

УДК 532.51

## МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ТОНКОЙ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА ГАЗА

О. Ю. Цвелодуб, Д. Г. Архипов

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия  
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия  
E-mails: tsvel@itp.nsc.ru, theory@itp.nsc.ru

Выведена новая система уравнений для моделирования динамики длинноволновых возмущений на поверхности тонкого горизонтального слоя тяжелой вязкой жидкости, движущейся под действием турбулентного потока газа. В случае малых чисел Рейнольдса жидкости из данной системы уравнений получено эволюционное уравнение для величины отклонения толщины пленки от невозмущенного уровня. Приведены некоторые решения этого уравнения.

**Ключевые слова:** пленка вязкой жидкости, газовый поток, модельная система, эволюционное уравнение, эволюция возмущений.

DOI: 10.15372/PMTF20170405

**Введение и постановка задачи.** Совместное течение жидкости и газа — классическая задача гидродинамики. В задачах теплофизики и химической технологии часто рассматривается турбулентное течение газа над тонким слоем жидкости, покрытым волнами. Решение этой задачи в полной сопряженной постановке существенно затруднено, поэтому обычно моделирование включает два этапа: 1) определение напряжений газа на поверхности пленки; 2) расчет эволюции волн в жидкости. Поскольку скорость жидкости значительно меньше характерной скорости газа, поверхность раздела полагается жесткой и неподвижной. Кроме того, вследствие малости толщины пленки влияние возмущений границы раздела на возмущения скоростей частиц в газе является слабым. В силу этого задача вычисления нормальных и касательных напряжений газа на поверхности сводится к исследованию влияния на них отдельных пространственных гармоник. На втором этапе изучения совместного течения исследуется динамика нелинейных волн на поверхности пленки жидкости.

В данной работе моделируется динамика нелинейных волн на горизонтальной пленке тяжелой жидкости в известном поле напряжений на границе раздела фаз. Течение газа является турбулентным и происходит в горизонтальном канале. Полная постановка задачи для жидкости включает уравнения Навье — Стокса и уравнение неразрывности с соответствующими кинематическими и динамическими граничными условиями. При этом важной

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 16-19-10449).

© Цвелодуб О. Ю., Архипов Д. Г., 2017

проблемой является неопределенность положения подвижной границы, которое определяется в процессе решения. Целями данной работы являются получение системы уравнений, описывающей эволюцию длинноволновых возмущений границы раздела при умеренных числах Рейнольдса жидкости, и сведение ее в случае малых чисел Рейнольдса жидкости к одному эволюционному уравнению для величины отклонения толщины пленки от невозмущенного уровня.

В пренебрежении процессами уноса капель и осушения твердой поверхности область течения жидкости является односвязной. Наличие поверхностного натяжения обеспечивает отсутствие острых кромок на поверхности пленки. Поэтому если функция  $y = h(x, t)$ , определяющая положение точек границы области, является однозначной, то существует непрерывно дифференцируемое преобразование координат, отображающее область течения жидкости на полосу постоянной толщины:

$$x = x, \quad \eta = y/h(x, t), \quad t = t. \quad (1)$$

Новые переменные (1) являются неортогональными, поэтому для них обычная формулировка уравнений движения в векторной форме неприменима. В этом случае можно ограничиться простой заменой переменных в исходных уравнениях без преобразования векторов и тензоров (см., например, [1]). В результате получаются системы уравнений для компонент скорости жидкости в декартовой системе координат. В новой криволинейной системе координат (1) эти компоненты не образуют вектор.

Другой способ выполнения преобразования (1) предполагает использование новых переменных в уравнениях, записанных в тензорной, инвариантной относительно систем координат форме. С использованием такой записи в работе [2] получена система, описывающая в длинноволновом приближении эволюцию возмущений пленки жидкости, свободно стекающей по вертикальной плоскости в поле силы тяжести. В работе [3] данный метод обобщен на случай, когда пленка обдувается турбулентным спутным потоком газа. Обобщение этого метода на случай горизонтального слоя, движущегося под действием турбулентного потока газа, является тривиальным. Записывая уравнения в новой системе криволинейных координат покомпонентно, в пределе для длинных волн получаем систему, аналогичную системе, приведенной в [3], для вертикально стекающей пленки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (uh)}{\partial t} + \frac{\partial (u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial (uvh)}{\partial \eta} &= -\frac{h}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\eta}{h} \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\mu}{\rho h} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} &= -\rho gh, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (vh)}{\partial \eta} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $h$  — толщина пленки;  $p$  — давление;  $u, v$  — контравариантные компоненты продольной и поперечной скорости соответственно;  $\rho$  — плотность;  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости.

