

УДК 533.951

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИНТОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ОТКРЫТЫХ ЛОВУШКАХ С ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ

В. П. Жуков, И. В. Шваб, А. В. Бурдаков*

Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск

* Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mail: shva@ict.nsc.ru

Изучается динамика плазмы в открытых магнитных ловушках с электронным пучком, в частности в ловушке ГОЛ-3. Численно исследуется возможность образования резонансной поверхности магнитного поля и развития винтовой неустойчивости, обусловленной наличием этой поверхности.

Ключевые слова: плазма, тиринг-неустойчивость, пересоединение, резонансная поверхность.

Введение. Эксперименты на многопробочной ловушке с электронным пучком ГОЛ-3 (Институт ядерной физики СО РАН) [1] выполняются следующим образом. В вакуумную камеру подводится водород (концентрация $(1 \div 3) \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$). Затем зажигается разряд, создающий плазму, после чего в нее инжектируется электронный пучок, повышающий температуру плазмы до $(1,1 \div 2,3) \cdot 10^3 \text{ К}$ ($1,1 \div 2,3 \text{ кэВ}$). Максимальная эффективность передачи энергии (30–40 %) наблюдается при плотности $(1 \div 3) \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$. Полученная таким образом горячая плазма остывает за время ≈ 50 мкс.

Данные экспериментов [2] показывают, что после выключения пучка в центре плазмы течет ток, равный току пучка, а на краю пучка плазменный ток течет в обратном направлении. При этом полная сила тока оказывается малой. Данная токовая конфигурация разрушается за время, существенно меньшее времени омического затухания. Предполагается, что быстрое разрушение токовой конфигурации обусловлено развитием тиринг-неустойчивости. Настоящая работа посвящена изучению этого явления.

Тиринг-неустойчивость, играющая важную роль в динамике плазмы токамаков, является причиной релаксационных (пилообразных) колебаний, присущих всем токамакам. В результате развития такой неустойчивости [3, 4] происходит быстрое уменьшение силы тока, протекающего по плазме, и выброс тепловой энергии плазмы из центра на периферию. В случае токамаков эти явления хорошо изучены. В частности, существует большое количество работ, в которых проведено численное моделирование тиринг-неустойчивости. Использовались двумерные [4–10] и трехмерные [11, 12] модели в приближениях редуцированной [5–8] и нередуцированной [9–12] одножидкостной [4, 11, 12] и двухжидкостной [5–8, 10] магнитной гидродинамики.

Моделирование тиринг-неустойчивости в открытой ловушке с электронным пучком, результаты которого представлены в данной работе, проведено впервые. Целью настоящей работы является исследование возможности формирования магнитной конфигурации

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00244).

с резонансной поверхностью магнитного поля и развития тиринг-неустойчивости в такой конфигурации, а также определение количественных характеристик течения, возникающего при развитии этой неустойчивости. В частности, необходимо оценить время разрушения токовой конфигурации.

В работе использовались одно- и двумерные одножидкостные магнитогидродинамические (МГД) модели, которые реализовывались численно с помощью конечно-разностных алгоритмов. Электронный пучок учитывался дополнительными членами в уравнениях для магнитного поля. Гофрировкой и наличием торцов в этой модели пренебрегалось. Проводимость плазмы вне пучка предполагалась равной кулоновской при температуре $1,16 \cdot 10^6$ К (100 эВ). Наличие пучковой неустойчивости приводит к турбулентности и как следствие к увеличению сопротивления плазмы в области, занятой пучком, по сравнению с кулоновским значением. Точное значение аномального сопротивления неизвестно, поэтому в расчетах сопротивление плазмы внутри пучка варьировалось в диапазоне от 10 до 1000 его кулоновских значений. После выключения пучка его аномальное сопротивление исчезает. Сопротивление горячей плазмы значительно меньше сопротивления плазмы при температуре $1,16 \cdot 10^6$ К (100 эВ). Развитие тиринг-неустойчивости определяется локальным значением сопротивления на резонансной поверхности. Эта поверхность находится вне области пучка, и соответственно температура на резонансной поверхности значительно меньше $1,16 \cdot 10^7$ К (1 кэВ). Изучение распределения температуры вследствие нагрева плазмы пучком представляет собой отдельную сложную задачу, поэтому в настоящей работе для простоты сопротивление плазмы после выключения пучка полагалось постоянным и равным спицеровскому сопротивлению при температуре $1,16 \cdot 10^6$ К (100 эВ).

Тиринг-неустойчивость хорошо изучена в случае отсутствия пучка при сильном градиенте проводимости. Следует отметить, что большие градиенты проводимости имеют место на краю пучка вблизи резонансной поверхности. Подобная ситуация ранее не исследовалась. Например, в токамаках изменение проводимости происходит на расстояниях порядка малого радиуса плазмы и существенного влияния на тиринг-неустойчивость не оказывает.

1. Математическая постановка задачи. Рассмотрим математическую постановку задачи. Исходные МГД-уравнения одножидкостной двухтемпературной плазмы имеют вид [13, 14]

