1}{2\pi n}\,\frac{M}{K}\Big(\cos^2\tilde{\varphi} + \frac{A_{12}}{A_{31}}\sin^2\tilde{\varphi}\Big)^{(1-n)/(2n)}\,\frac{\tilde{r}^{1/n}}{R^{3+1/n}}.$$

Выполненный ранее анализ (32) показал, что при $\varphi = \pi/4$ с увеличением значений a, n значение функции $f(\varphi, n, a)$ близко к единице. Несмотря на то что решение (28), полученное методом 1, является приближенным, результаты его анализа и сравнения с (33) позволяют предположить, что при $n \to \infty$ характеристические точки расположены на линиях, параллельных оси стержня, при $\tilde{r} = 3R/4$ и $\tilde{\varphi} = \pi/4 \pm \pi\varkappa/2$, $\varkappa \in Z$. Метод характеристических параметров позволяет проанализировать поведение конструкции в целом, а именно из (28), (29) с использованием $\tilde{\tau}_{\varphi z}$ найти момент M и угловую скорость закручивания θ.

Точность решения (28), (29) можно оценить, используя верхнюю и нижнюю оценки для угловой скорости закручивания, а также сравнивая его с решением, найденным методом конечных элементов [5, 11–13].

2.3. *Оценка решения на основе принципов минимума полной мощности и дополнительного рассеяния.* Для получения нижней оценки угловой скорости закручивания можно использовать метод, основанный на достижении минимума полной мощности (метод 2) при истинных скоростях перемещений [4, 11, 12]. С учетом (2), (4), (13), (18) выражение для минимума полной мощности приводится к виду

$$I_1 = \iint \Big(\frac{n}{n+1}\,G_\eta^{(n+1)/n} - \theta\Big(\frac{x_2\xi_{13}}{2A_{31}} - \frac{x_3\xi_{12}}{2A_{12}}\Big)G_\eta^{(1-n)/n}\Big)\,dx_2\,dx_3 = \min. \qquad (34)$$

Полагается, что функция депланации имеет вид, подобный виду в случае ортотропной упругости [9]:

$$W(x_2, x_3) = \theta W_0(x_2, x_3) = \theta c_2 x_2 x_3. \qquad (35)$$

Здесь c_2 — константа, определяемая из условия (34). С использованием (12), (14) можно показать, что функция (35) удовлетворяет уравнению совместности (17). Вычислив c_2, из (19) находим

$$\theta = (M/G_1)^n, \qquad (36)$$

где

$$G_1 = \iint\limits_S \Big(\frac{x_2^2(c_2+1)}{2A_{31}} - \frac{x_3^2(c_2-1)}{2A_{12}}\Big)\Big(\frac{x_2^2(c_2+1)^2}{2A_{31}} + \frac{x_3^2(c_2-1)^2}{2A_{12}}\Big)^{k_1/2}\,dx_2\,dx_3, \quad k_1 = \frac{1-n}{n}.$$

Для получения верхней оценки угловой скорости закручивания θ используем условие минимума дополнительного рассеяния (метод 3): из всех статически возможных напряженных состояний только истинное напряженное состояние сообщает минимум дополнительному рассеянию тела [4, 5, 12]. С учетом (20) это условие можно записать в виде

$$I_2 = \iint\limits_S \Big(\frac{1}{n+1}\,T_s^{n+1} - 2\theta F_s\Big)\,dx_2\,dx_3 = \min. \qquad (37)$$

В (37) полагается, что функция F_s имеет вид

$$F_s(x_2, x_3) = c_3\theta^{1/n}F_{s0}(x_2, x_3) = c_3\theta^{1/n}(1 - ((x_2^2 + x_3^2)/R_2^2)^{k_2/2}), \qquad (38)$$

где c_3 — константа, определяемая из условия (37); $k_2 = (n+1)/n$. Функция (38) с точностью до множителя является решением задачи о кручении изотропного стержня в условиях установившейся ползучести, а также решением уравнения равновесия (15) с условиями на контуре сечения (16). После подстановки (38) в (37) и дифференцирования $dI_2/dc_3 = 0$ находим константу c_3, обеспечивающую достижение минимума (37):

$$c_3 = \Big(\iint\limits_S 2F_{s0}\,dx_2\,dx_3 \;\Big/\; \iint\limits_S (2A_{31}F_{s0,2}^2 + 2A_{12}F_{s0,3}^2)^{(n+1)/2}\,dx_2\,dx_3\Big)^{1/n}. \qquad (39)$$

После ряда преобразований (20), (38), (39) записывается выражение для угловой скорости закручивания

$$\theta = (M/(c_3 G_2))^n, \qquad (40)$$

где $G_2 = 2\iint\limits_S F_{s0}\,dx_2\,dx_3$.