Из граничных условий прилипания жидкости на гиперповерхности  $\eta = 0$  следует

$$u(x, 0, t) = 0, \quad v(x, 0, t) = 0. \quad (3)$$

На гиперповерхности  $\eta = 1$  условия непротекания принимают вид

$$v \equiv \frac{d\eta}{dt} = 0, \quad v(x, 1, t) = 0. \quad (4)$$

В [4] рассматривалось совместное течение тонкой пленки жидкости и турбулентного потока газа в условиях микрогравитации. Показано, что в длинноволновом приближении на границе раздела динамические граничные условия имеют вид

$$\frac{\mu}{h} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x, 1, t) = T_g(x, t) \equiv T_0 \left( 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(k) k \hat{h}(k, t) e^{ikx} dk \right); \quad (5)$$

$$p(x, 1, t) = P_g(x, t) - 2\sigma H_R \equiv P_0(x) + \int_{-\infty}^{\infty} p(k)k\hat{h}(k, t) e^{ikx} dk - 2\sigma H_R, \quad (6)$$

где  $T_g(x, t)$ ,  $T_0$  — распределение касательных напряжений газа на поверхности пленки и их невозмущенная составляющая;  $P_g(x, t)$  — распределение пульсаций давления газа на поверхности пленки;  $P_0(x)$  — давление газа в отсутствие возмущений поверхности пленки жидкости;  $\tau(k) = \tau_r(k) + i\tau_{im}(k)$ ,  $p(k)$  — фурье-компоненты пульсаций напряжений газа, обусловленные криволинейностью границы раздела;  $H_R$  — средняя кривизна поверхности;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $\hat{h}(k, t)$  — фурье-компоненты разложения формы поверхности:

$$\hat{h}(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, t) e^{-ikx} dx.$$

Так как средняя кривизна является скаляром, вычислим ее в декартовых координатах. В длинноволновом приближении получаем

$$H_R = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \quad (7)$$

Используя соотношения (6), (7), приводим систему (2) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial \eta} &= \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{\mu}{\rho h} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - gh \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\chi}{\rho} h - \frac{h}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} ik^2 p(k) \hat{h}(k, t) e^{ikx} dk, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial \eta} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $\chi \equiv -dP_0/dx$ . Во многих задачах  $\chi = \text{const}$ . Как показывают оценки для достаточно широких каналов, слагаемым в (9), содержащим  $\chi$ , можно пренебречь. Ниже рассматривается этот случай.

Используя характерные масштабы скорости  $u_0$ , длины  $l_0$ , толщины  $h_0$ , времени  $l_0/u_0$  и напряжений  $\rho u_0^2$ , запишем систему уравнений (8) в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{u}{u_0}, & \tilde{v} &= \frac{l_0 v}{u_0}, & \tilde{x} &= \frac{x}{l_0}, & \tilde{t} &= \frac{u_0 t}{l_0}, & \tilde{h} &= \frac{h}{h_0}, \\ \tilde{h}_k &= \frac{\hat{h}(k, t)}{h_0 l_0}, & \tilde{k} &= k l_0, & \tilde{T}_0 &= \frac{T_0}{\rho u_0^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u_0^2 h_0}{l_0} \frac{\partial(\tilde{u}\tilde{h})}{\partial \tilde{t}} + \frac{u_0^2 h_0}{l_0} \frac{\partial(\tilde{u}^2\tilde{h})}{\partial \tilde{x}} + \frac{u_0^2 h_0}{l_0} \frac{\partial(\tilde{u}\tilde{v}\tilde{h})}{\partial \tilde{\eta}} &= \frac{h_0^2}{l_0^3} \frac{\sigma}{\rho} \tilde{h} \frac{\partial^3 \tilde{h}}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{gh_0^2}{l_0} \tilde{h} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} - \\ &- \frac{u_0^2 h_0^2}{l_0^2} \tilde{h} \int \hat{h}(k, t) i\tilde{k}^2 \tilde{p}(\tilde{k}) e^{i\tilde{k}\tilde{x}} d\tilde{k} + \frac{u_0}{h_0} \frac{\mu}{\rho \tilde{h}} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\eta}^2}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{u_0 h_0}{l_0} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{u_0 h_0}{l_0} \frac{\partial(\tilde{u}\tilde{h})}{\partial \tilde{x}} + \frac{u_0 h_0}{l_0} \frac{\partial(\tilde{v}\tilde{h})}{\partial \tilde{\eta}} = 0. \quad (10)$$

Введем следующие безразмерные параметры: число Рейнольдса  $Re$ , число Вебера  $We$ , число Фруда  $Fr$  и отношение толщины пленки к характерной длине волны  $\varepsilon$ :

$$Re = \frac{\rho h_0 u_0}{\mu}, \quad We = \frac{\sigma}{\rho l_0 u_0^2}, \quad Fr = \frac{u_0^2}{gh_0}, \quad \varepsilon = \frac{h_0}{l_0}.$$

В результате система (9), (10) принимает вид (знак “ $\sim$ ” опускается):

$$\begin{aligned} \varepsilon \operatorname{Re} \left( \frac{\partial (uh)}{\partial t} + \frac{\partial (u^2 h)}{\partial x} + \frac{\partial (uvh)}{\partial \eta} \right) = \\ = \varepsilon^2 \operatorname{Re} \operatorname{We} h h_{xxx} - \varepsilon^2 \operatorname{Re} h \int i \hat{h}(k, t) k^2 p(k) e^{ikx} dk + \frac{u_{\eta\eta}}{h} - \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Fr}} \varepsilon h \frac{\partial h}{\partial x}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (vh)}{\partial \eta} = 0. \quad (12)$$

