

УДК 519.688

Вычислительная модель фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах*

М.И. Иванов, И.А. Кремер, Ю.М. Лаевский

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук,
просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mails: ivanov@sscc.ru (Иванов М.И.), kremer@sscc.ru (Кремер И.А.), laev@labchem.sccc.ru (Лаевский Ю.М.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 14, 2021.

Иванов М.И., Кремер И.А., Лаевский Ю.М. Вычислительная модель фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 2. — С. 145–166.

В статье рассматривается вычислительная 3D-модель двойной пористости фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости в трещиновато-пористой среде. Законы сохранения сформулированы в интегральной форме, и для их пространственной аппроксимации используется комбинация смешанного метода конечных элементов для определения суммарных скоростей потоков и давлений и метода конечных объемов для определения насыщенностей в поровых блоках и в трещинах. Аппроксимация уравнений для насыщенностей осуществляется по явной схеме с противопотоковой технологией для устранения нефизических осцилляций. Рассматриваемая модель включает нагнетательные и добывающие скважины, на которых заданы суммарные дебиты. Для суммарных скоростей и давлений формулируется задача Неймана, для которой указывается условие однозначной разрешимости и предлагается способ ее решения без дополнительных условий. Для явной противопотоковой схемы решения уравнений для насыщенностей установлен слабый принцип максимума, иллюстрируемый вычислительными экспериментами.

DOI: 10.15372/SJNM20210203

Ключевые слова: *фильтрация жидкости, трещиновато-пористая среда, двойная пористость, поровые блоки, трещины, законы сохранения, смешанный метод конечных элементов, противопотоковая схема, принцип максимума.*

Ivanov M.I., Kremer I.A., Laevsky Yu.M. A computational model of fluid filtration in fractured porous media // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 2. — P. 145–166.

The paper discusses a computational 3D double porosity model of a two-phase incompressible fluid filtration in a fractured-porous medium. Conservation laws are formulated in the integral form, and for their spatial approximation, a combination of the mixed finite element method to determine the total flow and pressure velocities is used and the finite volume method to determine the saturations in porous blocks and in fractures. The approximation of equations for saturations according to an explicit scheme with upwinding to eliminate unphysical oscillations is carried out. The model under consideration includes the injection and production wells with total flow rates. For the total velocities and pressures, the Neumann problem is formulated, for which the condition of unique solvability is indicated and a method for solving it without additional conditions is proposed. For an explicit upwind scheme for solving equations for saturations, a weak maximum principle is established, illustrated by computational experiments.

Keywords: *fluid filtration, fractured porous media, double porosity, porous blocks, fractures, conservation laws, mixed finite element method, upwind scheme, maximum principle.*

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-11-00048).

Введение

Данная работа посвящена некоторым алгоритмическим вопросам численного моделирования процесса фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости в трещиновато-пористых средах. Основные приложения для таких моделей связаны с технологиями нефтедобычи, основанными на процессах вытеснения нефти водой, и в дальнейшем двухфазную жидкость будем интерпретировать как систему “нефть–вода”. По разработке вычислительных методов моделирования нефтяных резервуаров имеется обширная литература (см., например, монографии [1–6]). Большое количество публикаций связано с описанием трещиновато-пористых резервуаров, включая вопросы течения жидкости в таких средах (см. монографию [7] и обзоры [8–12]). При этом, следуя терминологии [12], модели процессов в трещиновато-пористых средах делятся на два основных класса: одно-континуальные и многоконтинуальные модели. В первом случае используются стандартные уравнения фильтрации (однофазной или многофазной) с некоторым эффективным тензором проницаемости, отвечающим за наличие наряду с пористыми блоками трещиноватой структуры. Многоконтинуальные модели делятся, в свою очередь, на модели с явным представлением трещин (в случае наличия информации о геометрических характеристиках трещиноватости) и на модели с неявным представлением трещин. В последнем случае модель представляется в виде континуумов, между которыми происходит обмен жидкостью по некоторому заданному закону. Рассматриваемый ниже алгоритм ориентирован именно на этот случай, который в литературе обычно называют моделью двойной пористости.

Модели двойной пористости берут начало с классических работ [13] и [14], в которых рассматривался случай однофазной жидкости. Перенос этих результатов на многофазные жидкости был осуществлен в статьях [15–17]. При этом основное внимание уделялось выбору функции обмена жидкостью между трещинами и поровыми блоками, определявшейся разницей соответствующих давлений. В настоящее время появился ряд работ, в которых с целью более точного учета характеристик трещиновато-пористой среды, таких, например, как анизотропия пласта, для определения функции обмена наряду с давлениями привлекаются скорости потоков [18–20].

Вопросы численного решения задач фильтрации в рамках модели двойной пористости подробно обсуждались в работе [17]. Отметим недавнюю работу [21], в которой вычисление скоростей и давлений осуществлялось смешанным методом конечных элементов [22] с элементами Равьяра–Тома [23], а уравнения для насыщенных аппроксимировались методом конечных элементов по пространству и неявной схемой Эйлера по времени. При этом с целью устранения численных осцилляций использовалась противопотоковая регуляризация введением искусственной диффузии. Отметим, что устранение нефизичных осцилляций на фронте водонефтяного контакта является одной из основных трудностей, возникающих при конструировании вычислительных алгоритмов решения задач о вытеснении нефти водой. Различные подходы по решению этой проблемы обсуждались нами в работе [24]. Среди множества методов, посвященных этому вопросу, выделим класс алгоритмов наиболее эффективно, на наш взгляд, решающий задачу об устранении осцилляций. Речь идет о методах конечных объемов с привязкой скалярных функций к сеточным ячейкам и с противопотоковой аппроксимацией конвективных слагаемых [25–28].

В данной работе отмеченный выше подход применяется к численному решению задачи фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости в трещиновато-пористой среде в рамках модели Баклея–Левретта [29]. Для этой модели отсутствует естественная регуляризация, обусловленная капиллярной диффузией, и вопрос о противодействии возникновению численных осцилляций становится более актуальным по сравнению с моделями,

учитывающими капиллярные силы. Рассматривается многомерная двухконтинуальная математическая модель в терминах “скорости–давления–насыщенности”, численная реализация которой осуществляется смешанным методом конечных элементов [22, 23] для нахождения скоростей и давлений и методом конечных объемов с противотоковой аппроксимацией фазовых скоростей в комбинации с явной схемой Эйлера по времени для нахождения насыщенностей. Фактически реализуется вариант IMPES-метода [30]. Отметим, что для модели Баклея–Левретта характерно наличие разрывных решений. В связи с этим исходная задача будет сформулирована не в виде традиционной системы дифференциальных уравнений, а в виде системы интегральных тождеств. Кроме того, рассматриваемая нами трехмерная модель предусматривает наличие нагнетательных и добывающих скважин с заданными на них дебитами, а на внешней границе пласта ставится условие непротекания жидкости. Моделирование скважин осуществляется в соответствии с работой [31]. Разрешимость задачи в такой постановке обеспечивается условием баланса массы, но при этом для давлений возникает вырожденная задача Неймана, решение которой осуществляется в рамках смешанной формулировки. Трудности, связанные с необходимостью решения задачи в подпространстве, преодолеваются описанной в статье [31] для одноконтинуальной модели модификацией функции Лагранжа, позволяющей искать стационарные точки во всем пространстве.

Статья организована следующим образом. В пункте 1 приводятся уравнения фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости в виде законов сохранения массы и импульса в интегральной форме для двухконтинуальной модели Баклея–Левретта. В п. 2 на основе смешанного метода конечных элементов приводится алгоритм вычисления суммарных скоростей потоков жидкости и давлений при заданных насыщенностях в поровых блоках и в трещинах. Дается описание упомянутого выше способа решения вырожденной задачи Неймана в смешанной постановке. В п. 3 в рамках метода конечных объемов конструируется противотоковый алгоритм вычисления водонасыщенностей в поровых блоках и в трещинах в переменных, привязанных к сеточным ячейкам. Описанию явной схемы Эйлера вычисления насыщенностей и исследованию монотонности этой схемы посвящен п. 4. В п. 5 приводятся результаты вычислительных экспериментов, основное внимание в которых уделяется демонстрации отсутствия осцилляций на фронте разрыва функций водонасыщенности.