2.4. *Расчет методом конечных элементов.* Для учета свойств ортотропии при пластичности и ползучести может применяться модель (1)–(3) с нормированными константами A_{ij}, встроенная в пакет Ansys (метод 4), при этом задаются коэффициенты анизотропии R_{xx}, R_{yy}, R_{zz}, R_{xy}, R_{yz}, R_{xz}.

В случае выполнения (8), (9), с учетом того что $k = A_{22}/A_{33} = A_{11}/A_{33}$, параметры R_{ij} можно пересчитать по формулам

$$R_{xx} = R_{yy} = R_{xz} = R_{yz} = 1, \qquad R_{zz} = \Big(\frac{k+1}{2k}\Big)^{1/2}, \qquad R_{xy} = \Big(\frac{3}{2}\,\frac{k+1}{k+2}\Big)^{1/2}.$$

Здесь оси x_i $(i = 1, 2, 3)$ соответствуют осям в программе Ansys: $x_1 = X$, $x_2 = Y$, $x_3 = Z$. Те же коэффициенты, выраженные через B_{ij}, имеют вид

$$R_{zz} = \Big(\frac{B_0}{B_{33}}\Big)^{1/(n+1)}, \qquad R_{xy} = \Big(\frac{3B_0^{2/(n+1)}}{4B_0^{2/(n+1)} - B_{33}^{2/(n+1)}}\Big)^{1/2}.$$

Метод 4 был апробирован при расчете ползучести пластины, изготовленной из трансверсально-изотропного сплава 1163Т, при $T = 400$ °С, $k = 2{,}5$ [7], а также применен для исследования влияния анизотропии в направлении нормали к плите при деформировании листа в цилиндрическую и седлообразную поверхности [29].

В [5, 11–13] приведены результаты выполненного на основе модели (1)–(3) с помощью трехмерного твердотельного элемента Solid45 комплекса Ansys исследования влияния на процессы деформирования сопротивления деформациям ползучести в направлении под углом $\pi/4$ к нормали к плите (в направлении сдвига). Образцы были вырезаны в продольном направлении и в направлении нормали к трансверсально-изотропной плите. В этом случае с учетом (10), (11) для коэффициентов R_{ij} имеем

$$R_{xz} = R_{yz} = \Big(\frac{3}{4(B_\Delta/B_0)^{2/(n+1)} - 1}\Big)^{1/2}, \qquad R_{xx} = R_{yy} = R_{zz} = R_{xy} = 1.$$

Для получения оценки напряжений в характеристической точке при построении конечных элементов учитывалось формирование узлов на расстоянии $3R/4 = |OA| = |OB| = |OC|$ (рис. 3). Тестировались три плотности разбиения: 8, 16 и 23 элемента вдоль радиуса, что соответствует общему числу элементов в поперечном сечении 156, 624 и 1332 (типы разбиения 1, 2, 3 соответственно). На рис. 3 приведена конечно-элементная сетка для случая разбиения стержня на 156 элементов (коэффициенты R_{ij} меняются в соответствии с выбором направлений осей $x_1 = Z$, $x_2 = X$, $x_3 = Y$). В системе координат (X, Y, Z) на торце стержня $Z = 0$ и вдоль его оси заданы перемещения $UX = UY = 0$; в узле $X = Y = Z = 0$ для исключения смещения как жесткого целого задано $UZ = 0$; точки