Граничные условия (3)–(5) записываются в виде

$$u(x, 0, t) = 0, \quad v(x, 0, t) = 0; \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x, 1, t) = h \operatorname{Re} T_0 \left( 1 + \varepsilon \int \hat{h}(k, t) k \tau(k) e^{ikx} dk \right), \quad v(x, 1, t) = 0. \quad (14)$$

Выберем  $h_0$  и  $u_0$  таким образом, чтобы в случае безволнового течения безразмерная толщина пленки была равна  $\tilde{h} = 1$ , безразмерный расход пленки —  $\tilde{Q} = 1$ . Тогда невозмущенный профиль скорости течения задается в виде

$$u^0 = \operatorname{Re} T_0 \eta, \quad (15)$$

из условия  $\tilde{Q} = 1$  следует связь между числом Рейнольдса и безразмерным трением на невозмущенной границе раздела  $T_0$ :

$$Q^0 = \int_0^1 u^0 d\eta = 1.$$

Таким образом,

$$\operatorname{Re} T_0 = 2. \quad (16)$$

**Вывод эволюционного уравнения.** Известно, что для пленки, свободно стекающей по вертикальной плоскости, в случае малых расходов ( $\operatorname{Re} \sim 1$ ) задача сводится к эволюционному уравнению для возмущения толщины пленки. В работе [3] такой же результат был получен для случая, когда пленка обдувалась спутным турбулентным потоком газа, а в [4] — для случая совместного течения тонкой пленки жидкости и турбулентного потока газа в условиях микрогравитации. Получим подобное уравнение для задачи (11)–(14).

Вследствие малости толщины пленки по сравнению с длиной волны решение системы представляется в виде рядов по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$u = u^0 + \varepsilon u^1 + \dots, \quad v = v^0 + \varepsilon v^1 + \dots$$

Кроме того, введем медленное и быстрое времена:

$$t_0 = t, \quad t_1 = \varepsilon t.$$

Для нулевого порядка по  $\varepsilon$  с учетом (16) получаем задачу

$$u_{\eta\eta}^0 = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t_0} + \frac{\partial (u^0 h)}{\partial x} + \frac{\partial (v^0 h)}{\partial \eta} = 0; \quad (17)$$

$$u^0(x, 0, t_0) = 0, \quad v^0(x, 0, t_0) = 0, \quad \frac{\partial u^0}{\partial \eta}(x, 1, t_0) = 2h, \quad v^0(x, 1, t_0) = 0. \quad (18)$$

Решение системы (17), удовлетворяющее граничным условиям (18) при  $\eta = 0$ , имеет вид

$$u^0 = 2h\eta; \quad (19)$$

$$v^0 = -\frac{\eta}{h} \frac{\partial h}{\partial t_0} - 2\eta^2 \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (20)$$

Из (20) и граничного условия (18) для  $v^0(x, 1, t_0)$  получаем следующее уравнение для толщины пленки:

$$h_{t_0} + 2hh_x = 0. \quad (21)$$

Для первого порядка разложения по параметру  $\varepsilon$  из (11)–(14) получаем систему

$$\operatorname{Re} \left( \frac{\partial(u^0 h)}{\partial t_0} + \frac{\partial((u^0)^2 h)}{\partial x} + \frac{\partial(u^0 v^0 h)}{\partial \eta} \right) = \varepsilon \operatorname{Re} \operatorname{We} h h_{xxx} - \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Fr}} h \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{u_{\eta\eta}^1}{h}; \quad (22)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t_1} + \frac{\partial(u^1 h)}{\partial x} + \frac{\partial(v^1 h)}{\partial \eta} = 0 \quad (23)$$

с граничными условиями

$$u^1(x, 0, t_0, t_1) = 0, \quad v^1(x, 0, t_0, t_1) = 0; \quad (24)$$

$$\frac{\partial u^1}{\partial \eta}(x, 1, t_0, t_1) = 2h \int \hat{h}_k k \tau(k) e^{ikx} dk, \quad v^1(x, 1, t_0, t_1) = 0. \quad (25)$$

Используя выражения (19), (20) для  $u^0$  и  $v^0$ , запишем (22) в следующем виде:

$$u_{\eta\eta}^1 = \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Fr}} h^2 h_x - \varepsilon \operatorname{Re} \operatorname{We} h^2 h_{xxx}. \quad (26)$$

Решая (26) с граничными условиями (24), (25), для  $u^1$  имеем

$$u^1 = \operatorname{Re} h^2 \left( \frac{1}{\operatorname{Fr}} h_x - \varepsilon \operatorname{We} h_{xxx} \right) \left( \frac{\eta^2}{2} - \eta \right) + 2h\eta \int \hat{h}_k k \tau(k) e^{ikx} dk. \quad (27)$$

Подставляя решение (27) в уравнение (23), с учетом граничного условия (24) получаем следующее выражение для  $v^1$ :

$$v^1 = -\frac{1}{h} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \operatorname{Re} h^3 \left( \frac{1}{\operatorname{Fr}} h_x - \varepsilon \operatorname{We} h_{xxx} \right) \left( \frac{\eta^3}{6} - \frac{\eta^2}{2} \right) + h^2 \eta^2 \int \hat{h}_k k \tau(k) e^{ikx} dk \right) + \eta \frac{\partial h}{\partial t_1} \right]. \quad (28)$$