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= -\nabla p + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) + \nu \Delta \mathbf{V} + \frac{\nu}{3} \nabla \operatorname{div} \mathbf{V}, \\ \frac{1}{\gamma_e - 1} \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathbf{V} p_e) \right) &= -p_e \operatorname{div} \mathbf{V} + \operatorname{div} (\chi_e \nabla T_e + \chi_{\parallel e} \mathbf{h} (\mathbf{h} \nabla T_e)) + \frac{(\mathbf{j} - \mathbf{j}_0)^2}{\sigma}, \\ \frac{1}{\gamma_i - 1} \left(\frac{\partial p_i}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathbf{V} p_i) \right) &= -p_i \operatorname{div} \mathbf{V} + \operatorname{div} (\chi_i \nabla T_i + \chi_{\parallel i} \mathbf{h} (\mathbf{h} \nabla T_i)) + Q_\nu, \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \operatorname{rot} \left([\mathbf{V} \mathbf{H}] - \frac{c}{\sigma} (\mathbf{j} - \mathbf{j}_0) \right), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad T_{i,e} = \frac{p_{i,e}}{\rho}, \quad \mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ , \mathbf{V} , σ — плотность, скорость, проводимость плазмы соответственно; \mathbf{j}_0 — плотность силы тока пучка; \mathbf{H} — магнитное поле; ν — вязкость; Q_ν — нагрев плазмы, обусловленный работой вязких сил [14]; $p_{i,e}$, $T_{i,e}$ — давление и температура плазмы; $\chi_{\parallel e,i}$, $\chi_{e,i}$ — коэффициенты продольной и изотропной теплопроводности; $\gamma_e = \gamma_i = \gamma = 5/3$ — показатели адиабаты электронов и ионов; индекс i соответствует ионам, e — электронам.

Рассмотрим МГД-течение, обладающее винтовой симметрией. В этом случае скалярные величины и цилиндрические (r, φ, z) компоненты векторов зависят от координат таким образом, что выполняется соотношение

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (2)$$

При наличии винтовой симметрии различные функции зависят от величины $\varphi - z/R$, а не от φ и z по отдельности. Ниже под φ понимается величина $\varphi - z/R$. Для установки ГОЛ-3 параметр $R = z_0/(2\pi aN)$. Здесь $z_0 = 1200$ — длина установки, см; $a = 5$ — радиус установки, см; N — номер моды (целое число).

Имеются основания полагать, что в условиях ГОЛ-3 доминирующей является мода $N = 1$ (см. ниже), поэтому в дальнейшем принимается $N = 1$. Расчеты показывают, что в случае присутствия других мод (например, моды $N = 0$) результаты различаются незначительно.

В случае винтовой симметрии (2) целесообразно использовать g - и s -компоненты векторов, связанные с φ - и z -компонентами следующим образом:

$$f_s = f_\varphi - (r/R)f_z, \quad f_g = f_z + (r/R)f_\varphi.$$

Также удобно ввести компоненты векторов (для краткости будем называть их декартовыми компонентами вектора), которые связаны с компонентами r и φ соотношениями

$$f_x = f_r \cos \varphi - f_\varphi \sin \varphi, \quad f_y = f_r \sin \varphi + f_\varphi \cos \varphi.$$

В силу того что под φ понимается величина $\varphi - z/R$, эти компоненты совпадают с истинными декартовыми компонентами только при $R \rightarrow \infty$.

Поскольку длина установки ГОЛ-3 ограничена, симметрия (2) отсутствует. Выясним, в каком случае можно пренебречь краевыми эффектами. Этот вопрос является достаточно сложным. Для того чтобы оценить влияние краевых эффектов, предположим, что магнитное поле “вморожено” в торцы камеры. “Вмороженность” приводит к тому, что продольное поле, увлекаемое движущейся в поперечном направлении плазмой, деформируется. В результате генерируется поперечное поле. Как показано ниже, в этом случае смещение плазмы порядка радиуса нейтральной поверхности и приближенно равно $a/2$. Соответственно величина генерируемого из-за наличия торцов поперечного поля порядка $H_z a / (2z_0) \approx 0,1$ кГс. Для того чтобы это поле не оказывало сильного влияния на течение, необходимо, чтобы оно было значительно меньше поперечного магнитного поля, возникновение которого обусловлено продольным током, текущим по плазме. Величина поперечного магнитного поля порядка 1 кГс. Таким образом, используемое приближение оправдано. Реальная конструкция ГОЛ-3 такова, что ограничение на отношение a/z_0 является значительно более мягким.

Гофрировкой магнитного поля пренебрегается. Так как остывание плазмы за счет оттока тепла на торцы установки происходит за время порядка 50 мкс, а длительность рассматриваемых процессов составляет менее 10 мкс, тепловым потоком на торцы установки также можно пренебречь.

Далее будем использовать безразмерные величины. В качестве масштаба длины принимается радиус установки. Расчеты проводились при следующих характерных значениях: величина продольного магнитного поля $H_z = 50$ кГс, плотность $\rho_* = 10^{21}$ м⁻³, скорость (скорость Альфвена, вычисленная по величине тороидального магнитного поля) $V_A = H_z / \sqrt{4\pi\rho_*} = 3,48 \cdot 10^6$ м/с, время $a/V_A = 1,44 \cdot 10^{-8}$ с, давление $H_z^2/(4\pi)$ и т. д.

С учетом сказанного выше уравнения (1) принимают вид

$$\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) V_x - \frac{V_z V_y}{R} \right) = \nu \left(\Delta V_x - \left(V_x - 2 \frac{\partial V_y}{\partial \varphi} \right) R^{-2} \right) + F_x,$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_y}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)V_y - \frac{V_z V_x}{R} \right) = \nu \left(\Delta V_y - \left(V_y + 2 \frac{\partial V_x}{\partial \varphi} \right) R^{-2} \right) + F_y, \quad (3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)V_z \right) = \nu \Delta V_z + F_z;$$

$$\begin{aligned} (F_r, F_s) &= -\nabla(p - (\nu/3) \operatorname{div} \mathbf{V}) + G^{-1}(-\nabla(H_g^2/2) + j_g \nabla \psi), \\ F_g &= (\mathbf{H}\nabla)H_g, \quad p = p_i + p_e, \quad j_g = -\Delta_g(\psi) + 2H_g/(RG); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{V}\nabla\psi = -\eta(j_g - j_0); \quad (5)$$

$$\frac{\partial H_g}{\partial t} = G \operatorname{div}(G^{-1}\mathbf{S}) + \frac{2}{RG} \frac{\partial \psi}{\partial t}; \quad (6)$$

