

УДК 532.517.4

**АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОГО
ОСЕСИММЕТРИЧНОГО СЛЕДА ***

В. Е. Козлов

*Центральный институт авиационного моторостроения,
111250 Москва*

Проблемы численного моделирования осесимметричных турбулентных следов подробно описаны в [1]. В число рассмотренных в этой работе моделей турбулентности не вошли широко распространенные однопараметрические модели относительно коэффициента турбулентной вязкости (см., например, [2-7]). Данная работа частично восполняет этот пробел.

1. Постановка задачи. Залишем уравнение для малого дефекта скорости $u_d = U_\infty - u$ в дальнем осесимметричном следе [8] (жидкость несжимаемая, плотность постоянная):

$$U_\infty \frac{\partial u_d}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \varepsilon \frac{\partial u_d}{\partial r} \right). \quad (1.1)$$

Здесь ось x совпадает с направлением основного потока; U_∞ — скорость основного потока; $r = (y^2 + z^2)^{1/2}$; ε — коэффициент турбулентной вязкости, определяемый с помощью модели турбулентности. Рассматриваются три однопараметрические модели турбулентности в случае дальнего осесимметричного следа:
модель [4]

$$U_\infty \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0,6 G \varepsilon \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| - b \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right)^2 + a G \frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right),$$

$$G = 1 + 100 \frac{0,01 F^4 + 10^{-10}}{0,01 F^4 + 10^{-10} + (\partial u / \partial r)^4},$$

$$F = \frac{1}{0,09} \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right)^2 - 0,41^2 \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \right],$$

$$a = \frac{0,24}{0,25 \cdot 0,41^2 \cdot 0,4} = 14,277, \quad b = \frac{0,24}{0,41^2 \cdot 0,4} = 3,569;$$

модель [5]

$$U_\infty \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0,1355 \varepsilon \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| + 0,933 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right)^2 + \frac{1,5}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right);$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17687).

модель [6]

$$U_{\infty} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0,1 \varepsilon \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| + 0,8 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right)^2 + \frac{0,8}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) - \\ - 0,05 \varepsilon^{4/3} \left| \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right|^{2/3} + 0,4 \left(\varepsilon \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \right)^{1/2} \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right| + \\ + 4 \varepsilon \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + \left| \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} \right| \right].$$

Заметим, что константа 10^{-10} в выражении для G (модель [4]) вводится для удобства вычислений с целью избежать деления на нуль (см. [4]). Вводятся переменные (см. [9])

$$f = \frac{u_d}{u_c}, \quad \eta = \frac{r}{l_c},$$

где u_c, l_c — характерные масштабы скорости и длины, определяемые с помощью соотношений

$$u_c = U_{\infty} (x - x_0)^{-2/3} (C_x S)^{1/3}, \quad l_c = (C_x S)^{1/3} (x - x_0)^{1/3}.$$

Здесь $x_0 = \text{const}$; C_x — коэффициент сопротивления обтекаемого тела, определенный с использованием характерной площади тела S , в качестве которой берется площадь миделева сечения. Перейдем к безразмерному коэффициенту турбулентной вязкости φ с помощью соотношения

$$\varphi = \varepsilon u_c^{-1} l_c^{-1}.$$

Предполагая, что $f = f(\eta)$ и $\varphi = \varphi(\eta)$, после преобразований уравнения (1.1) получим

$$\eta f' + 2f + 3\varphi f'' + 3f'(\varphi' + \varphi\eta^{-1}) = 0.$$

Выписанные выше модели турбулентности в новых обозначениях примут следующий вид:
модель [4]

$$\eta \varphi' + \varphi + 1,8 G \varphi |f'| + 3 a G \varphi \varphi'' + 3 \varphi' (a G \varphi \eta^{-1} - 3 b \varphi') = 0,$$

$$G = 1 + 100 \frac{0,01 F^4 + 10^{-10}}{0,01 F^4 + 10^{-10} + (f')^4},$$

$$F = \frac{1}{0,09} \left[\frac{\varphi' \varphi'}{\varphi} - 0,41^2 |f'| \right];$$