Из (28) и граничного условия (25) для  $v^1$  получаем еще одно уравнение для толщины пленки  $h$ :

$$\frac{\partial h}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{3} \operatorname{Re} h^3 \left( \varepsilon \operatorname{We} h_{xxx} - \frac{1}{\operatorname{Fr}} h_x \right) + h^2 \int \hat{h}_k k \tau(k) e^{ikx} dk \right] = 0. \quad (29)$$

Объединяя уравнения (21), (29) и переходя к общему времени  $t$ , имеем уравнение для толщины пленки

$$h_t + 2hh_x + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{3} \operatorname{Re} h^3 \left( \varepsilon \operatorname{We} h_{xxx} - \frac{1}{\operatorname{Fr}} h_x \right) + h^2 \int \hat{h}_k k \tau(k) e^{ikx} dk \right] = 0. \quad (30)$$

Напомним, что уравнение (30) выведено в приближении малых чисел Рейнольдса ( $\operatorname{Re} \sim 1$ ) и больших чисел Вебера ( $\operatorname{We} \varepsilon \sim 1$ ). В случае если рассматриваются пространственные периодические решения уравнения (30), интегральное слагаемое заменяется соответствующим рядом.

Ограничиваясь исследованием возмущений малой, но конечной амплитуды и вновь вводя медленное и быстрое времена, с помощью преобразования

$$h = 1 + \varepsilon h_1, \quad t_0 = t, \quad t_1 = \varepsilon t$$

из уравнения (30) находим

$$\frac{\partial h_1}{\partial t_0} + 2 \frac{\partial h_1}{\partial x} = 0; \quad (31)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial t_1} + 2h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + \frac{\text{We Re } \varepsilon}{3} \frac{\partial^4 h_1}{\partial x^4} + i \int \hat{h}_{1k} k^2 \tau(k) e^{ikx} dk = 0. \quad (32)$$

Из уравнения (31) следует, что в первом приближении (для быстрого времени) возмущения малой, но конечной амплитуды распространяются с характерной постоянной скоростью  $c_0 = 2$ . В этом приближении движение происходит без изменения начальной формы возмущений. Из (15), (16) следует, что  $c_0$  — скорость частиц жидкости на границе раздела в случае невозмущенного течения.

Уравнение (32) описывает нелинейную эволюцию возмущений при больших временах. Выбирая характерный продольный масштаб  $l_0$ , потребуем, чтобы коэффициенты при второй и четвертой производных в уравнении (32) были одинаковыми. В этом случае величина  $\varepsilon$  должна удовлетворять соотношению

$$\varepsilon = \frac{1}{\text{We Fr}}. \quad (33)$$

Тогда, выполнив замену

$$t' = bt_1, \quad h_1 = bH, \quad b = \frac{\text{We Re } \varepsilon}{3} \equiv \frac{\text{Re}}{3 \text{ Fr}},$$

уравнение (32) запишем в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} + 2H \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} + B \int_{-\infty}^{\infty} ik^2 \tau(k) \hat{H}(k, t) e^{ikx} dk = 0, \quad (34)$$

где  $B = 1/b$ .

Уравнение (34) является примером уравнений, описывающих эволюцию возмущений в активно-диссипативных средах. Неустойчивость линейных возмущений обеспечивается интегральным слагаемым, учитывающим возмущения трения на границе раздела пленка — газ, а диссипация — второй и четвертой производными (последняя моделирует влияние капиллярных эффектов). Влияние этих слагаемых выявляется при исследовании линейной устойчивости невозмущенного решения  $H = 0$ . Действительно, пренебрегая в уравнении (34) нелинейным членом и представляя его решение в виде

$$H \sim \exp(ik(x - ct)),$$

получаем следующее дисперсионное соотношение:

$$c \equiv c_r + ic_i = -i(k + k^3) + Bk\tau(k). \quad (35)$$

Возмущения являются неустойчивыми, если мнимая часть фазовой скорости  $c$  больше нуля. Учитывая, что для нейтрального возмущения мнимая часть фазовой скорости  $c_i = 0$ , из (35) для нейтрального волнового числа  $k_n$  находим

$$1 + k_n^2 - B\tau_{im}(k_n) = 0. \quad (36)$$

Напомним, что  $\tau_{im}$  — мнимая часть  $\tau = \tau(k_n)$ .

Параметры невозмущенного течения будем выбирать таким образом, чтобы при характерном продольном масштабе  $l_0$ , задаваемом соотношением (33), нейтральное волновое число было равно  $k_n = 1$ . При этом данному значению  $k_n$  должно соответствовать определенное значение  $\tau_{im}$ . Из (36) следует, что значение параметра  $B$  определяется из соотношения

$$B = 2/\tau_{im}(k_n). \quad (37)$$

Из соотношений (33), (37) следует, что характерный масштаб скорости  $u_0$  (скорость жидкости на поверхности невозмущенного течения) задается выражением

$$u_0 = \frac{B\sigma}{3\mu} \equiv \frac{2\sigma}{3\mu\tau_{im}(1)}.$$

При наличии для данного значения  $\tau_{im}$  нескольких корней  $k_n$  уравнения (36) нормироваться на единицу будет больший из них.