$$\mathbf{S} = -\mathbf{V}H_g + V_g \mathbf{H} + \eta \nabla H_g; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{V}\rho) = 0,$$

$$\frac{1}{\gamma_i - 1} \left(\frac{\partial p_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{V}p_i) \right) = -p_i \operatorname{div} \mathbf{V} + \operatorname{div}(\chi_{\parallel i} \mathbf{h}(\mathbf{h}\nabla)T_i) + \operatorname{div}(\chi_i \nabla T_i) + Q_\nu, \quad (8)$$

$$\frac{1}{\gamma_e - 1} \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{V}p_e) \right) = -p_e \operatorname{div} \mathbf{V} + \operatorname{div}(\chi_{\parallel e} \mathbf{h}(\mathbf{h}\nabla)T_e) + \operatorname{div}(\chi_e \nabla T_e) + Q_\eta,$$

$$Q_\eta = \eta(j_r^2 + G^{-1}(j_s^2 + (j_g - j_0)^2)), \quad (j_r, j_s) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_g}{\partial \varphi}, -\frac{\partial H_g}{\partial r} \right);$$

$$\mathbf{H} = (H_r, H_s) \equiv \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, -\frac{\partial \psi}{\partial r} \right), \quad \mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}}{(H_r^2 + G^{-1}(H_s^2 + H_g^2))^{1/2}}, \quad (9)$$

$$T_{i,e} = p_{i,e}/\rho, \quad G = 1 + r^2/R^2.$$

Здесь ψ — полоидальный магнитный поток (g -компонента вектора потенциала); H_g — g -компонента магнитного поля; η — сопротивление плазмы; Q_η — омический нагрев; $\chi_{\parallel i,e}$ и $\chi_{i,e}$ — безразмерные коэффициенты продольной и изотропной теплопроводности; \mathbf{e} — вектор с компонентами $e_r = e_s = 0$, $e_g = 1$. И использованные в (3)–(9) дифференциальные операторы имеют следующий вид [9, 15]:

$$\operatorname{div}(\mathbf{f}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rf_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}, \quad (\nabla a)_r = \frac{\partial a}{\partial r}, \quad (\nabla a)_s = \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial \varphi}, \quad (\mathbf{f}\nabla)a = f_r \frac{\partial a}{\partial r} + f_s \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial \varphi}.$$

Уравнения для скорости (3), записанные в декартовых компонентах, имеют более простой вид. Кроме того, использование декартовых компонент имеет принципиальное значение при построении конечно-разностного алгоритма [16], с помощью которого решается поставленная задача.

В качестве начальных условий выбрана осесимметричная конфигурация с нейтральной поверхностью и малым возмущением магнитного потока, нарушающим эту симметрию:

$$\psi = \psi_0(r) + \psi_p r(1 - r^2) \cos \varphi.$$

Здесь $\psi_p = 10^{-4}$ — амплитуда возмущения; функция ψ_0 соответствует распределению силы тока:

$$j_g(0) = \begin{cases} -5 \text{ кА}/(\pi r_1^2), & r < r_1 = 4 \text{ см}, \\ 0, & r > r_1. \end{cases}$$

При этом полагалось $H_z = 1$. Плотность плазмы была постоянной: $\rho = 1$, скорость плазмы $\mathbf{V} = 0$. Давление плазмы p_e и p_i либо выбиралось из условия равновесия плазмы в магнитном поле, либо задавалось в виде

$$p_e = p_i = \begin{cases} p_0, & r < r_0 = 2,5 \text{ см}, \\ p_0/10, & r > r_0. \end{cases}$$

Безразмерная величина p_0 задавалась равной $1,584 \cdot 10^{-3}$, что соответствует температуре $T_e = T_i = 1,16 \cdot 10^6$ К (100 эВ).

Таким образом, начальная конфигурация не является равновесной. Вследствие большой величины продольного поля небольшое смещение плазмы приводит к установлению необходимого равновесия. Кроме того, нагрев, обусловленный действием пучка, приводит к быстрому и сильному нагреву плазмы. Поэтому в изучаемых процессах конкретный вид начального распределения давления не играет принципиальной роли. Следует отметить, что экспериментальные данные по радиальному распределению давления отсутствуют.

Плотность пучка j_0 задавалась в виде

$$j_0 = \begin{cases} 30 \text{ кА}/(\pi r_0^2), & r < r_0 = 2,5 \text{ см}, \quad t < 8,64 \text{ мкс}, \\ 0, & r > r_0 = 2,5 \text{ см} \quad \text{или} \quad t < 8,64 \text{ мкс}. \end{cases}$$

Сопротивление плазмы вычислялось по формулам

$$\eta = \begin{cases} \eta_b \gg \eta_0, & r < r_0 = 2,5 \text{ см}, \quad t < 8,64 \text{ мкс}, \\ \eta_b + (\eta_0 - \eta_b)(r - r_0)/\delta, & r_0 < r < r_0 + \delta, \quad t < 8,64 \text{ мкс}, \\ \eta_0, & r > r_0 + \delta \quad \text{или} \quad t > 8,64 \text{ мкс}. \end{cases}$$

В расчетах ширина переходной области δ полагалась равной 0,5 см. Такое распределение η свидетельствует о том, что наличие пучка приводит к развитию мелкомасштабной пучковой неустойчивости, которая является причиной возникновения аномального сопротивления [2].

Задача решалась в области $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. На границе $r = 1$ полагалось

$$\mathbf{V} = 0, \quad T_{i,e} = \text{const} \quad (10)$$

и задавались тангенциальные компоненты электрического поля ($E_g = E_s = 0$) — условия проводящей стенки:

$$\psi = \text{const}, \quad \frac{\partial H_g}{\partial r} = 0. \quad (11)$$

Вязкость плазмы, как правило, мала. В безразмерных переменных коэффициент $\nu \leq 0,1\eta$ и его значение не оказывает влияния на результат расчета.