1. Интегральная форма модели двойной пористости

Пусть $\Omega \subset R^3$ — область течения двухфазной несжимаемой жидкости с внешней границей Γ (учет скважин будет описан ниже). Закон сохранения массы каждой фазы в поровых блоках и трещинах с учетом перетока жидкости между ними может быть записан в следующей интегральной форме: для любого открытого множества $\tau \subset \Omega$

$$\frac{d}{dt} \langle \phi^{(\beta)} S_{\alpha}^{(\beta)} \rangle_{\tau} + \frac{1}{|\tau|} \int_{\partial\tau} \mathbf{v}_{\alpha}^{(\beta)} \cdot \mathbf{n}_{\tau} d\gamma = \langle r_{\alpha}^{(\beta)} \rangle_{\tau}, \quad \alpha = w, o, \quad \beta = b, f, \quad (1)$$

где нижние индексы w и o соответствуют фазам воды и нефти, верхние индексы b и f соответствуют поровым блокам и трещинам, $\phi^{(\beta)}$ — пористости поровых блоков и трещин, $S_{\alpha}^{(\beta)}$ и $\mathbf{v}_{\alpha}^{(\beta)}$ — насыщенности и скорости фаз, \mathbf{n}_{τ} — единичный вектор внешней нормали на границе $\partial\tau$, $|\tau|$ — объем множества τ , $r_{\alpha}^{(\beta)}$ — функция массообмена между поровыми блоками и трещинами, $\langle \cdot \rangle_{\tau}$ — осреднение функции по множеству τ . Модификация уравнений (1), учитывающая источники массы от нагнетательных и добывающих

скважин будет приведена ниже. Отметим, что в отличие от формулировки закона сохранения массы в виде дифференциальных уравнений равенства (1) имеют место и для модели Баклея–Левретта, в которой насыщенности являются, как правило, разрывными функциями. Предполагается, все поровое пространство в поровых блоках и в трещинах заполнено жидкостью

$$S_w^{(\beta)} + S_o^{(\beta)} = 1, \quad \beta = b, f. \quad (2)$$

Баланс масс для каждой фазы в терминах функции массообмена записывается следующим образом [15]:

$$r_\alpha^{(b)} + r_\alpha^{(f)} = 0, \quad \alpha = w, o. \quad (3)$$

В предположении независимости пористости $\phi^{(\beta)}$ от времени из равенств (1), (2) немедленно следует, что

$$\int_{\partial\tau} \mathbf{v}^{(\beta)} \cdot \mathbf{n}_\tau d\gamma = |\tau| \left\langle r^{(\beta)} \right\rangle_\tau, \quad \beta = b, f, \quad (4)$$

где $\mathbf{v}^{(\beta)} = \mathbf{v}_w^{(\beta)} + \mathbf{v}_o^{(\beta)}$ и $r^{(\beta)} = r_w^{(\beta)} + r_o^{(\beta)}$ — суммарные скорости и суммарные функции массообмена в поровых блоках и трещинах. В дальнейшем, в соответствии с (3), будем обозначать $r_\alpha^{(b)} = r_\alpha$, $r_\alpha^{(f)} = -r_\alpha$ и, соответственно, $r^{(b)} = r$, $r^{(f)} = -r$, где $r = r_w + r_o$. Для гладких решений равенства (4) могут быть переписаны в виде $\nabla \cdot \mathbf{v}^{(b)} = r$ и $\nabla \cdot \mathbf{v}^{(f)} = -r$.

Перейдем к рассмотрению закона Дарси. Прежде чем его выписать в интегральной форме, приведем краевые условия и рассмотрим вопрос о включении в модель нагнетательных (*injection*) и добывающих (*production*) скважин. На внешней границе Γ для воды и нефти зададим условия непротекания потоков фаз:

$$\mathbf{v}_\alpha^{(\beta)} \cdot \mathbf{n} |_\Gamma = 0, \quad \alpha = w, o, \quad \beta = b, f, \quad (5)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней относительно Ω нормали, определенной почти всюду на Γ . Из (5) немедленно следует условие непротекания для суммарных потоков

$$\mathbf{v}^{(\beta)} \cdot \mathbf{n} |_\Gamma = 0, \quad \beta = b, f. \quad (6)$$

Далее, следуя работе [31], введем скважины в виде системы открытых множеств $\Omega_{d,m}$, $m = 1, \dots, M_d$, где индексы $d = \text{in}$ и $d = \text{pr}$ соответствуют нагнетательным и добывающим скважинам. Здесь под скважинами понимается только перфорированные фрагменты реальных скважин, которые, собственно, и являются источниками/стоками жидкости. В дальнейшем будем предполагать $M_d > 0$, $d = \text{in}, \text{pr}$, т. е. при наличии нагнетательных скважин имеется хотя бы одна добывающая скважина. Случай $M_{\text{in}} = M_{\text{pr}} = 0$ при условии (5) (отсутствие источников/стоков) интереса не представляет. При этом будем полагать

$$\Omega_d = \bigcup_{m=1}^{M_d} \Omega_{d,m}, \quad d = \text{in}, \text{pr}, \quad \Omega_{d,m} \cap \Omega_{d,l} = \emptyset, \quad m \neq l, \quad \bar{\Omega}_{\text{in}} \cap \bar{\Omega}_{\text{pr}} = \emptyset. \quad (7)$$

Пусть

$$G = \bar{\Omega} \cup \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{pr}}, \quad \Gamma_{d,m} = \partial\Omega_{d,m}, \quad d = \text{in}, \text{pr}.$$

На скважинах зададим краевые условия вида

$$p^{(\beta)}|_{\Gamma_{d,m}} = c_{d,m}^{(\beta)}, \quad \int_{\Gamma_{d,m}} \mathbf{v}^{(\beta)} \cdot \mathbf{n}_{d,m} d\gamma = -Q_{d,m}^{(\beta)}, \quad (8)$$

$$m = 1, \dots, M_d, \quad d = \text{in, pr}, \quad \beta = \text{b, f},$$

где $\mathbf{n}_{d,m}$ — единичный вектор внутренней относительно $\Omega_{d,m}$ (внешней по отношению к области Ω) нормали на $\Gamma_{d,m}$; $c_{d,m}^{(\beta)}$ — некоторые неизвестные константы; $Q_{\text{in},m}^{(\beta)} \geq 0$, $Q_{\text{pr},m}^{(\beta)} \leq 0$ — объемные дебиты нагнетательных и добывающих скважин отдельно для поровых блоков и трещин. Собственно дебиты скважин задаются равенствами $Q_{d,m} = Q_{d,m}^{(\text{b})} + Q_{d,m}^{(\text{f})}$, и способ их разделения для поровых блоков и трещин будет указан при описании численных экспериментов. При этом векторы скорости направлены наружу из нагнетательных скважин и внутрь добывающих скважин.

Приведем ряд обозначений, необходимых для формулировки закона Дарси. Через $p^{(\beta)}$, $\beta = \text{b, f}$, будем обозначать давления в поровых блоках и трещинах, являющиеся наряду с $S_{\alpha}^{(\beta)}$ и $\mathbf{v}^{(\beta)}$ искомыми функциями рассматриваемой задачи. Отметим, что для модели Баклея–Лeverетта фазовые давления совпадают: $p_w^{(\beta)} = p_o^{(\beta)} = p^{(\beta)}$. Далее, пусть $\lambda_{\alpha}(S_{\alpha}^{(\beta)}) = k_{r,\alpha}(S_{\alpha}^{(\beta)})/\mu_{\alpha}$ — подвижности фаз, где $k_{r,\alpha}$ — относительные фазовые проницаемости, μ_{α} — динамические вязкости фаз. Обозначим $S^{(\beta)} = S_w^{(\beta)}$, и, согласно равенству (2), $S_o^{(\beta)} = 1 - S^{(\beta)}$. Далее введем суммарные подвижности в поровых блоках и в трещинах: $\lambda(S^{(\beta)}) = \lambda_w(S^{(\beta)}) + \lambda_o(1 - S^{(\beta)})$. И наконец, пусть $K^{(\beta)}(S^{(\beta)}) = K_0^{(\beta)}\lambda(S^{(\beta)})$, где $K_0^{(\beta)}$ — тензоры абсолютной проницаемости пласта. При этом, как известно, $\lambda(S^{(\beta)}) \geq \lambda_0 > 0$, и, следовательно, существует тензор $[K^{(\beta)}(S^{(\beta)})]^{-1}$.