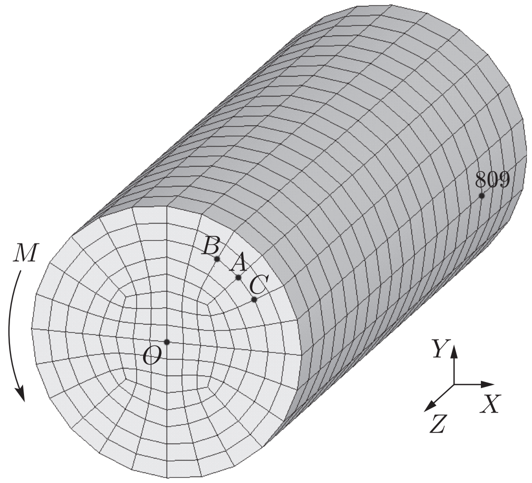

Рис. 3. Разбиение на конечные элементы стержня со сплошным круглым сечением

на торцах $Z = 0$ и $Z = L$ могут свободно перемещаться в направлении оси стержня. Для того чтобы приложить крутящий момент на торце $Z = L$, создаются оболочечные элементы Shell181 и задается условие, обеспечивающее один и тот же угол поворота для всех узлов этого торца. Наличие оболочечных элементов приводит к возникновению слабовыраженного краевого эффекта, который исчезает при уменьшении толщины оболочечного элемента Shell181. Для уменьшения влияния краевого эффекта на результаты вычислений погонный угол закручивания вычислялся по перемещению точек контура поперечного сечения вблизи торца $Z = 0$, где краевой эффект отсутствует.

В работах [12, 13] представлены также результаты решения задач о кручении стержней с помощью элементов Beam189 в Ansys. Применение таких балочных элементов для круглого поперечного сечения показало, что депланация сечения, возникающая за счет ортотропных свойств при ползучести, не учитывается. Это приводит к существенному уменьшению угловой скорости закручивания.

3. Результаты расчета и их обсуждение. В расчетах были использованы параметры для случая одноосного растяжения образцов при $T = 180$ °C [6]. Образцы были вырезаны из плиты толщиной 50 мм, выполненной из сплава В95пч (Al-Zn-Mg-Cu). Для этого сплава в результате обработки экспериментальных данных на установившейся стадии ползучести с использованием степенной зависимости получены следующие коэффициенты B_{ij}: $B_{11} = B_{22} = B_{33} = B_0 = 6{,}3 \cdot 10^{-31}$ (МПа)$^{-n} \cdot$ с$^{-1}$ для продольного, поперечного направлений и направления по нормали к плите; $B_{23} = B_{31} = B_\Delta = 3{,}9 \cdot 10^{-30}$ (МПа)$^{-n} \cdot$ с$^{-1}$ для направления под углом $\pi/4$ к нормали к плите; показатель ползучести принят равным $n = 10$ [6]. Предполагалось, что в плоскости плиты сплав изотропен, т. е. $B_{12} = B_0$. Модуль Юнга $E = 55$ ГПа и коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}4$ одинаковы для всех направлений.

Сравним решение задачи о кручении стержня, полученное методом 1, с решением, найденным методом конечных элементов (метод 4), а также с оценками на основе принципов минимума полной мощности и дополнительного рассеяния (методы 2, 3). С использованием методов 1, 2, 3 можно вычислить угловую скорость закручивания θ в предположении установившейся ползучести материала. При расчете методом конечных элементов считается, что в начальный момент времени стержень деформируется упруго, затем развиваются необратимые деформации ползучести. Поскольку прикладываемый закручивающий момент постоянен, деформирование с течением времени становится близким к состоянию установившейся ползучести.

Результаты решения задачи о кручении стержня постоянным моментом $M = 350$ Н $\cdot$ м

Метод	$\theta \cdot 10^3$, рад/(м $\cdot$ с)	$\sigma_{12\,\max}$, МПа	$\sigma_{13\,\max}$, МПа	$\tilde{\sigma}_i$, МПа	
				$n = 1$	$n = 10$
Метод 1	2,094	193,39	157,51	288,56	289,45
Метод 2	1,944	190,58	155,41	290,83	—
Метод 3	2,862	172,68	172,68	205,50	—
Метод 4 для типов разбиения:					
1	2,924	192,14	164,08	294,54	296,26
2	2,540	190,87	161,82	291,13	291,16
3	2,475	190,38	161,39	290,56	290,21