Таким образом, в случае малых чисел Рейнольдса исследование возмущений на поверхности горизонтальной пленки жидкости, движущейся под действием потока газа, сводится к решению одного нелинейного интегродифференциального уравнения.

Для того чтобы найти периодические по  $x$  решения уравнения (34), функцию  $H$  представим в виде пространственного ряда Фурье:

$$H(x, t) = \sum_n H_n(t) \exp(iknx). \quad (38)$$

Так как  $H$  — вещественная функция, то  $\bar{H}_{-n} = H_n$  (черта означает операцию комплексного сопряжения).

Подставляя (38) в уравнение (34), получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для фурье-гармоник  $H_n(t)$ . Полагая, что все значения  $H_n(t)$  с индексами  $|n| \geq N$  равны нулю, получаем конечномерный аналог этой системы.

При исследовании эволюции периодических возмущений будем полагать, что среднее отклонение толщины пленки от невозмущенного уровня равно нулю (условие нормировки).

**Результаты расчетов нелинейных волн.** При проведении расчетов использовались данные о пульсациях трения на границе раздела пленка — газ, полученные в [3] по модели Бенджамина.

На рис. 1 приведена зависимость мнимой части фазовой скорости  $c_i$  для неустойчивых возмущений от волнового числа при различных значениях параметра  $B$ . При этих значениях  $B$  значения безразмерного волнового числа стенки  $\tilde{k}_g \equiv \delta k_g = kv/u^*$  ( $\delta = v/u^*$  — толщина пограничного слоя;  $u^* = \sqrt{T_0/\rho_g}$  — размерная динамическая скорость;  $k = 2\pi/\lambda_{ст}$  — размерное волновое число для соответствующего пространственного периода  $\lambda_{ст}$  волнистой стенки) из [3], при которых наибольшее значение  $k_{n1} = 1$ , равны  $\tilde{k}_g = 0,0033; 0,0050;$

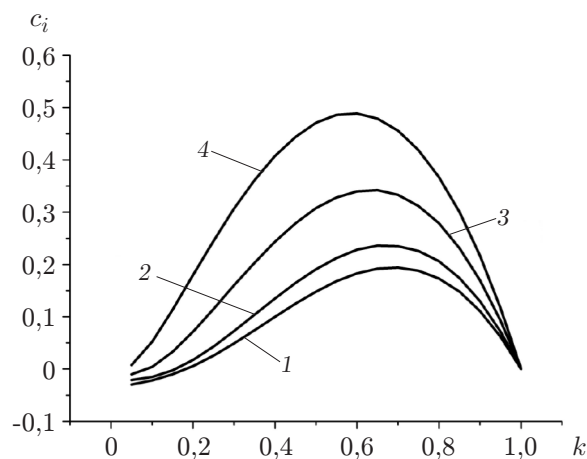


Рис. 1. Зависимость мнимой части фазовой скорости  $c_i$  для неустойчивых возмущений от волнового числа  $k$  при различных значениях параметра  $B$ :

1 —  $B = 0,363$ , 2 —  $B = 0,327$ , 3 —  $B = 0,305$ , 4 —  $B = 0,334$

0,0100; 0,0200 (кривые 1–4 соответственно). На рис. 1 видно, что для уравнения (34) область неустойчивости волновых чисел  $k$  ограничена снизу конечным значением волнового числа, в отличие от известного уравнения Курамото — Сивашинского, для которого область неустойчивости волновых чисел находится в интервале  $0 \div k_n$  (для уравнения (34) — в интервале  $k_{n_2} \div k_{n_1}$ ).

Уравнение Курамото — Сивашинского имеет счетное множество семейств решений в виде стационарно бегущих волн. Известно, что эволюция периодических решений этого уравнения существенно зависит от числа решений в виде стационарно бегущих волн для данного волнового числа (см., например, [5]). Несмотря на то что области неустойчивости волновых чисел линейных возмущений для уравнения Курамото — Сивашинского и уравнения (34) не являются топологически подобными, следует ожидать, что структура решений уравнения (34) в виде стационарно бегущих волн также будет нетривиальной.

В то же время, учитывая различие структур областей неустойчивости уравнения (34) и уравнения Курамото — Сивашинского, можно предположить, что уравнение (34) не имеет решений в виде уединенных стационарно бегущих волн.

Представленные ниже результаты получены для периодических возмущений, для которых в начальный момент времени не равной нулю задавалась либо только первая гармоника, либо первая и вторая гармоники, при этом выбиралось одно значение параметра  $B = 0,327$ .

Рассмотрим эволюцию возмущений в той области волновых чисел, где существует только одно семейство решений в виде стационарно бегущих волн. В этом случае волновые числа находятся вблизи верхней границы области неустойчивости ( $0,5k_n \leq k \leq k_n$ ) (см., например, [3, 5]). При этом все начальные возмущения эволюционируют к соответствующему решению в виде стационарно бегущей волны. Как показывают расчеты, такая же ситуация имеет место для решений уравнения (34). При этом чем ближе волновое число к нейтральному волновому числу  $k_{n_1}$ , тем более значительно первая гармоника превышает остальные гармоники и тем ближе форма установившейся стационарно бегущей волны к синусоиде. Такое поведение гармоник обусловлено тем, что только первая из них находится в области неустойчивости. Вторая гармоника расположена на достаточно большом расстоянии от границы этой области, поэтому в линейном случае она и более высокие гармоники быстро затухают. Учет квадратичной нелинейности (второе слагаемое в уравнении (34)) приводит к тому, что модуль первой гармоники существенно превышает модули остальных гармоник.