2. Конечно-разностная схема. Задача о тиринг-неустойчивости представляет собой одну из многочисленных гидродинамических задач, для которых естественной является цилиндрическая система координат (r, φ, z) . В этом случае граница расчетной области и токовый слой (область больших градиентов) расположены на окружностях. Начало координат физически не определено. Как известно, при численном решении подобных задач достаточно трудно получить гладкое решение в окрестности начала координат, что обусловлено уменьшением шага сетки в азимутальном направлении при $r \rightarrow 0$. При этом в окрестности $r = 0$ возникает нефизическая мелкомасштабная неустойчивость, приводящая в некоторых случаях к развалу решения.

В [16] подробно описана конечно-разностная схема, которая позволяет избежать указанных выше трудностей. Схема [16] предназначена для решения задачи о развитии тиринг-неустойчивости в токамаках в приближении двухжидкостной МГД-модели.

Предлагаемая в [16] схема, представляющая собой схему расщепления по пространственным переменным, обладает свойством полной аппроксимации [17] и достаточным запасом устойчивости. Схема [16] реализуется с помощью быстро сходящегося к абсолютно неявной схеме итерационного процесса. Оптимальный шаг по времени в этой схеме, по существу, ограничен числом Куранта в радиальном направлении. Это ограничение имеет физический характер и является приемлемым.

Для решения задачи (3)–(11) в [16] вводится сгущающаяся в нейтральном слое сетка по r с шагом r_i ($i = 0, \dots, i_0 + 1$). При этом $r|_{i=0} = 0$, $(r_{i_0} + r_{i_0+1})/2 = 1$. По φ выбирается равномерная сетка с шагом $h_\varphi = 2\pi/j_0$: $\varphi_j = jh_\varphi$ ($j = 1, \dots, j_0$). По j предполагается периодичность с периодом j_0 , где j_0 — четное число. В точках r_i , φ_j , называемых целыми, вычисляются значения параметров p , p_e , T , ρ , H_g , χ , η . Вводятся также полуцелые точки $r_{i+1/2} = (r_{i+1} + r_i)/2$ ($i = 0, \dots, i_0$), $\varphi_{j+1/2} = h_\varphi(j + 1/2)$, в которых вычисляются значения A_g , j_g , V , ν .

В настоящей работе схема [16] была модифицирована для решения поставленной выше задачи.

3. Результаты расчетов. Ниже представлены результаты расчетов одномерной и двумерной задач численного моделирования винтовых возмущений в открытых ловушках с электронным пучком.

3.1. *Одномерный случай.* Полагалось, что решение не зависит от φ ($\psi_p = 0$). В расчетах использовалось сопротивление вне пучка $\eta_0 = 4,5 \cdot 10^{-6}$, соответствующее кулоновскому значению при температуре $1,16 \cdot 10^6$ К (100 эВ). Наличие пучковой неустойчивости приводит к значительному увеличению сопротивления плазмы в области, занятой пучком, по сравнению с кулоновским значением. Развитие течения плазмы рассматривалось при $\eta_b = 100\eta_0$.

На рис. 1 представлена зависимость плотности тока от радиуса в начале процесса ($t = 50$), перед выключением пучка ($t = 600$) и через некоторое время после выключения пучка ($t = 700$). Результаты расчетов показывают, что вследствие неоднородности сопротивления плазмы и наличия пучка плотность тока в центре стремится к плотности тока пучка, а на краю образуется ток с противоположным знаком. Соответствующие такому току магнитное поле H_s и магнитный поток ψ (см. (5), (9)) в различные моменты времени показаны на рис. 2. Из рис. 2 следует, что к моменту окончания действия пучка образуется резонансная поверхность магнитного поля, т. е. H_s меняет знак при $r = 0,6$.

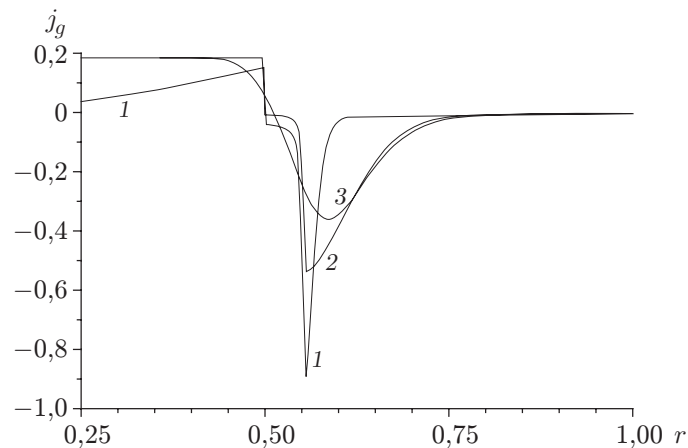


Рис. 1. Зависимость плотности тока j_g от радиуса r :
1 — $t = 50$; 2 — $t = 600$; 3 — $t = 700$