В таблице приведены результаты решения задачи о кручении постоянным моментом $M = 350$ Н $\cdot$ м стержня радиусом $R = 0{,}01$ м со сплошным сечением, вырезанного в продольном направлении из трансверсально-изотропной плиты. При моделировании в пакете Ansys длина образца задавалась равной $L = 0{,}05$ м, толщина оболочечных элементов Shell181 — 0,005 м, общее время закручивания — $t_* = 3{,}6 \cdot 10^3$ с. Угловая скорость закручивания $\theta = \dot{\alpha}$ вычислялась на установившейся стадии ползучести при $2{,}7 \cdot 10^3$ с $\leqslant t \leqslant 3{,}6 \cdot 10^3$ с. Погонный угол закручивания определялся по перемещениям UY в узле $X = x_2 = 0{,}01$ м, $Y = x_3 = 0$, $Z = x_1 = 0{,}01$ м (узел 809 на рис. 3), расположенном на внешнем контуре сечения вблизи торца $Z = 0$, по формуле $\alpha(t) = UY(t)/(RZ)$.

Из анализа таблицы следует, что угловая скорость закручивания θ, вычисленная методом 4 с разбиением третьего типа, больше угловой скорости закручивания, вычисленной по формуле (29) методом 1, а также по формуле (36) методом 2, и меньше угловой скорости закручивания, вычисленной по формуле (40) методом 3. В таблице приведены также максимальные значения касательных напряжений $\sigma_{12\,\max}$ на контуре поперечного сечения в узле с координатами $X = x_2 = 0$, $Y = x_3 = -0{,}01$ м, $Z = x_1 = 0{,}01$ м и напряжения $\sigma_{13\,\max}$ в узле с координатами $X = x_2 = 0{,}01$ м, $Y = x_3 = 0$, $Z = x_1 = 0{,}01$ м при $t = t_*$. Эти значения удовлетворительно согласуются со значениями, найденными методами 1 и 2. Максимальные начальные упругие напряжения для трех типов разбиения равны $\sigma^0_{12\,\max} = \sigma^0_{13\,\max} = 394{,}87$; 388,14; 386,91 МПа.

На рис. 4 для половины $Z \in [0, L/2]$ стержня приведены изолинии перемещений UZ (депланация сечения) и изолинии напряжений $\tau_{\varphi z}$, τ_{rz} в цилиндрической системе координат при $t = t_*$ для конечно-элементного разбиения второго типа. С учетом (28) $\tau_{rz} = 0$. Однако результаты конечно-элементного расчета показывают, что $\tau_{rz} \neq 0$. Таким образом, метод 1 дает приближенное решение задачи о кручении ортотропного стержня.

В таблице приведены напряжения $\tilde{\sigma}_i = \sqrt{3}\,\tilde{\tau}_{\varphi z}$ на установившейся стадии ползучести ($n = 10$) и в начальный момент времени ($n = 1$), вычисленные методом 1 по формуле (28) в характеристической точке $\tilde{r} = 3R/4$, $\tilde{\varphi} = \pi/4$. Различие значений, полученных при $n = 10$ и $n = 1$, составляет менее 0,5 %. В расчете методом конечных элементов (см. таблицу, метод 4) это различие $\tilde{\sigma}_i$ в характеристической точке составляет менее 0,2 %.

На рис. 5 приведена зависимость $\sigma_i(t)$, вычисленная методом 4 (разбиение третьего типа) в узлах на расстоянии от торца $Z = 0{,}01$ м при $\tilde{r} = 3R/4$ и $\varphi = 2\pi/9$; $\pi/4$; $5\pi/18$. При $t = 0$ значение интенсивности напряжений во всех трех узлах равно $\sigma_i(0) = 290{,}21$ МПа, при $t = t_*$ $\sigma_i(t_*) = 287{,}09$; 290,56; 294,27 МПа. Из рис. 5 следует, что значение соотношения $\sigma_i(0)/\sigma_i(t_*)$ наиболее близко к единице при $\varphi = \pi/4$, т. е. в характеристической точке.