По мере продвижения вглубь области неустойчивости (в направлении меньших волновых чисел) характер эволюции меняется. На рис. 2, 3 показано развитие возмущения с волновым числом  $k = 0,6$ . Решение приближается к решению в виде стационарно бегущей волны (см. рис. 2), при этом вторая и третья гармоники соизмеримы с первой. В данном случае также только первая гармоника находится в области неустойчивости, вторая гармоника, находящаяся в области устойчивости, располагается достаточно близко к границе области неустойчивости, и при выходе решения на стационарный режим учет нелинейности приводит к существенному увеличению ее модуля. В результате более высокие гармоники также достигают больших установившихся значений. Поэтому форма установившейся волны значительно отличается от синусоиды (см. рис. 3). На рис. 3 показаны профили волн в различные моменты времени. По оси абсцисс отложены две длины волны. Скорость стационарно бегущей волны равна  $c = 0,341$ .

На рис. 4, 5 показано развитие возмущения с волновым числом  $k = 0,5$ . В данном случае решение сходится к решению в виде стационарно бегущей волны, скорость которой равна  $c = 0,023$ . При этом величина первой гармоники незначительно превышает остальные, вследствие чего форма волны является несинусоидальной (см. рис. 5). Результаты



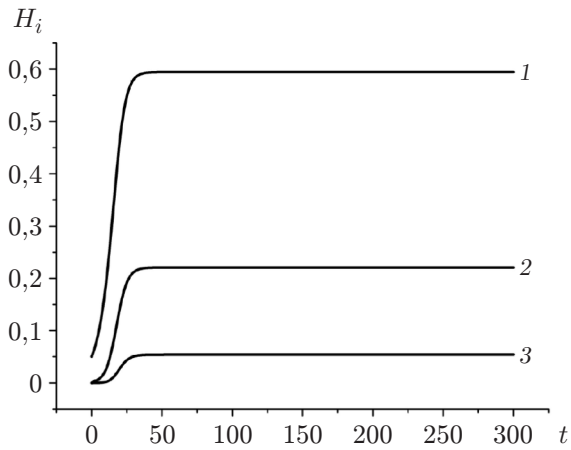


Рис. 2

Рис. 2. Зависимости модулей первой  $H_1$  (1), второй  $H_2$  (2) и третьей  $H_3$  (3) фурье-гармоник от времени при  $k = 0,6$ ,  $|H_1(0)| = 0,05$

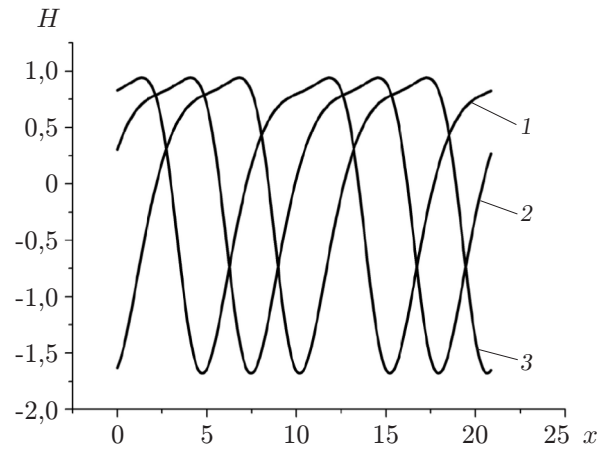


Рис. 3

Рис. 3. Профили поверхности при  $k = 0,6$  в различные моменты времени: 1 —  $t = 100$ , 2 —  $t = 200$ , 3 —  $t = 300$

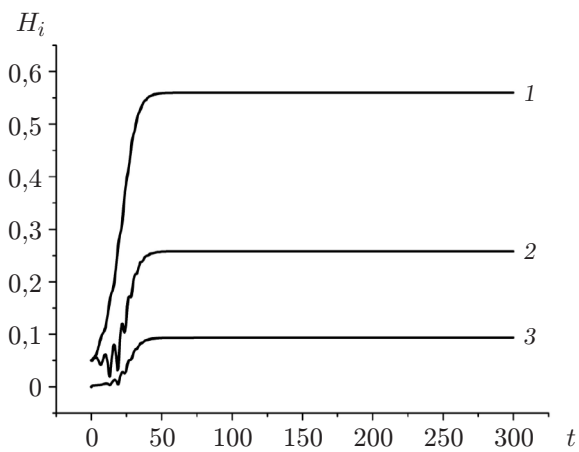


Рис. 4

Рис. 4. Зависимости модулей первой  $H_1$  (1), второй  $H_2$  (2) и третьей  $H_3$  (3) фурье-гармоник от времени при  $k = 0,5$ ,  $|H_1(0)| = 0,05$ ,  $|H_2(0)| = 0,05$