Продолжим искомые скалярные функции (насыщенности и давления) внутрь скважин константами, и тем самым будем рассматривать эти функции как элементы замкнутого подпространства $W \subset L_2(G)$. Суммарные скорости также продолжим на все множество G , полагая $\nabla \cdot \mathbf{v}^{(\beta)} \in W$. Теперь мы можем выписать закон Дарси для суммарных скоростей в поровых блоках и в трещинах в интегральной форме. При этом в данной работе мы пренебрегаем влиянием гравитационных сил (достаточно тонкий пласт), поскольку учет гравитации требует специальной модификации алгоритма вычисления насыщенностей, являющейся предметом другой статьи. Для произвольной вектор-функции \mathbf{u} такой, что $\nabla \cdot \mathbf{u} \in W$ и $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$, рассмотрим интегральное тождество

$$\int_{\Omega} [K^{(\beta)}(S^{(\beta)})]^{-1} \mathbf{v}^{(\beta)} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} = \int_G p^{(\beta)} \nabla \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x}, \quad \beta = \text{b, f}. \quad (9)$$

Для гладких решений из формулы Грина следует равенство

$$\int_G p^{(\beta)} \nabla \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} p^{(\beta)} \nabla \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} - \sum_{d=\text{in,pr}} \sum_{m=1}^{M_d} \int_{\Gamma_{d,m}} p^{(\beta)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{d,m} d\gamma = - \int_{\Omega} \nabla p^{(\beta)} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x}.$$

В силу произвольности вектор-функции \mathbf{u} из этого равенства и уравнения (9) немедленно следует стандартное представление закона Дарси:

$$\mathbf{v}^{(\beta)} = -K^{(\beta)}(S^{(\beta)}) \nabla p^{(\beta)}, \quad \beta = \text{b, f}. \quad (10)$$

При этом для фазовых скоростей закон Дарси записывается в виде

$$\mathbf{v}_\alpha^{(\beta)} = -K_\alpha^{(\beta)}(S_\alpha^{(\beta)})\nabla p^{(\beta)}, \quad \alpha = \text{w, o}, \quad \beta = \text{b, f},$$

где $K_\alpha^{(\beta)}(S_\alpha^{(\beta)}) = K_0^{(\beta)}\lambda_\alpha(S_\alpha^{(\beta)})$, и, как нетрудно видеть, согласно (10), имеют место равенства

$$\mathbf{v}_\alpha^{(\beta)} = \sigma_\alpha(S^{(\beta)})\mathbf{v}^{(\beta)}, \quad \alpha = \text{w, o}, \quad \beta = \text{b, f}, \quad (11)$$

где $\sigma_\alpha(S^{(\beta)}) = \lambda_\alpha(S_\alpha^{(\beta)})/\lambda(S^{(\beta)})$. Таким образом, для разрывных решений под исходной формулировкой закона Дарси будем понимать уравнение (9). При этом фазовые скорости задаются формулами (11). В случае гладких решений равенства (9) и (11) переходят в классическую форму закона Дарси для каждой фазы.

Модифицируем равенства (4) с учетом скважин. Пусть $\tau_{d,m}$ — некоторая подобласть области G — содержит ровно одну нагнетательную скважину $\Omega_{d,m}$. Существование такой подобласти для любой скважины следует из условий (7). Пусть $\omega_{d,m} = \tau_{d,m} \setminus \Omega_{d,m}$. При этом $\omega_{d,m} \subset \Omega$. Тогда

$$\int_{\partial\omega_{d,m}} \mathbf{v}^{(\beta)} \cdot \mathbf{n}_{d,m} d\gamma = \int_{\partial\tau_{d,m}} \mathbf{v}^{(\beta)} \cdot \mathbf{n}_{d,m} d\gamma + \int_{\Gamma_{d,m}} \mathbf{v}^{(\beta)} \cdot \mathbf{n}_{d,m} d\gamma, \quad \beta = \text{b, f}, \quad (12)$$

и, в соответствии с краевыми условиями (8), равенство (4) принимает вид

$$\int_{\partial\tau_{d,m}} \mathbf{v}^{(\beta)} \cdot \mathbf{n}_{d,m} d\gamma = \int_{\omega_{d,m}} r^{(\beta)} d\mathbf{x} + Q_{d,m}^{(\beta)}. \quad (13)$$

Здесь векторы нормали $\mathbf{n}_{d,m}$ являются внешними по отношению к множеству $\omega_{d,m}$, т. е. внешними по отношению к $\tau_{d,m}$ и внутренними по отношению к $\Omega_{d,m}$, что соответствует условиям (8). Таким образом, для любой подобласти $\tau \subset G$ имеют место равенства (4), когда τ не содержит скважин, и (13), когда $\tau = \tau_{d,m}$ содержит одну скважину. Для всей области G имеем

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v}^{(\beta)} \cdot \mathbf{n} d\gamma + \sum_{d=\text{in,pr}} \sum_{m=1}^{M_d} \int_{\Gamma_{d,m}} \mathbf{v}^{(\beta)} \cdot \mathbf{n}_{d,m} d\gamma = \int_{\Omega} r^{(\beta)} d\mathbf{x}, \quad \beta = \text{b, f}.$$

Тогда, согласно краевым условиям (6), (8), имеет место следующее необходимое условие разрешимости задачи (4), (6), (8), (9), (11) при заданных насыщениях:

$$\sum_{m=1}^{M_{\text{in}}} Q_{\text{in},m}^{(\beta)} + \sum_{m=1}^{M_{\text{pr}}} Q_{\text{pr},m}^{(\beta)} = \int_{\Omega} r^{(\beta)} d\mathbf{x}, \quad \beta = \text{b, f}. \quad (14)$$

Отличие от нуля правой части в (14) является особенностью модели двойной пористости: источник воды может быть привязан только к поровым блокам, а в добывающие скважины нефть может поступать только из трещин. Тем не менее, из (3) и (14) следует общее условие баланса

$$\sum_{m=1}^{M_{\text{in}}} Q_{\text{in},m} + \sum_{m=1}^{M_{\text{pr}}} Q_{\text{pr},m} = 0. \quad (15)$$

Собственно, требованием к исходным данным задачи является равенство (15), а (14) означает, что в случае независимости от времени дебитов скважин $Q_{d,m}^{(\beta)}$ интеграл от функции массообмена в правой части равенства (14) также не зависит от времени и равен заданной величине. Вопрос о дополнении уравнений (1) уравнениями в скважинах будет рассмотрен ниже в п. 3 при обсуждении численного метода нахождения насыщенных.