модель [5]

$$\eta \varphi' + \varphi + 0,4065 \varphi |f'| + 4,5 \varphi \varphi'' + \varphi' (4,5 \varphi \eta^{-1} + 7,299 \varphi') = 0;$$

модель [6]

$$\eta \varphi' + \varphi + 0,3 \varphi |f'| + 14,4 \varphi \varphi'' + 12 \varphi |\varphi''| + \varphi' (14,4 \varphi \eta^{-1} + 4,8 \varphi') - \\ - 0,15 \varphi^{4/3} |f'' + f' \eta^{-1}|^{2/3} + 1,2 (\varphi |f'|)^{1/2} |\varphi'| = 0.$$

Граничные условия:

$$f'(0) = f(\infty) = \varphi'(0) = \varphi(\infty) = 0.$$

Заметим, что течение в следе удовлетворяет условию равенства потока избыточного импульса силе сопротивления:

$$2\pi \int_0^{\infty} u(U_{\infty} - u)r dr = C_x 0,5 U_{\infty}^2 S.$$

Переходя в этом соотношении к автомодельным переменным, получим условие нормировки для f :

$$\int_0^{\infty} f \eta d\eta = (4\pi)^{-1}. \quad (1.2)$$

2. Результаты расчетов. Для решения поставленной задачи использовались метод установления и неявная монотонная конечно-разностная схема [10] первого порядка точности. Расчеты проводились на сетке с количеством узлов $N = 800$. Уменьшение вдвое числа узлов привело к изменению значений $f(0)$ и $\varphi(0)$ на $-3,1$ и $+0,8\%$ соответственно при использовании модели [4], $+0,3$ и $-0,7\%$ — модели [5], $-0,8$ и $+0,06\%$ — модели [6].

Были рассчитаны распределения в следе относительной скорости $f(\eta)$ и относительного напряжения трения $\tau_*(\eta) = \varphi |f'|$. Эти зависимости представлены на рис. 1, 2, где линии 1–3 относятся к моделям турбулентности [4–6], кружками и треугольниками обозначены экспериментальные данные [9] для удлиненного тела вращения и сферы соответственно. Видно, что расчеты с использованием модели турбулентности [5] хорошо согласуются с экспериментальными результатами, полученными для плохо обтекаемого тела — сферы.

При применении модели [6] имеет место хорошее согласование с экспериментальными данными для хорошо обтекаемого тела — удлиненного тела вращения. Наконец, расчеты с использованием модели [4] позволяют получить результаты, которые примерно равно удалены от экспериментальных данных, относящихся как к плохо, так и к хорошо обтекаемым телам.

Кроме приведенных на рис. 1, 2 автомодельных решений, есть тривиальное решение $f = 0$, $\varphi = 0$. Никаких других автомодельных решений получить не удалось. В качестве примера рассмотрим два варианта задания начальных данных, необходимых при итерационном методе решения

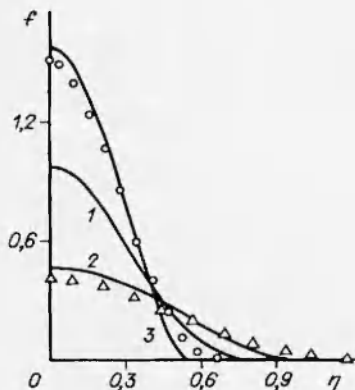


Рис. 1

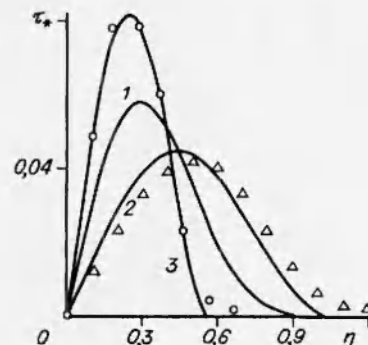


Рис. 2

поставленной задачи (в первом варианте начальные данные близки к экспериментальным для хорошо обтекаемого тела, а во втором — для плохо обтекаемого тела):