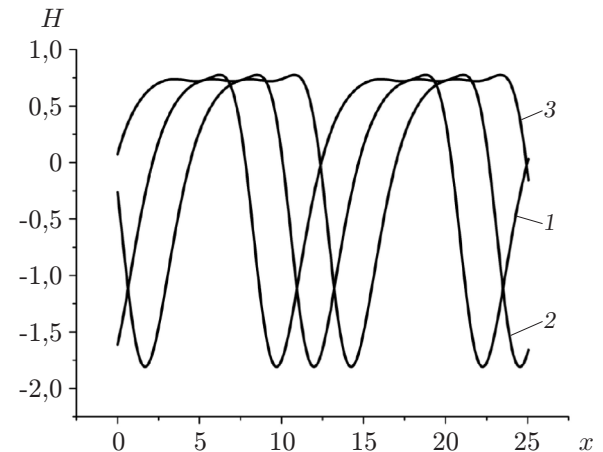


Рис. 5

Рис. 5. Профили поверхности при  $k = 0,5$  в различные моменты времени: 1 —  $t = 100$ , 2 —  $t = 200$ , 3 —  $t = 300$

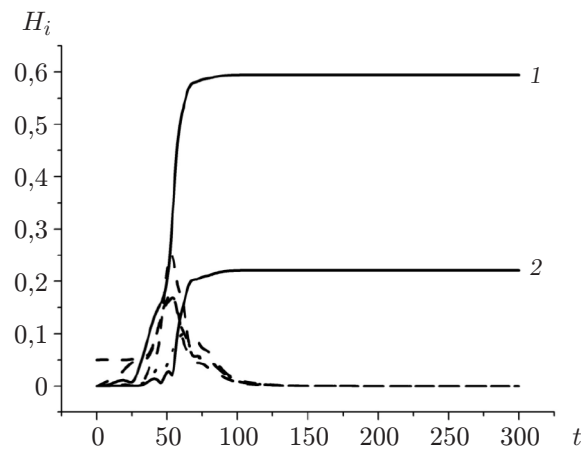


Рис. 6. Зависимости модулей фурье-гармоник от времени при  $k = 0,2$ ,  $|H_1(0)| = 0,05$ :  
 1 —  $H_6$ , 2 —  $H_3$ , штриховые кривые —  $H_1, H_2, H_4, H_5$

проведенных расчетов позволяют предположить, что в интервале  $0,5k_{n_1} \leq k \leq k_{n_1}$  существует только одно семейство решений в виде стационарно бегущих волн. Об этом, в частности, свидетельствует тот факт, что при варьировании начальных условий решения эволюционировали к одному и тому же решению в виде стационарно бегущей волны. Например, для режима, представленного на рис. 4, 5, в начальный момент времени не равными нулю задавались первая ( $H_{1r} = 0,05, H_{1i} = 0$ ) и вторая ( $H_{2r} = 0,05, H_{2i} = 0$ ) гармоники, но результат эволюции не менялся при любом их значении.

При дальнейшем продвижении в область неустойчивости ( $k \leq 0,5k_{n_1}$ ) характер эволюции решений значительно усложняется и существенно зависит от начальных данных. Анализ типов эволюции возмущений в этой области существенно затруднен, поэтому ниже приводятся только два примера.

Рассмотрим случай, когда в процессе эволюции старшие гармоники со временем становятся преобладающими по сравнению с первой, причем достаточно часто все амплитуды некоторого регулярного подмножества гармоник со временем стремятся к нулю, и решение сходится к решению, которому соответствует стационарный режим с волновым числом, превышающим волновое число начального возмущения (рис. 6). На рис. 6 начальное возмущение имело волновое число  $k = 0,2$  и ненулевую первую гармонику:  $H_{1r} = 0,05, H_{1i} = 0$ . По окончании некоторого переходного процесса ( $0 \leq t \leq 100$ ) к нулю стремятся все гармоники, кроме кратных гармонике  $H_3$  (кривые 1, 2). Модули этих гармоник вышли на стационарные значения. В результате решение сходится к решению в виде стационарно бегущей волны с волновым числом  $k = 0,6$  и  $c = 0,341$ , т. е. к тому же решению, которому соответствует режим, представленный на рис. 3.

Рассмотрим возмущения с волновым числом  $k = 0,1$ . При  $B = 0,327$  это волновое число находится в области устойчивости (кривая 2 на рис. 1), поэтому линейные возмущения являются затухающими. Однако, если амплитуда этой гармоники мала, но конечна, генерируемые вследствие нелинейности старшие гармоники принадлежат области неустойчивости. В результате развивается нелинейный режим. На рис. 7 представлены два различных решения при  $k = 0,1$ . В начальный момент ненулевыми задавались первая и вторая гармоники. По окончании переходного периода ( $0 \leq t \leq 150$ ) каждое из представленных решений при больших временах сходится к решению в виде стационарно бегущей волны. При этом у первого решения (см. рис. 7,а) сохраняются только гармоники, крат-