Остановимся на вопросе о выборе функций массообмена $r_{\alpha}^{(\beta)}$. Следуя работе [19], рассмотрим суммарную гибридную функцию массообмена вида

$$r = k^{(\text{b},\text{f})} \eta^{(\text{b},\text{f})} (p^{(\text{f})} - p^{(\text{b})}), \quad (16)$$

где $k^{(\text{b},\text{f})}$ — безразмерный параметр, характеризующий проницаемость между поровыми блоками и трещинами. Согласно [13] и [15], $k^{(\text{b},\text{f})} \sim k_0/\nu^2$, где k_0 — некоторое среднее значение абсолютной проницаемости поровых блоков, ν — отношение некоторого характерного объема к суммарной поверхности трещин, в нем содержащихся. Следуя [21], положим

$$\eta^{(\text{b},\text{f})} = \frac{1}{2} (\lambda(S^{(\text{b})}) + \lambda(S^{(\text{f})})).$$

Функции массообмена, входящие в уравнения для фазовых насыщенных, зададим равенством

$$r_{\alpha} = \begin{cases} \sigma_{\alpha}(S^{(\text{b})}) r, & p^{(\text{f})} \leq p^{(\text{b})}, \\ \sigma_{\alpha}(S^{(\text{f})}) r, & p^{(\text{f})} > p^{(\text{b})}, \end{cases} \quad \alpha = \text{w, o}. \quad (17)$$

В заключение данного пункта отметим, что оператор краевой задачи для суммарных скоростей и давлений (4), (6), (9), (13) имеет одномерное ядро — давления определяются с точностью до константы, общей для обоих давлений. Действительно, пусть $p^{(\text{b})}$, $p^{(\text{f})}$ — решение задачи. Из закона Дарси (9) следует, что решениями также являются функции $\hat{p}^{(\text{b})} = p^{(\text{b})} + c^{(\text{b})}$ и $\hat{p}^{(\text{f})} = p^{(\text{f})} + c^{(\text{f})}$, где $c^{(\text{b})}$ и $c^{(\text{f})}$ — произвольные числа. Подстановка этих функций в уравнение (4) с учетом вида функции массообмена (16) приводит к равенству

$$\int_{\tau} \eta^{\text{b},\text{f}} (c^{(\text{b})} - c^{(\text{f})}) d\mathbf{x} = 0,$$

откуда немедленно следует, что $c^{(\text{b})} = c^{(\text{f})} = c$. Таким образом, разность давлений в поровых блоках и в трещинах определяется однозначно. Тогда имеют место очевидные представления

$$\hat{p}^{(\text{b})} = (q + c) + \frac{1}{2}(p^{(\text{b})} - p^{(\text{f})}), \quad \hat{p}^{(\text{f})} = (q + c) - \frac{1}{2}(p^{(\text{b})} - p^{(\text{f})}),$$

где $q = (p^{(\text{b})} + p^{(\text{f})})/2$, т. е. с точностью до константы определяется только сумма давлений. Для устранения указанной неоднозначности потребуем выполнение условия ортогональности суммы давлений константе

$$p^{(\text{b})} + p^{(\text{f})} \in W^{\perp}, \quad W^{\perp} = \left\{ q \in W, \int_G q d\mathbf{x} = 0 \right\}. \quad (18)$$

2. Вычисление суммарных скоростей и давлений

Для численного решения задачи (4), (9), (13) на каждом временном слое t_n используется смешанный метод конечных элементов [22] с элементами Равьяра–Тома наименьшей степени [23]. Для простоты в качестве области G рассмотрим параллелепипед, в котором введена кубическая сетка с шагом h : заданы натуральные числа M_x, M_y, M_z , и пусть $G = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$, где $L_x = M_x h, L_y = M_y h, L_z = M_z h$. Далее, пусть \mathcal{T} — множество всех ячеек сетки:

$$\tau = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k], \quad i = 1, \dots, M_x, \quad j = 1, \dots, M_y, \quad k = 1, \dots, M_z.$$

Для аппроксимации давлений $p^{(\beta)}$ сконструируем пространство кусочно-постоянных функций $W_h \subset W$. Введем множества ячеек, объединения которых содержат нагнетательные и добывающие скважины:

$$\mathcal{T}_{d,m} = \{ \tau \in \mathcal{T} \mid \tau \cap \Omega_{d,m} \neq \emptyset \}, \quad m = 1, \dots, M_d, \quad d = \text{in, pr}.$$

Далее, обозначим

$$\mathcal{T}_d = \bigcup_{m=1}^{M_d} \mathcal{T}_{d,m}, \quad d = \text{in, pr}, \quad \mathcal{T}_0 = \mathcal{T} \setminus (\mathcal{T}_{\text{in}} \cup \mathcal{T}_{\text{pr}}).$$

При этом $\Omega_{d,m} \subset \tau_{d,m}, \Omega_d \subset \tau_d$, множество \mathcal{T}_0 состоит из ячеек $\tau \subset \Omega$, не содержащих скважин. Пространство W_h определим следующим образом:

$$W_h = \left\{ q = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_0} q_\tau \chi(\tau) + \sum_{m=1}^{M_{\text{in}}} q_{\text{in},m} \chi(\tau_{\text{in},m}) + \sum_{m=1}^{M_{\text{pr}}} q_{\text{pr},m} \chi(\tau_{\text{pr},m}) \right\}, \quad (19)$$

где $\chi(\tau)$ и $\chi(\tau_{d,m})$ — характеристические функции множеств τ и $\tau_{d,m}$ соответственно. Далее рассмотрим сеточный аналог пространства W^\perp , введенного в условии (18):

$$W_h^\perp = \left\{ q \in W_h \mid \sum_{\tau \in \mathcal{T}_0} |\tau| q_\tau + \sum_{m=1}^{M_{\text{in}}} |\tau_{\text{in},m}| q_{\text{in},m} + \sum_{m=1}^{M_{\text{pr}}} |\tau_{\text{pr},m}| q_{\text{pr},m} = 0 \right\}. \quad (20)$$

Как нетрудно заметить, $W_h \subset W$ и $W_h^\perp \subset W^\perp$.

Рассмотрим пространство сеточных вектор-функций $\mathbf{RT}_{[0]}$ с базисом Равьяра–Тома наименьшей степени, в котором компоненты произвольного вектора $\mathbf{u} \in \mathbf{RT}_{[0]}$ имеют вид

$$\begin{aligned} u_x(\mathbf{x}) &= \sum_{i=0}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_y} \sum_{k=1}^{M_z} u_{i,j-1/2,k-1/2} \varphi_i(x) \chi_{j-1/2}(y) \chi_{k-1/2}(z), \\ u_y(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=0}^{M_y} \sum_{k=1}^{M_z} u_{i-1/2,j,k-1/2} \chi_{i-1/2}(x) \varphi_j(y) \chi_{k-1/2}(z), \\ u_z(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_y} \sum_{k=0}^{M_z} u_{i-1/2,j-1/2,k} \chi_{i-1/2}(x) \chi_{j-1/2}(y) \varphi_k(z), \end{aligned}$$

где $\chi_{l-1/2}(\xi)$ — характеристические функции множеств $[\xi_{l-1}, \xi_l]$, $\varphi_l(\xi)$ — кусочно-линейные функции-крышки с носителями (ξ_{l-1}, ξ_{l+1}) , $l = 1, \dots, N_\xi - 1$. Носителями функций $\varphi_0(\xi)$ и $\varphi_{N_\xi}(\xi)$ являются интервалы $(0, h)$ и $(L_\xi - h, L_\xi)$.

Сеточные вектор-функции $\mathbf{v}^{(\beta)}$ ищутся как элементы пространства

$$\mathbf{V}_h = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{RT}_{[0]} \mid \nabla \cdot \mathbf{u} \in W_h \}.$$

Здесь и далее для сеточных функций сохраним обозначения из в п. 1. Сеточная функция $p^{(\beta)}$ ищется как элемент пространства W_h и, согласно (19), (20),

$$p^{(\beta)} = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_0} p_\tau^{(\beta)} \chi(\tau) + \sum_{m=1}^{M_{\text{in}}} p_{\text{in},m}^{(\beta)} \chi(\tau_{\text{in},m}) + \sum_{m=1}^{M_{\text{pr}}} p_{\text{pr},m}^{(\beta)} \chi(\tau_{\text{pr},m}),$$

причем, в соответствии с (18), имеем

$$\sum_{\tau \in \mathcal{T}_0} |\tau| (p_\tau^{(\text{b})} + p_\tau^{(\text{f})}) + \sum_{d=\text{in,pr}} \sum_{m=1}^{M_d} |\tau_{d,m}| (p_{d,m}^{(\text{b})} + p_{d,m}^{(\text{f})}) = 0, \quad (21)$$

т. е. $p^{(\text{b})} + p^{(\text{f})} \in W_h^\perp$. Тогда сеточным аналогом (9) является уравнение

$$\int_{\Omega} \left[K^{(\beta)}(S^{(\beta)}) \right]^{-1} \mathbf{v}^{(\beta)} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_0} |\tau| p_\tau^{(\beta)} (\nabla \cdot \mathbf{u})_\tau + \sum_{d=\text{in,pr}} \sum_{m=1}^{M_d} |\tau_{d,m}| p_{d,m}^{(\beta)} (\nabla \cdot \mathbf{u})_{d,m}, \quad (22)$$

имеющее место для произвольной вектор-функции $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_h$, и где $\mathbf{v}^{(\beta)} \in \mathbf{V}_h$, $p^{(\beta)} \in W_h$, $S^{(\beta)} \in W_h$ (в фиксированный момент времени), причем $p^{(\text{b})} + p^{(\text{f})} \in W_h^\perp$.