вариант 1

$$f = \begin{cases} \frac{4}{\pi} (1 - 4\eta^2), & 0 \leq \eta \leq 0,5, \\ 0, & \eta > 0,5, \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{(1-4\eta^2)}{30}, & 0 \leq \eta \leq 0,5, \\ 0, & \eta > 0,5; \end{cases}$$

вариант 2

$$f = \begin{cases} \frac{(1-\eta^2)}{\pi}, & 0 \leq \eta \leq 1, \\ 0, & \eta > 1, \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} 0,13(1 - \eta^2), & 0 \leq \eta \leq 1, \\ 0, & \eta > 1. \end{cases}$$

Заметим, что в обоих случаях выполняется условие нормировки (1.2). Изменение $f(0)$ по итерациям i представлено на рис. 3, где линии 1 и 2 соответствуют модели турбулентности [5], 3 и 4 — модели [6], линии 1 и 3 отвечают первому варианту, а 2 и 4 — второму. Видно, что установившиеся значения $f(0)$ не зависят от способа задания начальных данных. Аналогичный результат будет и для модели [4].

Представленные расчетные данные позволяют предположить, что рассмотренные модели турбулентности имеют единственное нетривиальное решение и по этой причине не в состоянии описать наблюдаемый в эксперименте эффект влияния формы тела на характеристики дальнего следа. Такая же ситуация и для других известных автору моделей турбулентности. Отмеченное несовершенство моделей турбулентности необходимо учитывать при выборе модели для расчета течения за конкретным телом. Для хорошо обтекаемого тела можно воспользоваться моделью [6], а для плохо обтекаемого тела — моделью [5]. Если характер обтекания тела предвидеть не удастся, то приближенные оценки могут быть получены при помощи модели [4].

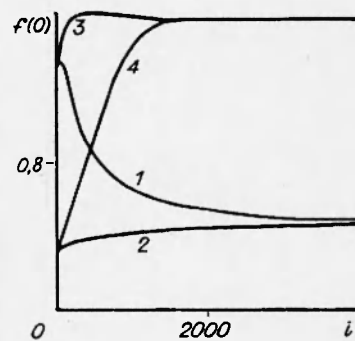


Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Федорова Н. Н., Черных Г. Г. О численном моделировании осесимметричных турбулентных следов // Моделирование в механике: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. механики. 1992. Т. 6, № 3. С. 141–159.
2. Nee V. W., Kovasznay L. S. G. Simple phenomenological theory of turbulent shear flows // Phys. Fluids. 1969. V. 12, N 3. P. 473–484.
3. Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н. Турбулентные течения при воздействии объемных сил и неавтономности. М.: Машиностроение, 1975.

4. **Baldwin B. S., Barth T. J.** A one-equation turbulence transport model for high Reynolds number wall-bounded flows. N. Y., 1991. (Pap./AIAA; N 610).
5. **Spalart P. R., Allmaras S. R.** A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. N. Y., 1992. (Pap./AIAA; N 439).
6. **Гуляев А. Н., Козлов В. Е., Секундов А. Н.** К созданию универсальной однопараметрической модели для турбулентной вязкости // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 69–81.
7. **Birch S. F.** One equation models revisited. N. Y., 1993. (Pap./AIAA; N 2903).
8. **Абрамович Г. Н.** Теория турбулентных струй. М.: Наука, 1984.
9. **Букреев В. И., Васильев О. Ф., Лыткин Ю. М.** О влиянии формы тела на характеристики автомодельного осесимметричного следа // Докл. АН СССР. 1972. Т. 207, № 4. С. 804–807.
10. **Самарский А. А.** Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.

*Поступила в редакцию 18/IV 1994 г.,
в окончательном варианте — 19/IX 1994 г.*