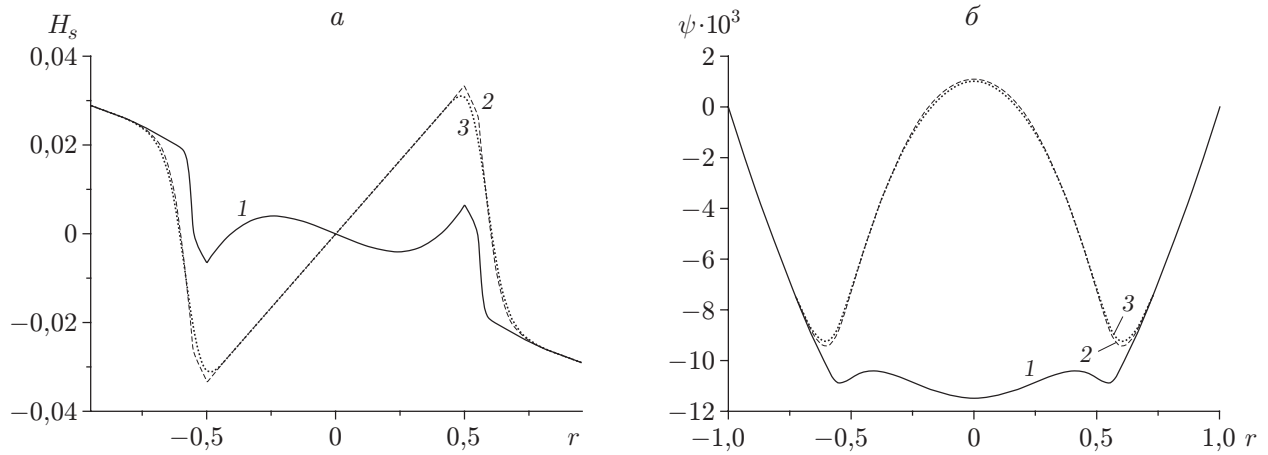


Рис. 2. Магнитное поле (а) и магнитный поток (б) в различные моменты времени:

1 — $t = 50$; 2 — $t = 600$; 3 — $t = 700$

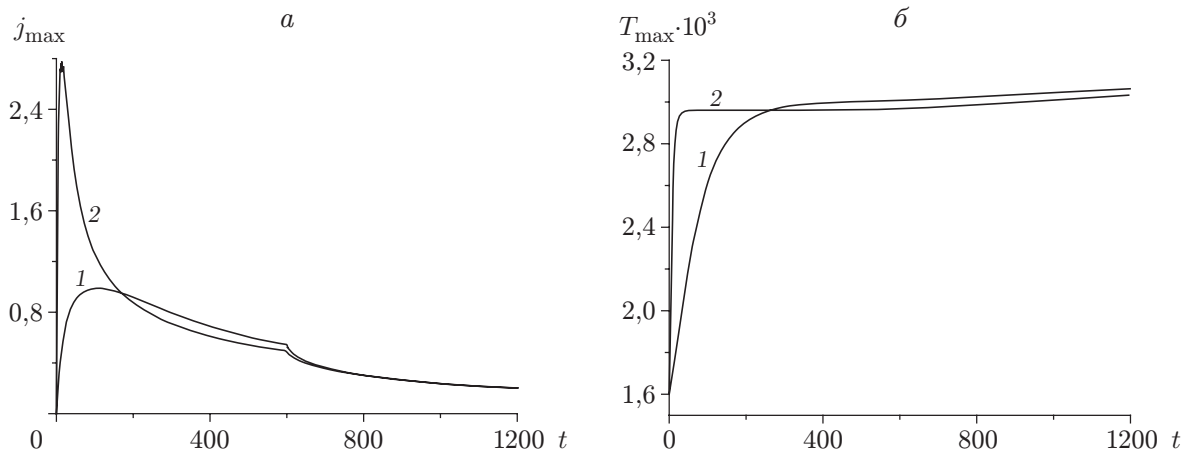


Рис. 3. Зависимости максимумов модуля плотности тока (а) и температуры плазмы (б) от времени:

1 — $\eta_b = 100\eta_0$; 2 — $\eta_b = 1000\eta_0$

Следовательно, существует возможность развития тиринг-неустойчивости. На рис. 2, б видно, что значение магнитного потока в центре больше, чем на границе $r = 1$. Поэтому тиринг-неустойчивость может привести к уничтожению внешнего потока и выбросу плазмы на стенку.

На рис. 3, а представлена зависимость максимума модуля плотности тока от времени при $\eta_b = 100\eta_0, 1000\eta_0$. Заметим, что максимум модуля j_z достигается в точке, соответствующей отрицательному току. Видно, что при большем значении η_b в начальный момент времени плотность тока увеличивается быстрее, чем при меньшем. Это обусловлено тем, что при $\eta_b = 1000\eta_0$ неоднородность сопротивления больше, чем при $\eta_b = 100\eta_0$. Также следует отметить, что резкое увеличение j_{\max} вызвано образованием тока с противоположным знаком. Существенное уменьшение плотности тока в первые моменты после выключения пучка обусловлено исчезновением пучковой неустойчивости, а также тем, что сопротивление плазмы становится однородным. В этом случае эффект собирания тока [4] после выключения пучка исчезает и распределение плотности тока становится более

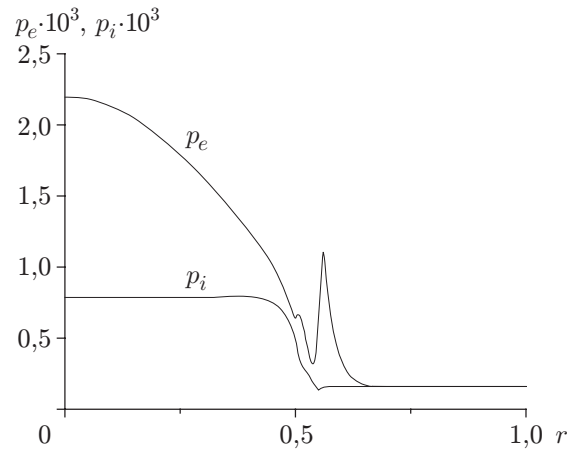


Рис. 4. Распределение давления ионов и электронов по радиусу в момент выключения пучка

гладким (кривая 3 на рис. 1). В момент выключения пучка максимальное значение модуля плотности тока слабо зависит от η_b .

Заметим, что изменение плотности тока определяется в основном функциями η_b и j_0 . Расчеты показывают, что результаты решения уравнений (5), (6), в которых положено $V = 0$, практически не отличаются от изложенных выше.