На рис. 6,*а* представлена зависимость погонного угла закручивания от времени $\alpha(t) = UY(t)/(RZ)$, вычисленного по перемещению UY узла с координатами $X = 0{,}01$ м, $Y = 0$,

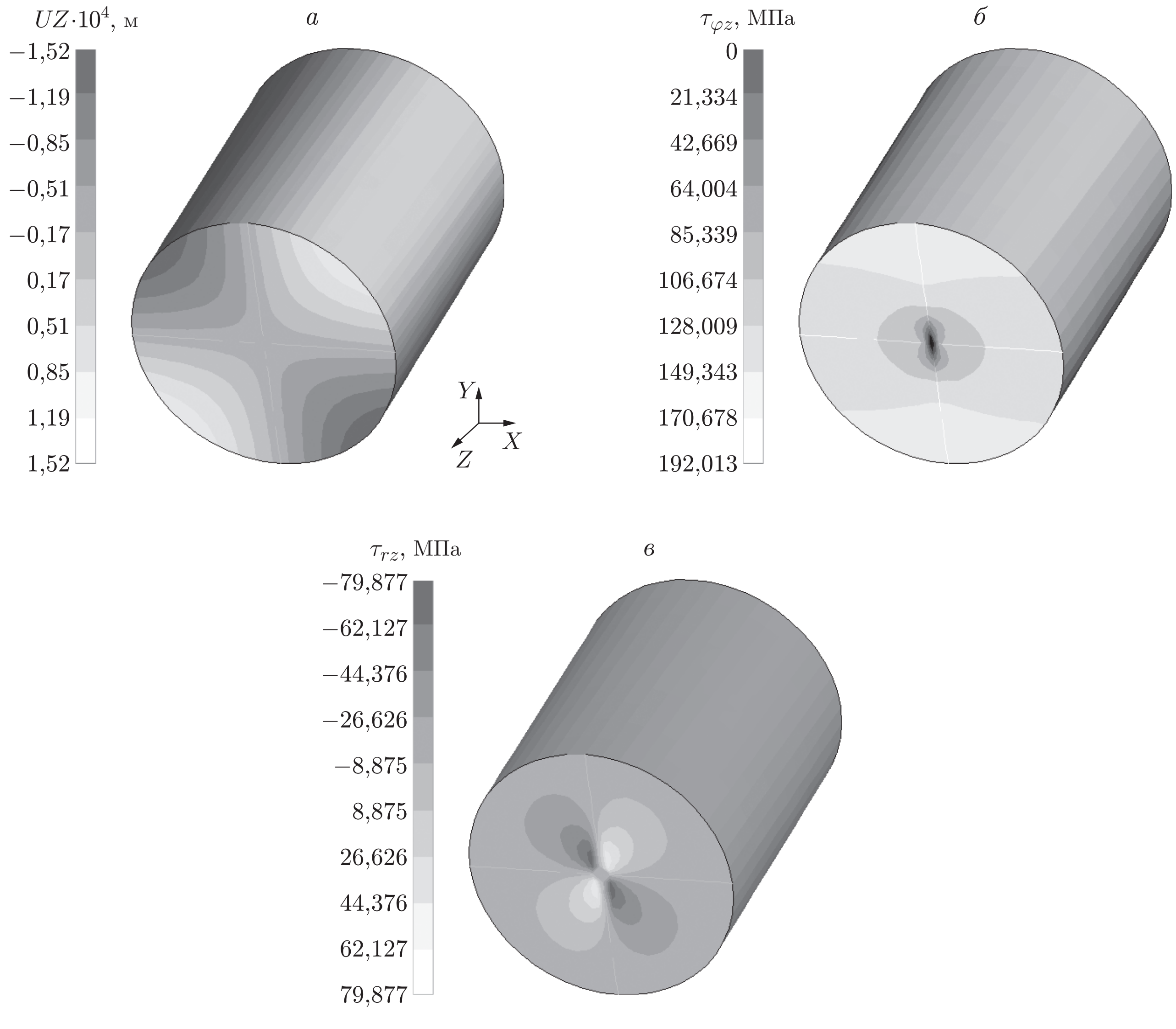

Рис. 4. Изолинии перемещений сечения UZ (*а*), напряжений $\tau_{\varphi z}$ (*б*) и τ_{rz} (*в*) при $t = t_*$