Далее, пусть $r^{(\beta)}$ — аппроксимация функции массообмена, заданной равенством (16):

$$r_\tau^{(\text{b})} = r_\tau, \quad r_\tau^{(\text{f})} = -r_\tau$$

и

$$r_\tau = k^{(\text{b,f})} \eta_\tau^{(\text{b,f})} (p_\tau^{(\text{f})} - p_\tau^{(\text{b})}), \quad (23)$$

где $\eta_\tau^{(\text{b,f})} = (\lambda(S_\tau^{(\text{b})}) + \lambda(S_\tau^{(\text{f})}))/2$, $S_\tau^{(\beta)}$ — значение сеточной функции $S^{(\beta)}$ в ячейке τ . Тогда аппроксимация уравнений (4), (13) может быть записана в виде следующих равенств:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}^{(\beta)})_\tau = r_\tau^{(\beta)}, \quad \tau \in \mathcal{T}_0, \quad (24)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}^{(\beta)})_{d,m} = \frac{1}{|\tau_{d,m}|} \left(\int_{\omega_{d,m}} r^{(\beta)} \, d\mathbf{x} + Q_{d,m}^{(\beta)} \right), \quad m = 1, \dots, M_d, \quad d = \text{in, pr}, \quad (25)$$

где $\omega_{d,m} = \tau_{d,m} \setminus \Omega_{d,m}$. Напомним, что $\nabla \cdot \mathbf{v}^{(\beta)} \in W_h$.

Приведем векторно-матричную запись задачи (22), (24), (25). Пусть M_0 — количество ячеек в \mathcal{T}_0 . Введем евклидово пространство \mathcal{E}_M размерности $M = M_0 + M_{\text{in}} + M_{\text{pr}}$ со скалярным произведением $[\cdot, \cdot]$ и нормой $\|\cdot\|$. Отметим, что $M < M_x M_y M_z$, поскольку каждая скважина содержится в нескольких ячейках множества \mathcal{T} . При этом $M = \dim W_h$. Элементами пространства \mathcal{E}_M являются векторы-столбцы \bar{q} с компонентами $(q)_\tau$ и $(q)_{d,m}$. Следуя работе [24], установим следующее соответствие между элементами вектора-столбца $\bar{q} \in \mathcal{E}_M$ и значениями сеточной функцией $q_h \in W_h$:

$$(q)_\tau = \sqrt{|\tau|} q_\tau, \quad \tau \in \mathcal{T}_0, \quad (q)_{d,m} = \sqrt{|\tau_{d,m}|} q_{d,m}, \quad m = 1, \dots, M_d, \quad d = \text{in, pr}. \quad (26)$$

При этом уравнения (22), (24), (25) принимают следующую векторно-матричную форму:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}^{(b)} & \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}^t & -P & 0 & P \\ \mathbf{0} & 0^t & \mathbf{D}^{(f)} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0}^t & P & \mathbf{B}^t & -P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{v}}^{(b)} \\ \bar{p}^{(b)} \\ \bar{\mathbf{v}}^{(f)} \\ \bar{p}^{(f)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{Q}^{(b)} \\ \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{Q}^{(f)} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Здесь квадратная симметрическая положительно определенная матрица P соответствует сеточной функции массообмена r_h , заданной равенством (23) с учетом формул (26).

Введем вектор-столбец $\bar{e} \in \mathcal{E}_M$ с компонентами

$$(e)_\tau = \sqrt{|\tau|}, \quad \tau \in \mathcal{T}_0, \quad (e)_{d,m} = \sqrt{|\tau_{d,m}|}, \quad m = 1, \dots, M_d, \quad d = \text{in}, \text{pr}.$$

Как нетрудно заметить, $\mathbf{B}\bar{e} = \bar{\mathbf{0}}$, и матрица системы (27) является вырожденной с одномерным ядром вида $c(\bar{\mathbf{0}} \ \bar{e} \ \bar{\mathbf{0}} \ \bar{e})^t$, где c — произвольная константа. Тогда условие ортогональности (21) $(p^{(b)} + p^{(f)} \in W_h^\perp)$ принимает вид

$$[\bar{p}^{(b)} + \bar{p}^{(f)}, \bar{e}] = 0. \quad (28)$$

Пусть

$$\mathcal{E}_M^\perp = \{\bar{q} \in \mathcal{E}_M \mid [\bar{q}, \bar{e}] = 0\}.$$

В подпространстве \mathcal{E}_M^\perp симметрическая матрица системы (27) является положительно определенной. Аналогично работе [24], проведем регуляризацию системы (27), в результате которой получим ее однозначную разрешимость. Определим одноранговую матрицу $C = \bar{e} \cdot \bar{e}^t$. Как нетрудно видеть, для произвольного вектора-столбца $\bar{q} \in \mathcal{E}_M$ справедливо равенство $C\bar{q} = [\bar{q}, \bar{e}]\bar{e}$, из которого, в частности, следует положительная полуопределенность в \mathcal{E}_M матрицы C : $[C\bar{q}, \bar{q}] = [\bar{q}, \bar{e}]^2 \geq 0$. Рассмотрим систему:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}^{(b)} & \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}^t & -P - \varepsilon C & 0 & P - \varepsilon C \\ \mathbf{0} & 0^t & \mathbf{D}^{(f)} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0}^t & P - \varepsilon C & \mathbf{B}^t & -P - \varepsilon C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{v}}^{(b)} \\ \bar{p}^{(b)} \\ \bar{\mathbf{v}}^{(f)} \\ \bar{p}^{(f)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{Q}^{(b)} \\ \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{Q}^{(f)} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

где $\varepsilon > 0$ — некоторый положительный параметр. Покажем, что система (29) однозначно разрешима, и ее решение является решением задачи (27), (28). Для этой цели исключим из (29) скорости $\bar{\mathbf{v}}^{(\beta)}$. В результате получим систему уравнений для определения вектора-столбца $\bar{p} \in \mathcal{E}_M \times \mathcal{E}_M$:

$$SH\bar{p} = -\bar{Q},$$

где $SH = SH_0 + SH_P + \varepsilon SH_C$,

$$SH_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^t(\mathbf{D}^{(b)})^{-1}\mathbf{B} & 0 \\ 0^t & \mathbf{B}^t(\mathbf{D}^{(f)})^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad SH_P = \begin{pmatrix} P & -P \\ -P & P \end{pmatrix}, \quad SH_C = \begin{pmatrix} C & C \\ C & C \end{pmatrix},$$

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} \bar{p}^{(b)} \\ \bar{p}^{(f)} \end{pmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{pmatrix} \bar{Q}^{(b)} \\ \bar{Q}^{(f)} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим произвольный вектор-столбец $\bar{q} \in \mathcal{E}_M \times \mathcal{E}_M$ с компонентами $\bar{q}^{(\beta)} \in \mathcal{E}_M$, $\beta = \text{b}, \text{f}$. Прямоугольная матрица \mathbf{B} обладает одномерным ядром $\text{Ker}\mathbf{B} = \{\xi\bar{e}, \xi \in R\}$, и, следовательно, векторы-столбцы $\bar{q}^{(\beta)}$ представимы в виде

$$\bar{q}^{(\beta)} = \bar{q}_0^{(\beta)} + \xi^{(\beta)} \bar{e}, \quad [\bar{q}_0^{(\beta)}, \bar{e}] = 0.$$