На рис. 3,б приведена зависимость максимума температуры плазмы $T_{\max} = T_e + T_i$ от времени при различных значениях η_b . Видно, что при большем значении η_b в начальный момент времени температура увеличивается быстрее, чем при меньшем. Однако при больших значениях t величина T_{\max} слабо зависит от η_b .

На рис. 4 показано распределение давления ионов и электронов по радиусу в момент выключения пучка. Видно, что давление электронов больше давления ионов, что обусловлено омическим нагревом.

Возникающая вследствие наличия пучка и большого градиента проводимости плазмы конфигурация является неустойчивой для нескольких мод (в частности, для $N = 1, 0$). Выбор моды $N = 1$ обусловлен предположением о том, что эта мода является основной, поскольку для моды $N = 1$ запас магнитного потока обоих знаков наибольший. Кроме того, имеются результаты предварительных трехмерных расчетов, подтверждающие, что мода $N = 1$ является доминирующей. Проведены расчеты моды $N = 0$ (второй по величине магнитных потоков разных знаков), которые показали отсутствие качественных отличий от представленных в данной работе результатов расчетов для моды $N = 1$ (в частности, время развития неустойчивости по порядку величины не изменилось).

Поскольку используемая в расчетах схема имеет второй порядок аппроксимации по пространственной переменной, численная дисперсия, оказывающая наиболее сильное влияние на распределение плотности плазмы в области наибольших градиентов (на краю пучка), приводит к образованию мелкомасштабных возмущений (рис. 5). Для подавления дисперсии вместо уравнения (7) использовалось уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{V}\rho) = -\varepsilon \Delta^2 \rho.$$

Член $\varepsilon \Delta^2 \rho$ существенно подавляет мелкомасштабные возмущения и слабо влияет на длинноволновые возмущения. На рис. 5 показано распределение плотности плазмы по радиусу при различных количестве узлов сетки I_0 и значениях параметра ε (предполагается, что $\varepsilon \sim I_0^{-2}$). Из рис. 5 следует, что при $\varepsilon \neq 0$ распределение является гладким и имеет место

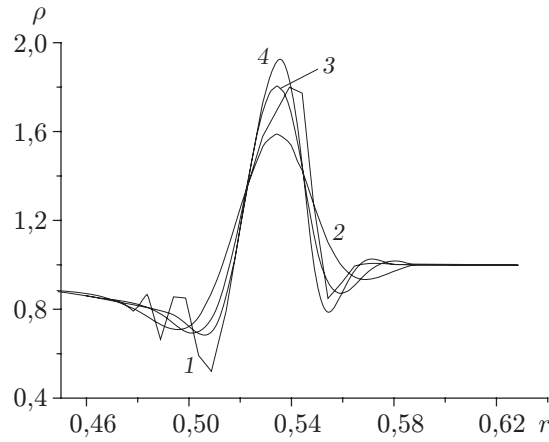


Рис. 5. Распределение плотности плазмы по радиусу при различных количестве узлов сетки I_0 и значениях параметра ε в момент времени $t = 600$:
 1 — $\varepsilon = 0$, $I_0 = 200$; 2 — $\varepsilon = 10^{-11}$, $I_0 = 200$; 3 — $\varepsilon = 0,25 \cdot 10^{-11}$, $I_0 = 400$; 4 — $\varepsilon = (1/16) \cdot 10^{-11}$, $I_0 = 800$

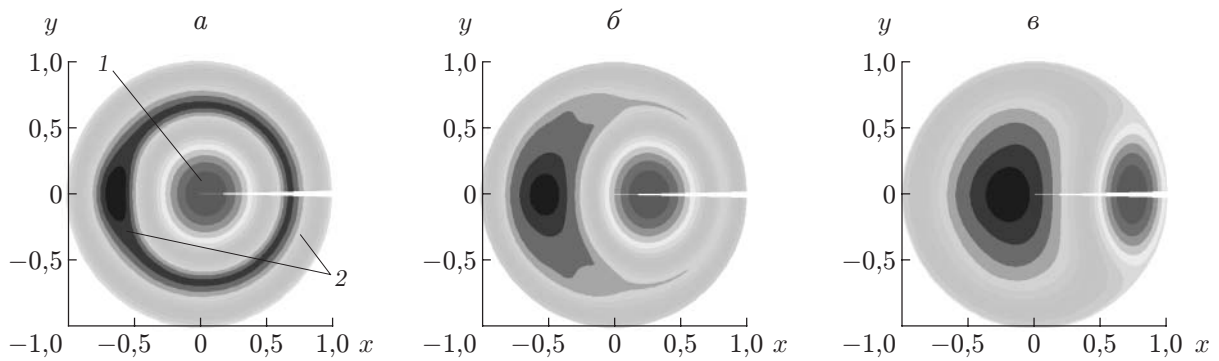


Рис. 6. Изолинии магнитного поля:
 а — $t = 500$; б — $t = 800$; в — $t = 1800$; 1 — положительный магнитный поток; 2 — отрицательный магнитный поток

сходимость при увеличении I_0 . При изменении I_0 графики остальных функций меняются незначительно. Заметим, что тиринг-неустойчивость определяется в основном распределением электрического тока и обусловленного им магнитного поля, а распределение плотности плазмы слабо влияет на ее развитие [10].

3.2. *Двумерный случай.* В двумерном случае наличие малого возмущения магнитного потока ψ_p приводит к появлению тиринг-неустойчивости. На рис. 6 показаны изолинии магнитного поля. Момент времени $t = 500$ соответствует началу процесса пересоединения, $t = 800$ — развитой неустойчивости, $t = 1800$ — выходу внутреннего потока на границу и установлению квазистационарной конфигурации. Следует отметить, что в рассматриваемом случае внутренний магнитный поток не уничтожается полностью в процессе пересоединения и квазистационарная конфигурация не является аксиально-симметричной.