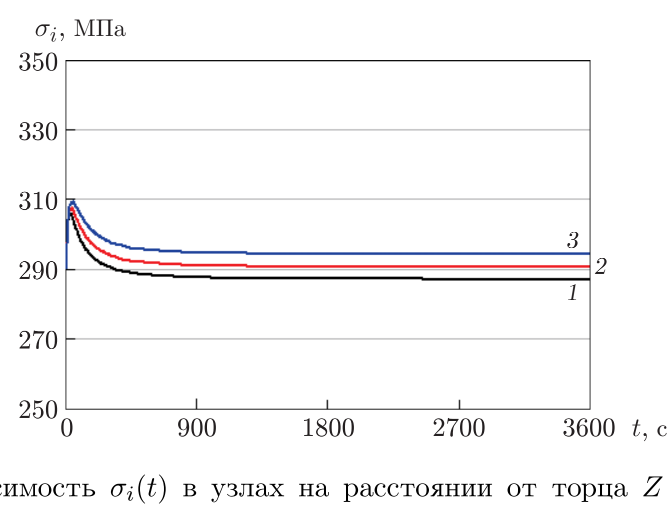

Рис. 5. Зависимость $\sigma_i(t)$ в узлах на расстоянии от торца $Z = 0{,}01$ м при $\tilde{r} = 3R/4$ и различных значениях φ:
1 — $\varphi = 2\pi/9$, *2* — $\varphi = \pi/4$, *3* — $\varphi = 5\pi/18$

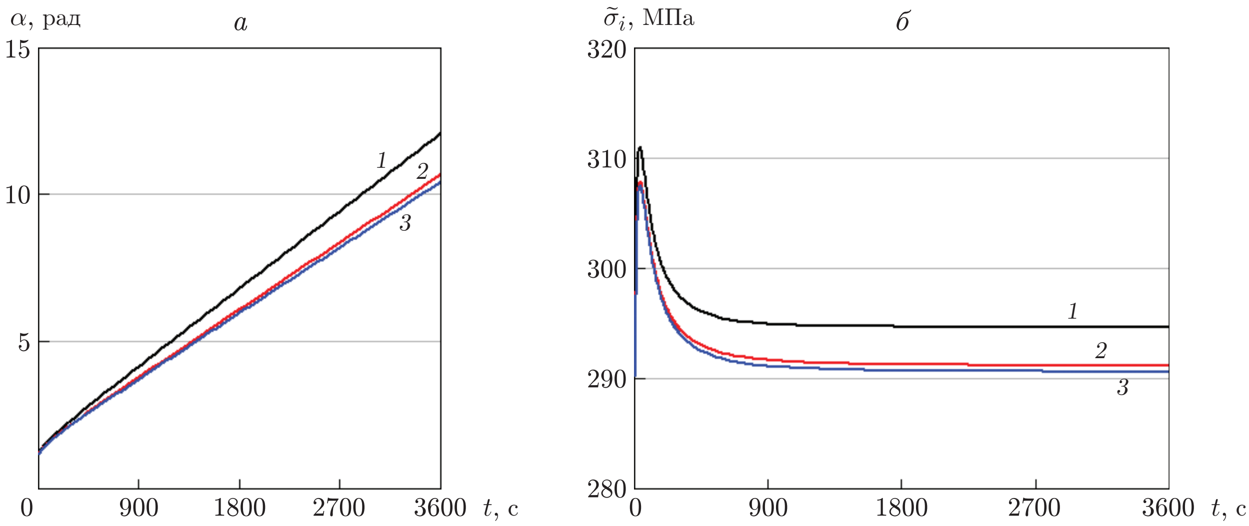

Рис. 6. Зависимости погонного угла закручивания (*а*) и интенсивности напряжений в характеристической точке (*б*) от времени:
1–*3* — типы разбиения конечно-элементной сетки (*1* — первый тип, *2* — второй тип, *3* — третий тип)

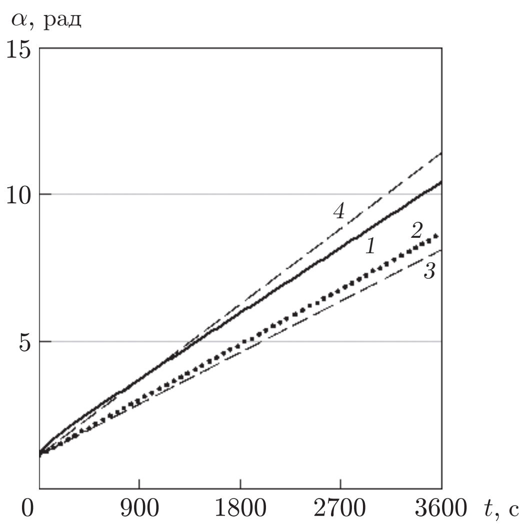

Рис. 7. Зависимость погонного угла закручивания от времени $\alpha(t)$:
1 — расчет методом конечных элементов для разбиения третьего типа, *2* — зависимость $\alpha(t) = \alpha_0 + \theta t$, найденная методом 1 с учетом (29), *3, 4* — зависимость $\alpha(t) = \alpha_0 + \theta t$, полученная методами 2 и 3 соответственно