При этом имеет место сеточный аналог неравенства Пуанкаре (см., например, [22]), из которого следует неравенство

$$[[SH_0 \bar{q}, \bar{q}]] \geq c_0 [[\bar{q}_0, \bar{q}_0]], \quad (30)$$

где $\bar{q}_0 \in \mathcal{E}_M \times \mathcal{E}_M$ — вектор-столбец с компонентами $\bar{q}_0^{(b)}$ и $\bar{q}_0^{(f)}$. Здесь и далее $[[\cdot, \cdot]]$ — скалярное произведение в $\mathcal{E}_M \times \mathcal{E}_M$. Из положительной определенности матрицы P и ортогональности векторов $\bar{q}_0^{(b)} - \bar{q}_0^{(f)}$ и \bar{e} следует, что

$$[[SH_P \bar{q}, \bar{q}]] = [P(\bar{q}^{(b)} - \bar{q}^{(f)}), \bar{q}^{(b)} - \bar{q}^{(f)}] \geq c_P \|\bar{q}^{(b)} - \bar{q}^{(f)}\|^2 \geq c_P (\xi^{(b)} - \xi^{(f)})^2 \|\bar{e}\|^2. \quad (31)$$

Далее, как нетрудно видеть,

$$[[SH_C \bar{q}, \bar{q}]] = [C(\bar{q}^{(b)} + \bar{q}^{(f)}), \bar{q}^{(b)} + \bar{q}^{(f)}] = [\bar{q}^{(b)} + \bar{q}^{(f)}, \bar{e}]^2 = (\xi^{(b)} + \xi^{(f)})^2 \|\bar{e}\|^4.$$

Здесь использовалась ортогональность векторов $\bar{q}_0^{(b)} + \bar{q}_0^{(f)}$ и \bar{e} . Положим $c_1 = \min(c_P, \varepsilon \|\bar{e}\|^2)$. Последнее равенство и неравенство (31) приводят к неравенству

$$[[SH_P + \varepsilon SH_C \bar{q}, \bar{q}]] \geq 2c_1 [(\xi^{(b)})^2 + (\xi^{(f)})^2] \|\bar{e}\|^2. \quad (32)$$

Из неравенств (30), (32) немедленно следует положительная определенность матрицы SH :

$$[[SH \bar{q}, \bar{q}]] \geq c [[\bar{q}, \bar{q}]],$$

где $c = \min(c_0, 2c_1)$. Тем самым установлена однозначная разрешимость системы уравнений (29) в \mathcal{E}_M .

Решение системы (29) является решением системы (27) в подпространстве, определяемом условием (28). Умножим скалярно систему (29) на вектор-столбец $(\bar{0} \ \bar{e} \ \bar{0} \ \bar{e})^t$. После несложных вычислений получим

$$\varepsilon [C(\bar{p}^{(b)} + \bar{p}^{(f)}), \bar{e}] + [\bar{Q}^{(b)} + \bar{Q}^{(f)}, \bar{e}] = 0.$$

Но в векторно-матричных обозначениях условие (15) записывается как $[\bar{Q}^{(b)} + \bar{Q}^{(f)}, \bar{e}] = 0$, и, следовательно, $[C(\bar{p}^{(b)} + \bar{p}^{(f)}), \bar{e}] = [\bar{p}^{(b)} + \bar{p}^{(f)}, \bar{e}] [\bar{e}, \bar{e}] = 0$. Таким образом, решение системы (29) удовлетворяет условию (28). Кроме того, $C(\bar{p}^{(b)} + \bar{p}^{(f)}) = [\bar{p}^{(b)} + \bar{p}^{(f)}, \bar{e}] \bar{e} = \bar{0}$, откуда немедленно следует, что решение системы (29) является решением системы (27).

3. Противопотоковая схема

Построение вычислительного алгоритма для решения уравнений (1) при $\alpha = w$ осуществим на основе противопотоковых схем. Как уже отмечалось выше, пространственные аппроксимации функций водонасыщенности представляются кусочно-постоянными функциями $S^{(\beta)} \in W_h$. Напомним, что для сеточных функций мы сохранили обозначения из п. 1. При этом

$$S^{(\beta)} = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_0} S_{\tau}^{(\beta)} \chi(\tau) + \sum_{m=1}^{M_{in}} S_{in,m}^{(\beta)} \chi(\tau_{in,m}) + \sum_{m=1}^{M_{pr}} S_{pr,m}^{(\beta)} \chi(\tau_{pr,m}), \quad \beta = b, f.$$

Тогда

$$\langle \phi^{(\beta)} S^{(\beta)} \rangle_{\tau} = \phi_{\tau}^{(\beta)} S_{\tau}^{(\beta)}, \quad \tau \in \mathcal{T}_0.$$

Здесь для неоднородного пласта полагаем $\phi^{(\beta)} \in W_h$. Тогда полудискретный аналог уравнения (1) с учетом формул (11) принимает вид

$$\phi_{\tau}^{(\beta)} \frac{dS_{\tau}^{(\beta)}}{dt} + \frac{1}{|\tau|} \int_{\partial\tau} \mathbf{v}_w^{(\beta)} \cdot \mathbf{n}_{\tau} d\gamma = r_{w,\tau}^{(\beta)}, \quad \beta = b, f, \quad \tau \in \mathcal{T}_0. \quad (33)$$

Отметим, что $r_w^{(\beta)} \in W_h$ и $r_{w,\tau}^{(\beta)} = \langle r_w^{(\beta)} \rangle_{\tau}$. Напомним, что $r_{w,\tau}^{(b)} = -r_{w,\tau}^{(f)} = r_{w,\tau}$, где, в отличие от (17), используется сеточная функция, заданная равенством (23):

$$r_{w,\tau} = \begin{cases} \sigma_w(S_{\tau}^{(b)}) r_{\tau}, & p_{\tau}^{(f)} \leq p_{\tau}^{(b)}, \\ \sigma_w(S_{\tau}^{(f)}) r_{\tau}, & p_{\tau}^{(f)} > p_{\tau}^{(b)}. \end{cases} \quad (34)$$

Построение противопотоковой схемы сводится к противопотоковой аппроксимации второго слагаемого в левой части уравнения (33). Формула (34) фактически реализует противопотоковую аппроксимацию для потока флюида между поровыми блоками и трещинами: когда поток направлен из пор в трещины ($p^{(f)} \leq p^{(b)}$), в качестве коэффициента при r_{τ} в ячейке τ берется величина $\sigma_w(S_{\tau}^{(b)})$, а когда поток направлен из трещин в поровые блоки ($p^{(f)} > p^{(b)}$), используется величина $\sigma_w(S_{\tau}^{(f)})$, т. е. противопотоковая схема учета массообмена задается уже исходным определением функции массообмена (16), (17).

Пусть e — одна из граней ячейки τ . В дальнейшем будем предполагать, что e является внутренней гранью, т. е. не является частью внешней границы Γ , на которой, согласно (5), $\langle \mathbf{v}_w^{(\beta)} \rangle_e \cdot \mathbf{n}_{e,\tau} = 0$. Здесь и далее $\mathbf{n}_{e,\tau}$ — единичный вектор внешней по отношению к τ нормали на грани e . Для аппроксимации второго слагаемого в левой части уравнения (33) необходимо для каждой грани ячейки τ вычислить величины $\langle \mathbf{v}_w^{(\beta)} \rangle_e \cdot \mathbf{n}_{e,\tau}$, где $\langle \cdot \rangle_e$ — осреднение вектора по грани e . В дальнейшем через τ_e будем обозначать смежную с τ ячейку: $\tau_e \cap \tau = e$. Пусть

$$(\sigma_w^{(\beta)})_e^+ = \sigma_w(S_{\tau}^{(\beta)}), \quad (\sigma_w^{(\beta)})_e^- = \sigma_w(S_{\tau_e}^{(\beta)}), \quad \beta = b, f. \quad (35)$$

В соответствии с формулами (11), будем полагать:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_w^{(\beta)} \rangle_e \cdot \mathbf{n}_{e,\tau} &= (\sigma_w^{(\beta)})_e^+ \langle \mathbf{v}^{(\beta)} \rangle_e \cdot \mathbf{n}_{e,\tau}, & \langle \mathbf{v}^{(\beta)} \rangle_e \cdot \mathbf{n}_{e,\tau} &\geq 0, \\ & & \beta &= b, f. \end{aligned} \quad (36)$$

$$\langle \mathbf{v}_w^{(\beta)} \rangle_e \cdot \mathbf{n}_{e,\tau} = (\sigma_w^{(\beta)})_e^- \langle \mathbf{v}^{(\beta)} \rangle_e \cdot \mathbf{n}_{e,\tau}, \quad \langle \mathbf{v}^{(\beta)} \rangle_e \cdot \mathbf{n}_{e,\tau} < 0,$$

Отметим, что в разных средах направления потоков могут быть разные. На рисунке 1 приведена 2D-иллюстрация направлений потоков с указанием ячеек (выделены точками), в которых вычисляются зависящие от насыщенностей соответствующие коэффициенты. Крупной точкой выделена ячейка, в которой вычисляется коэффициент в функции массообмена.