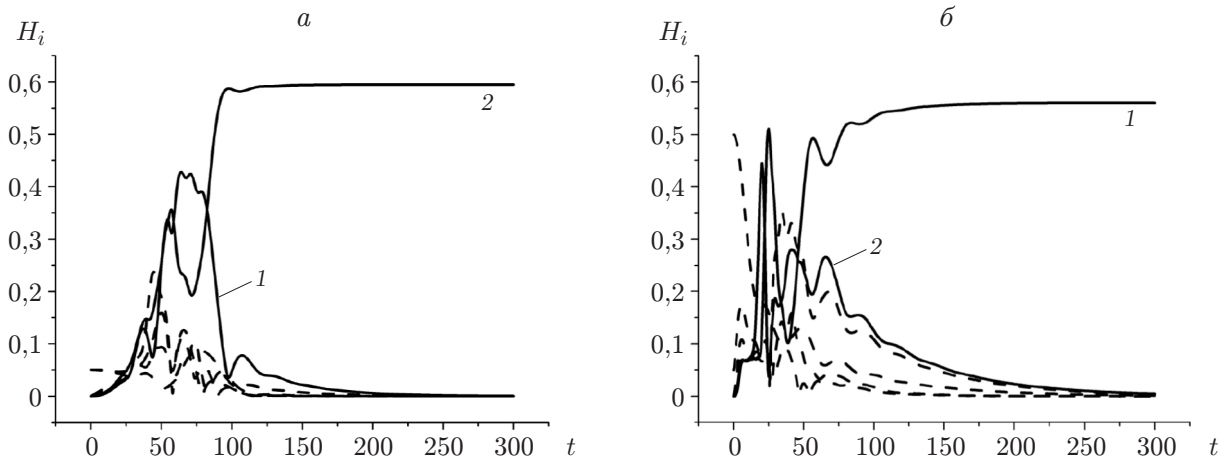


Рис. 7. Зависимости модулей фурье-гармоник от времени при  $k = 0,1$ :  
 $a$  —  $H_{1r}(0) = 0,05$ ,  $H_{1i}(0) = 0$ ,  $H_{2r}(0) = 0,05$ ,  $H_{2i}(0) = 0$ ,  $b$  —  $H_{1r}(0) = 0,5$ ,  $H_{1i}(0) = 0$ ,  
 $H_{2r}(0) = 0,05$ ,  $H_{2i}(0) = 0$ ; 1 —  $H_5$ , 2 —  $H_6$ , штриховые кривые —  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ ,  $H_4$

ные гармоники  $H_6$ . Это означает, что решение сходится к решению с волновым числом  $k = 0,6$ , которому соответствует решение в виде стационарно бегущей волны, представленной на рис. 3. Для второго решения (см. рис. 7, б) при больших временах отличными от нуля остаются только гармоники, кратные  $H_5$ . В результате это решение сходится к решению в виде стационарно бегущей волны с волновым числом  $k = 0,5$ . Это то же решение, к которому сходится решение, представленное на рис. 4, 5.

Полученные решения практически не зависят от начальных значений компонент гармоник. Так, в случае небольших начальных значений первой гармоники  $|H_1| = 0,005 \div 0,200$ , меняя эти значения как у первой, так и у второй гармоники в достаточно широком диапазоне, переходный период, в течение которого 10 гармоник соизмеримы друг с другом, можно сдвинуть ( $|H_{1,2}| = 0,005 \div 0,010$ ) или растянуть ( $|H_{1,2}| = 0,1 \div 0,2$ ), но в конечном счете решения сойдутся к стационарному решению с волновым числом  $k = 0,6$ .

Если начальные значения первой или второй гармоники не малы и варьируются в достаточно широком диапазоне ( $|H_{1,2}| = 0,4 \div 0,7$ ), то решения также сойдутся к решению в виде стационарно бегущей волны с волновым числом  $k = 0,5$ .

**Заключение.** В работе получена новая система уравнений для моделирования динамики длинноволновых возмущений на поверхности горизонтального тонкого слоя вязкой жидкости, движущейся под действием турбулентного потока газа. В случае малых чисел Рейнольдса исследование слабонелинейных возмущений сводится к решению эволюционного нелинейного интегродифференциального уравнения для величины отклонения толщины пленки от невозмущенного уровня. Приведенные примеры расчетов показывают, что это уравнение может быть использовано при моделировании волновых процессов в пленочных течениях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гешев П. И., Ездин Б. С. Расчет профиля скорости и формы волны на стекающей пленке жидкости // Гидродинамика и тепломассообмен течений жидкости со свободной поверхностью: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1985. С. 49–57.

2. **Алексеев С. В., Архипов Д. Г., Цвелодуб О. Ю.** Дивергентная система уравнений для пленки жидкости, стекающей по вертикальной плоскости // Докл. АН. 2011. Т. 436, № 1. С. 43–46.
3. **Вожак И. С., Архипов Д. Г., Цвелодуб О. Ю.** Моделирование нелинейных волн на поверхности тонкой пленки жидкости, увлекаемой турбулентным потоком газа // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22, № 2. С. 201–212.
4. **Tsvlodub O. Yu., Arkhipov D. G.** Nonlinear wave simulation on a surface of liquid film entrained by turbulent gas flow at weightlessness // Microgravity Sci. Technol. 2013. V. 25, N 3. P. 179–186.
5. **Цвелодуб О. Ю.** Моделирование волновых режимов на пленке вязкой жидкости, стекающей по вертикальной плоскости // Теплофизика и аэромеханика. 2012. Т. 19, № 2. С. 183–192.

*Поступила в редакцию 24/VIII 2016 г.*

---