$Z = 0{,}01$ м для разбиений первого, второго и третьего типов. Начальный угол закручивания $\alpha_0 = 4(1+\nu)M/(E\pi R^4)$, полученный в результате аналитического решения упругой задачи о кручении, составил 1,134 рад; при расчете методом 4 для разбиений первого, второго, третьего типов получены значения $\alpha_0 = 1{,}161$; 1,141; 1,137 рад соответственно. Различие значений α_0, вычисленных аналитическим путем и полученного численно для разбиения третьего типа, составляет 0,3 %. На рис. 6,*б* показана зависимость $\tilde{\sigma}_i(t)$ в характеристической точке $Z = 0{,}01$ м, $X = \tilde{r} = 3R/4$, $\tilde{\varphi} = \pi/4$ для трех типов разбиения сетки. Из рис. 6 следует, что при увеличении плотности конечно-элементной сетки имеет место сходимость решения.

В начале расчета ($0 \leqslant t \leqslant 300$ с) автоматический шаг по времени был выбран в диапазоне $0{,}1 \div 1{,}0$ с, затем, при достижении состояния, близкого к состоянию установившейся ползучести, с целью уменьшения общего времени численного расчета величина шага по времени была увеличена до 5 с. Расчеты при измельчении сетки и уменьшении шага по времени требуют значительных временных затрат. Поэтому рассмотренные в данной работе методы, включая метод характеристических параметров, можно рекомендовать для предварительного анализа напряженно-деформированного состояния и прогнозирования необходимой нагрузки в случае ортотропного материала.

На рис. 7 приведена зависимость погонного угла закручивания от времени $\alpha(t)$.

Заключение. Таким образом, решение задачи о кручении стержня со сплошным круглым сечением в условиях ортотропной ползучести, полученное с использованием подхода Бхатнагара — Гупты, удовлетворительно согласуется с нижней и верхней оценками угловой скорости закручивания, вычисленными на основе принципов минимума полной мощности и дополнительного рассеяния, а также с результатами моделирования в конечно-элементной программе Ansys. На основе решения Бхатнагара — Гупты показана возможность получения оценки напряженно-деформированного состояния методом характеристических параметров, что подтверждается результатами конечно-элементного расчета в программе Ansys.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Локощенко А. М.** Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. М.: Моск. гос. индустр. ун-т, 2007.
2. **Горев Б. В., Клопотов И. Д.** Методика построения кривых деформирования на кручение при больших деформациях // Завод. лаб. 1995. № 12. С. 50–53.
3. **Ларичкин А. Ю., Горев Б. В.** Построение сдвиговых деформаций ползучести из чистого кручения сплошных круглых валов // Науч.-техн. ведомости С.-Петерб. гос. политехн. ун-та. Физ.-мат. науки. 2013. № 3. С. 212–219.
4. **Качанов Л. М.** Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960.
5. **Банщикова И. А.** Построение определяющих уравнений для ортотропных при ползучести материалов с различными свойствами при растяжении и сжатии // ПМТФ. 2020. Т. 61, № 1. С. 102–117.
6. **Горев Б. В., Масанов И. Ж.** Особенности деформирования листовых конструкционных алюминиевых сплавов и плит в режимах ползучести // Технология машиностроения. 2009. № 7. С. 13–20.
7. **Банщикова И. А., Блинов В. А.** Экспериментально-теоретический анализ деформирования трансверсально-изотропных пластин при ползучести // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 3. С. 129–138.