Далее, для ячейки $\tau_{d,m}$, содержащей нагнетательную или добывающую скважину $\Omega_{d,m}$ (фрагмент перфорации), уравнения (33) для насыщенности имеют место на множестве $\omega_{d,m} = \tau_{d,m} \setminus \Omega_{d,m}$:

$$|\omega_{d,m}| \phi_{d,m}^{(\beta)} \frac{dS_{d,m}^{(\beta)}}{dt} + \int_{\partial\omega_{d,m}} \mathbf{v}_w^{(\beta)} \cdot \mathbf{n}_{d,m} d\gamma = \int_{\omega_{d,m}} r_w^{(\beta)}. \quad (37)$$

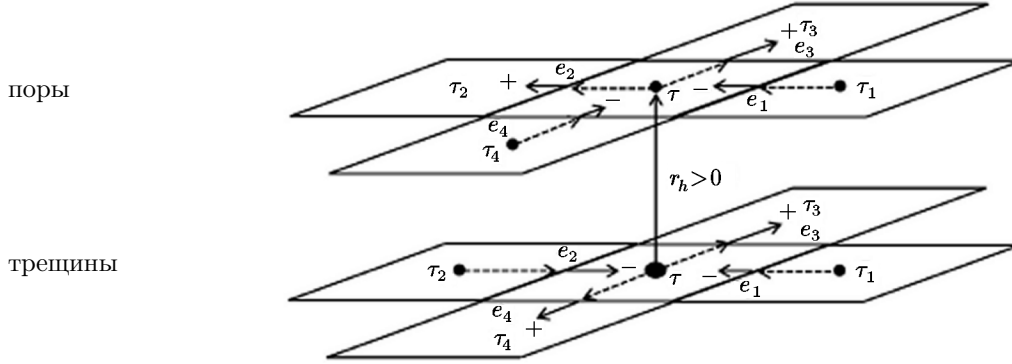


Рис. 1. Направления потоков в модели двойной пористости

Аналогично (12), имеет место равенство

$$\int_{\partial\omega_{d,m}} \mathbf{v}_w^{(\beta)} \cdot \mathbf{n}_{d,m} d\gamma = \int_{\partial\tau_{d,m}} \mathbf{v}_w^{(\beta)} \cdot \mathbf{n}_{d,m} d\gamma + \int_{\Gamma_{d,m}} \mathbf{v}_w^{(\beta)} \cdot \mathbf{n}_{d,m} d\gamma.$$

На границе $\Gamma_{in,m}$ нагнетательной скважины $\Omega_{in,m}$ будем полагать $S_{in,m}^{(\beta)} = S^*$, и, следовательно, $\sigma_w(S_{in,m}^{(\beta)}) = 1$. Тогда, в соответствии с (11), (8), будем полагать

$$\int_{\Gamma_{in,m}} \mathbf{v}_w^{(\beta)} \cdot \mathbf{n}_{in,m} d\gamma = -Q_{in,m}^{(\beta)}, \quad \int_{\Gamma_{pr,m}} \mathbf{v}_w^{(\beta)} \cdot \mathbf{n}_{pr,m} d\gamma = -\sigma_w(S_{pr,m}^{(\beta)}) Q_{pr,m}^{(\beta)}.$$

Подставляя эти формулы в предыдущее равенство, а результат — в уравнение (37), получим

$$|\omega_{in,m}| \phi_{in,m}^{(\beta)} \frac{dS_{in,m}^{(\beta)}}{dt} + \int_{\partial\tau_{in,m}} \mathbf{v}_w^{(\beta)} \cdot \mathbf{n}_{in,m} d\gamma = \int_{\omega_{in,m}} r_w^{(\beta)} + Q_{in,m}^{(\beta)}, \quad (38)$$

$$|\omega_{pr,m}| \phi_{pr,m}^{(\beta)} \frac{dS_{pr,m}^{(\beta)}}{dt} + \int_{\partial\tau_{pr,m}} \mathbf{v}_w^{(\beta)} \cdot \mathbf{n}_{pr,m} d\gamma = \int_{\omega_{pr,m}} r_w^{(\beta)} + \sigma_w(S_{pr,m}^{(\beta)}) Q_{pr,m}^{(\beta)}. \quad (39)$$

При этом второе слагаемое в левых частях равенств (38), (39) вычисляется в соответствии с формулами (35), (36). Отметим, что до начала заводнения добывающей скважины, когда выполняется равенство $\langle \mathbf{v}_w^{(\beta)} \rangle \cdot \mathbf{n}_{pr,m} = 0$ на $\partial\tau_{pr,m}$ и $S_{pr,m}^{(\beta)} = S_*$ в $\tau_{pr,m}$, и, следовательно, $\sigma_w(S_{pr,m}^{(\beta)}) = 0$ и $r_w^{(\beta)} = 0$, уравнение (38) принимает вид $dS_{pr,m}^{(\beta)}/dt = 0$. Это равенство может иметь место в разное время для поровых блоков и для трещин.

4. Явная схема и принцип максимума

В данном пункте мы рассмотрим дискретизацию задачи по времени. Пусть на временном слое $t_n = n\Delta t$ водонасыщенности $S_\tau^{(\beta),n}$ известны. Значения $S_\tau^{(\beta),0}$ являются начальными данными задачи. По этим значениям вычисляются суммарные скорости и давления в поровых блоках и трещинах, после чего по формулам (34)–(36) определяются

значения функции массообмена и фазовые скорости. В дальнейшем для этих величин индекс n будем опускать. Аппроксимацию по времени уравнения (33) будем осуществлять на основе явной схемы Эйлера:

$$S_{\tau}^{(\beta),n+1} = S_{\tau}^{(\beta),n} - \frac{\Delta t}{\phi_{\tau}^{(\beta)}|\tau|} \Phi_{\tau}^{(\beta)}(S_{\tau}^{(\beta),n}, \bar{S}_{\tau}^{(\beta),n}) + \frac{\Delta t}{\phi_{\tau}^{(\beta)}} r_{w,\tau}^{(\beta)}(S_{\tau}^{(b),n}, S_{\tau}^{(f),n}), \quad \beta = b, f, \quad \tau \in \mathcal{T}_0, \quad (40)$$

где $\bar{S}_{\tau}^{(\beta)} = \{S_{\tau_e}^{(\beta)}, e \in E_{\tau}\}$, E_{τ} — множество всех внутренних граней ячейки τ , и, согласно (11), (35), (36):

$$\Phi_{\tau}^{(\beta)}(S_{\tau}^{(\beta)}, \bar{S}_{\tau}^{(\beta)}) = \sigma_w(S_{\tau}^{(\beta)}) \sum_{e \in E_{\tau}^{(\beta),+}} |e| \langle \mathbf{v}^{(\beta)} \rangle_e \cdot \mathbf{n}_{e,\tau} - \sum_{e \in E_{\tau}^{(\beta),-}} |e| \sigma_w(S_{\tau_e}^{(\beta)}) |\langle \mathbf{v}^{(\beta)} \rangle_e \cdot \mathbf{n}_{e,\tau}|,$$

$$E_{\tau}^{(\beta),+} = \{e \in E_{\tau} \mid \langle \mathbf{v}^{(\beta)} \rangle_e \cdot \mathbf{n}_{e,\tau} > 0\}, \quad E_{\tau}^{(\beta),-} = \{e \in E_{\tau} \mid \langle \mathbf{v}^{(\beta)} \rangle_e \cdot \mathbf{n}_{e,\tau} < 0\}.$$