На рис. 7 представлено распределение плотности тока по координатам x и y . Видно, что уже на этапе воздействия пучка ($t = 500$) возникает неустойчивость (потеря аксиальной симметрии). После выключения пучка ($t = 800$) токовый слой становится четко выраженным, что характеризует сильную неустойчивость. В момент окончания пересоединения ($t = 1800$) плотность тока мала.

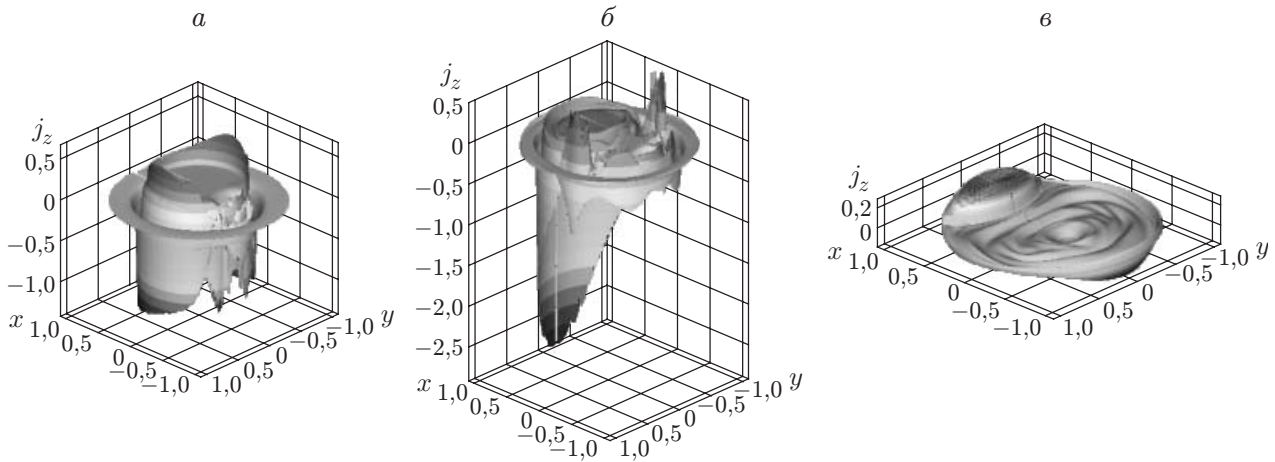


Рис. 7. Распределение плотности тока по координатам x, y в различные моменты времени:

$a - t = 500$; $b - t = 800$; $v - t = 1800$

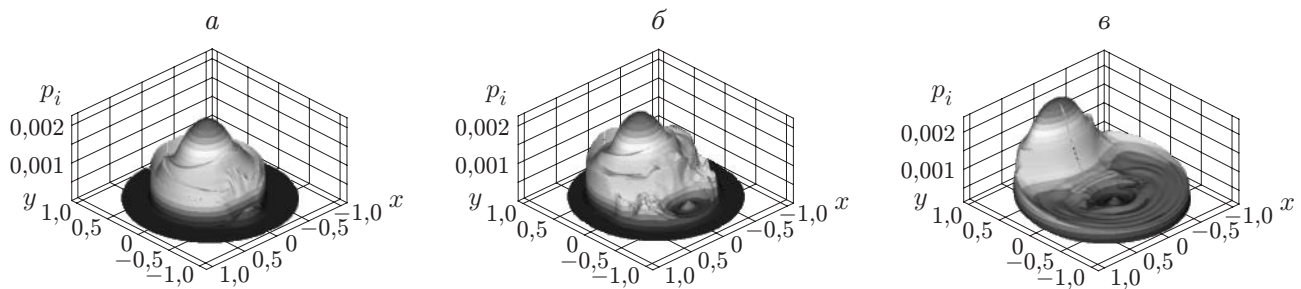


Рис. 8. Распределение давления ионов по координатам x, y в различные моменты времени:

$a - t = 500$; $б - t = 800$; $в - t = 1800$

На рис. 8 представлено распределение давления ионов в различные моменты времени. В результате развития неустойчивости область высокого давления движется к холодной границе. Следовательно, существует сильный поток тепла к границе.

На рис. 9, *a* представлена зависимость максимума модуля плотности тока от времени. Резкий скачок плотности тока в начальный момент времени обусловлен образованием тока с противоположным знаком. Затем плотность тока уменьшается вследствие сопротивления плазмы. Влияние тиринг-неустойчивости на зависимость $j_{\max}(t)$ при действии пучка невелико. После выключения пучка максимум плотности тока неравномерно увеличивается, что вызвано быстрым развитием тиринг-неустойчивости. После исчезновения отрицательного магнитного потока, окружающего положительный магнитный поток, неустойчивость исчезает, что приводит к резкому уменьшению плотности тока.

На рис. 9, *б* показана зависимость максимума температуры плазмы от времени. Заметим, что в начальный момент времени максимальное значение температуры резко увеличивается, а затем почти не меняется, в отличие от полной тепловой энергии.

Заключение. Таким образом, в рамках одномерной модели получены следующие результаты.

Эволюция распределения плотности тока определяется в основном величиной сопротивления и силой тока пучка. Движение плазмы практически не влияет на плотность тока.