8. **Горев Б. В., Банщикова И. А.** К описанию процесса ползучести и разрушения упрочняющихся материалов по кинетическим уравнениям со скалярным параметром поврежденности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2009. № 2. С. 90–98. DOI: 10.14498/vsgtu732.
9. **Bhatnagar N. S., Gupta S. K., Gupta R. P.** The torsion of an orthotropic rod in the theory of creep // Wood Sci. Technol. 1969. V. 3, iss. 2. P. 167–174. DOI: 10.1007/BF00639639.
10. **Лехницкий С. Г.** Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М.: Наука, 1971.
11. **Banshchikova I. A., Petrov D. M., Tsvelodub I. Yu.** Torsion of circular rods at anisotropic creep // J. Phys.: Conf. Ser. 2016. V. 722, N 1. 012004. DOI: 10.1088/1742-6596/722/1/012004.
12. **Banshchikova I. A.** Evaluation of the stress-strain state of rod at torsion from an anisotropic material in the shear direction at creep // J. Phys.: Conf. Ser. 2017. V. 894. 012006. DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012006.
13. **Банщикова И. А., Цвелодуб И. Ю., Петров Д. М.** Деформирование элементов конструкций из сплавов с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести в сдвиговом направлении // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 157, № 3. С. 34–41.
14. **Соснин О. В.** Об анизотропной ползучести материалов // ПМТФ. 1965. № 6. С. 99–104.
15. **Stewart C. M., Gordon A. P., Ma Y. W., Neu R. W.** An anisotropic tertiary creep damage constitutive model for anisotropic materials // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 2011. V. 88. P. 356–364. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2011.06.010.
16. **Банщикова И. А., Горев Б. В., Сухоруков И. В.** Двумерные задачи формообразования стержней в условиях ползучести // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 3. С. 129–139.
17. **Schulte C. A.** Predicting creep deflections of plastic beams // Proc. Amer. Soc. Test. Materials. 1960. V. 60. P. 895–904.
18. **Marriott D. L., Leckie F. A.** Some observations on the deflections of structures during creep // Proc. Inst. Mech. Engrs. 1964. V. 178. P. 115–125.
19. **Sim R. G.** Reference stress concepts in the analysis of structures during creep // Intern. J. Mech. Sci. 1970. V. 12. P. 561–573.
20. **Martin J. B., Leckie F. A.** On creep rupture of structures // J. Mech. Phys. Solids. 1972. V. 20, N 4. P. 223–238. DOI: 10.1016/0022-5096(72)90002-6.
21. **Розенблюм В. И., Виноградов Н. Н.** К расчету ползучести при низких уровнях напряжений // Пробл. прочности. 1973. № 12. С. 38–39.
22. **Hayhurst D. R., Leckie F. A.** The effect of creep constitutive and damage relationships upon the rupture time of a solid circular torsion bar // J. Mech. Phys. Solids. 1973. V. 21, N 6. P. 431–446. DOI: 10.1016/0022-5096(73)90011-2.
23. **Хейхерст Д. Р.** Определение времени до разрушения для вращающихся дисков в условиях ползучести с использованием уравнений повреждаемости при двухосном напряженном состоянии // Прикл. механика. Сер. Е. 1973. № 4. С. 88–95.
24. **Горев Б. В.** К оценке ползучести и длительной прочности элементов конструкций по методу характеристических параметров. Сообщ. 1 // Пробл. прочности. 1979. № 4. С. 30–36.
25. **Penny R. K.** Design for creep / R. K. Penny, D. L. Marriott. Padstow: Chapman and Hall, 1995. DOI: 10.1016/S0308-0161(97)00080-X.
26. **Othman A. M., Hayhurst D. R., Dyson B. F.** Skeletal point stresses in circumferentially notched tension bars undergoing tertiary creep modelled with physically based constitutive equations // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. Math., Phys. Engng Sci. 1993. V. 441, N 1912. P. 343–358.
27. **Jelwan J., Chowdhury M., Pearce G.** Creep life design criterion and its applications to pressure vessel codes // Materials Phys. Mech. 2011. N 11. P. 157–182.

28. **Банщикова И. А., Ларичкин А. Ю.** Кручение круглых стержней с учетом разносопротивляемости материала растяжению и сжатию в условиях ползучести // ПМТФ. 2018. Т. 59, № 6. С. 123–134.

29. **Банщикова И. А.** Расчет пластин двойной кривизны из анизотропных сплавов при ползучести // Вестн. Нижегор. ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4, ч. 4. С. 1385–1387.

Поступила в редакцию 13/IV 2022 г.,
после доработки — 21/VI 2022 г.
Принята к публикации 29/VIII 2022 г.