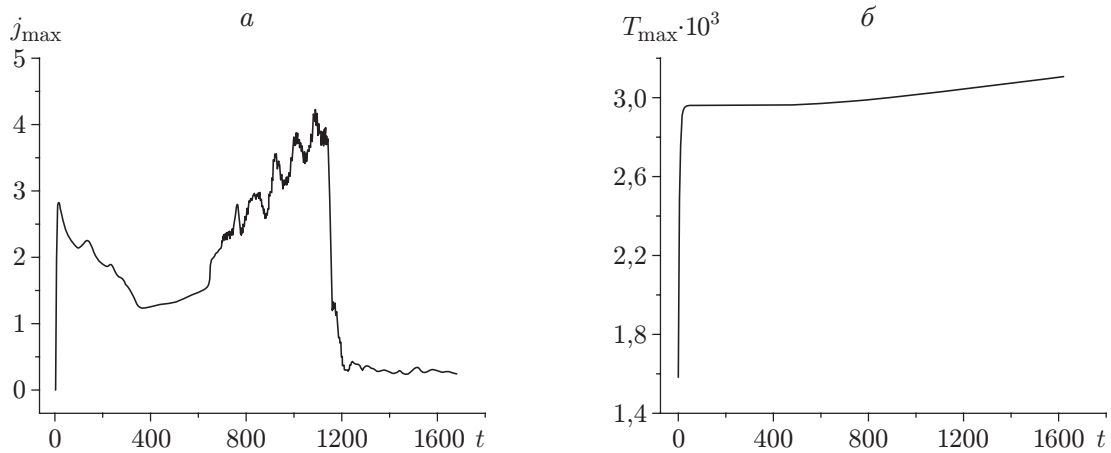


Рис. 9. Зависимости максимумов модуля плотности тока (а) и температуры плазмы (б) от времени

Максимальная плотность обратного тока тем больше, чем больше отношение сопротивлений плазмы внутри и вне пучка. Максимум плотности обратного тока в пространстве и времени существенно зависит от соотношения сопротивлений. Однако в момент окончания действия пучка распределение плотности тока слабо зависит от аномального сопротивления.

Увеличение температуры плазмы за счет омического нагрева происходит тем быстрее, чем больше отношение сопротивлений плазмы внутри и вне пучка, но температура плазмы в момент окончания действия пучка не зависит от этого отношения.

Согласно расчетам температура плазмы увеличивается примерно до $3,5 \times 10^6$ К (300 эВ). В экспериментах ее значение достигает $1,16 \cdot 10^7$ К (1 кэВ). Это свидетельствует о необходимости учитывать передачу энергии непосредственно от пучка к плазме. В расчетах также не учитывался поток тепла на торцы камеры. Возможно, учет этих факторов в численной модели и сравнение полученных результатов с данными экспериментов позволят определить количественные характеристики этих процессов. Следует отметить, что распределение наиболее важной величины — магнитного поля — слабо зависит от давления и температуры.

Результаты расчетов по двумерной модели позволяют сделать следующие выводы.

Неустойчивость начинает развиваться на стадии существования пучка и исчезает через некоторое время после его выключения. Время развития неустойчивости составляет около 7 нс, что согласуется с результатами экспериментов.

Распределение магнитного потока таково, что внутренний магнитный поток оказывается больше внешнего. В результате при развитии тиринг-неустойчивости горячая центральная плазма выплескивается на стенку камеры.

Существует необходимость оптимизации параметров пучка таким образом, чтобы развивающаяся тиринг-неустойчивость оставалась внутренней, т. е. энергия не выплескивалась на стенку камеры. Для этого необходимо, чтобы внутренний магнитный поток, возникающий вследствие наличия пучка, был меньше внешнего.

ЛИТЕРАТУРА

1. Burdakov A. V., Arzhannikov A. V., Astrelin V. T., et al. Fast heating of ions in GOL-3 multiple mirror trap // 31th Europ. phys. soc. conf. on controlled fusion and plasma phys. London: S. n., 2004. P. 4–156.

2. Akentjev R. Yu., Arzhannikov A. V., Astrelin V. T., et al. Multimirror open trap GOL-3: recent results // Trans. Fusion Technol. 2003. V. 43, N 1. P. 30–36.
3. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. Нелинейные винтовые возмущения плазмы в токамаке // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1973. Т. 65, вып. 2. С. 575–589.
4. Днестровский Ю. Н. Математическое моделирование плазмы / Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров. М.: Наука, 1982.
5. Biskamp D. Nonlinear theory of the $m = 1$ mode in hot tokamak plasmas // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 46, N 23. P. 1522–1525.
6. Lazzaro E., Ferrero M., Gianoli L., Valdettaro L. Four-field description of fast reconnection of $m = 1$, $n = 1$ modes // Phys. Scripta. 2000. V. 61. P. 624–627.
7. Aydemir A. Y. Nonlinear studies of $m = 1$ mode in high-temperature plasmas // Phys. Fluids B. 1992. V. 4, N 11. P. 3469–3472.
8. Xiangoang Wang, Bhattacharjee A. Nonlinear dynamics of the $m = 1$ instability and fast sawtooth collapse in high-temperature plasmas // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70, N 11. P. 1627–1630.
9. Жуков В. П. Моделирование тиринг-неустойчивости в нередуцированной двухжидкостной магнитной гидродинамике // Физика плазмы. 2005. Т. 31, № 8. С. 721–732.
10. Дудникова Г. И., Жуков В. П., Фукс Г. Поведение плотности и полного давления в процессе вынужденного и спонтанного пересоединения // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 11–15.
11. Charlton L. A., Holmes J. A., Lynch V. E., Carreras B. A. Compressible linear and nonlinear resistive MHD calculations in toroidal geometry // J. Comput. Phys. 1990. V. 86. P. 270–293.
12. Lerbinger R., Lucian J. F. A new semi-implicit method for MHD computations // J. Comput. Phys. 1991. V. 97. P. 444–459.
13. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183–272.
14. Ландау Л. Д. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1982.
15. Mohseni K., Colonius T. Numerical treatment of polar coordinate singularities // J. Comput. Phys. 2000. V. 157. P. 787–795.
16. Жуков В. П. Конечно-разностная схема для решения двухжидкостных МГД-уравнений в цилиндрической системе координат // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2005. Т. 45, № 1. С. 156–169.
17. Березин Ю. А. Моделирование нестационарных плазменных процессов / Ю. А. Березин, М. П. Федорук. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1993.

*Поступила в редакцию 26/IV 2006 г.,
в окончательном варианте — 6/XII 2006 г.*