Дальнейшее исследование связано с установлением слабого принципа максимума для схемы (40); при достаточно малом шаге Δt из условия $S_* \leq S_{\tau}^{(\beta),n} \leq S^*$ следуют оценки:

$$S_* \leq S_{\tau}^{(\beta),n+1} \leq S^*, \quad \beta = b, f, \quad \tau \in \mathcal{T}_0. \quad (41)$$

Согласно равенству (24), после несложных преобразований функцию $\Phi_{\tau}^{(\beta)}(S_{\tau}^{(\beta)}, \bar{S}_{\tau}^{(\beta)})$ можно переписать следующим образом:

$$\Phi_{\tau}^{(\beta)}(S_{\tau}^{(\beta)}, \bar{S}_{\tau}^{(\beta)}) = \sum_{e \in E_{\tau}^{(\beta),-}} |e| \frac{d\sigma_w}{dS}(\tilde{S}^{(\beta)})(S_{\tau}^{(\beta)} - S_{\tau_e}^{(\beta)}) |\langle \mathbf{v}^{(\beta)} \rangle_e \cdot \mathbf{n}_{e,\tau}| + |\tau| \sigma_w(S_{\tau}^{(\beta)}) r_{\tau}^{(\beta)},$$

где $\tilde{S}^{(\beta)}$ — некоторые значения водонасыщенностей между $S_{\tau}^{(\beta)}$ и $S_{\tau_e}^{(\beta)}$. С учетом этого равенства уравнения (40) можно записать в виде

$$S_{\tau}^{(\beta),n+1} = S_{\tau}^{(\beta),n} - \frac{\Delta t}{\phi_{\tau}^{(\beta)}|\tau|} \left(\Phi_{\tau,1}^{(\beta)}(S_{\tau}^{(\beta),n}, \bar{S}_{\tau}^{(\beta),n}) + \Phi_{\tau,2}^{(\beta)}(S_{\tau}^{(b),n}, S_{\tau}^{(f),n}) \right), \quad (42)$$

где

$$\Phi_{\tau,1}^{(\beta)}(S_{\tau}^{(\beta)}, \bar{S}_{\tau}^{(\beta)}) = \sum_{e \in E_{\tau}^{(\beta),-}} |e| \frac{d\sigma_w}{dS}(\tilde{S}^{(\beta)})(S_{\tau}^{(\beta)} - S_{\tau_e}^{(\beta)}) |\langle \mathbf{v}^{(\beta)} \rangle_e \cdot \mathbf{n}_{e,\tau}|, \quad (43)$$

$$\Phi_{\tau,2}^{(\beta)}(S_{\tau}^{(b)}, S_{\tau}^{(f)}) = |\tau| \left(\sigma_w(S_{\tau}^{(\beta)}) r_{\tau}^{(\beta)}(S_{\tau}^{(b)}, S_{\tau}^{(f)}) - r_{w,\tau}^{(\beta)}(S_{\tau}^{(b)}, S_{\tau}^{(f)}) \right). \quad (44)$$

Для дальнейшего нам понадобится конкретный вид относительных проницаемостей, которые будем предполагать совпадающими для поровых блоков и трещин. В качестве $k_{r,\alpha}(S_{\alpha})$ часто используются (см, например, [5]) следующие функции:

$$k_{r,\alpha}(S_{\alpha}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq S_{\alpha} \leq S_*, \\ \left(\frac{S_{\alpha} - S_*}{S^* - S_*} \right)^d, & S_* < S_{\alpha} < S^*, \\ 1, & S^* \leq S_{\alpha} \leq 1, \end{cases} \quad \alpha = w, o, \quad d \geq 1. \quad (45)$$

Напомним, что $\sigma_w(S) = \mu k_{r,w}(S) / (\mu k_{r,w}(S) + k_{r,o}(1 - S))$, $\mu = \mu_o / \mu_w \geq 1$. Простые вычисления показывают, что при $S_* \leq S \leq S^*$

$$\frac{d\sigma_w(S)}{dS} \geq 0. \quad (46)$$

$$\text{Обозначим } A^{(\beta)} = \sum_{e \in E_r^{(\beta), -}} |e| \frac{d\sigma_w}{dS}(\tilde{S}^{(\beta)}) |\langle \mathbf{v}^{(\beta)} \rangle_e \cdot \mathbf{n}_{e,\tau}|.$$

Пусть для произвольной ячейки $\tau \in \mathcal{T}_0$ выполняются неравенства $S_* \leq S_\tau^{(\beta)} \leq S^*$. В том числе эти неравенства имеют место при рассмотрении фиксированной ячейки τ для $S_\tau^{(\beta)}$. Тогда, согласно (43), (46), имеют место неравенства:

$$A^{(\beta)}(S_\tau^{(\beta)} - S^*) \leq \Phi_{\tau,1}^{(\beta)}(S_\tau^{(\beta)}, \bar{S}_\tau^{(\beta)}) \leq A^{(\beta)}(S_\tau^{(\beta)} - S_*). \quad (47)$$

Далее, рассмотрим функцию $\Phi_{\tau,2}^{(\beta)}(S_\tau^{(b)}, S_\tau^{(f)})$. Пусть $\beta = b$. В случае $p_\tau^{(f)} \leq p_\tau^{(b)}$ из формул (34) и (44) немедленно следует, что $\Phi_{\tau,2}^{(b)}(S_\tau^{(b)}, S_\tau^{(f)}) = 0$. Тогда использование оценок (47) в уравнении (42) приводит к неравенствам:

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{\phi_\tau^{(b)}|\tau|} A^{(\beta)}\right) S_\tau^{(b),n} + \frac{\Delta t}{\phi_\tau^{(b)}|\tau|} A^{(\beta)} S_* \leq S_\tau^{(b),n+1} \leq \left(1 - \frac{\Delta t}{\phi_\tau^{(b)}|\tau|} A^{(\beta)}\right) S_\tau^{(b),n} + \frac{\Delta t}{\phi_\tau^{(b)}|\tau|} A^{(\beta)} S^*.$$

Пусть выполнено условие Куранта–Фридрихса–Леви (CFL-условие):

$$\Delta t A^{(\beta)} \leq \phi_\tau^{(b)}|\tau|. \quad (48)$$

Тогда из предположения $S_* \leq S_\tau^{(b),n} \leq S^*$ немедленно следуют оценки (41) при $\beta = b$ и условии, что $p_\tau^{(f)} \leq p_\tau^{(b)}$.

Рассмотрим случай $p_\tau^{(f)} > p_\tau^{(b)}$. Согласно (34), (44), имеет место

$$\Phi_{\tau,2}^{(b)}(S_\tau^{(b)}, S_\tau^{(f)}) = |\tau| r_\tau (\sigma_w(S_\tau^{(b)}) - \sigma_w(S_\tau^{(f)})).$$

Величина r_τ задается формулой (23), причем $r_\tau \geq 0$. Как нетрудно видеть, имеет место неравенство

$$\Phi_{\tau,2}^{(b)}(S_\tau^{(b)}, S_\tau^{(f)}) = |\tau| r_\tau \left(\frac{d\sigma_w}{dS}(\tilde{S}_1^{(b)})(S_\tau^{(b)} - S_*) - \sigma_w(S_\tau^{(f)}) \right) \leq B_1^{(b)}(S_\tau^{(b)} - S_*), \quad (49)$$

где $\tilde{S}_1^{(b)} \in [S_*, S_\tau^{(b)}]$, $B_1^{(b)} = |\tau| r_\tau d\sigma_w/dS(\tilde{S}_1^{(b)}) \geq 0$. С другой стороны, имеет место следующее представление функции $\Phi_{\tau,2}^{(b)}(S_\tau^{(b)}, S_\tau^{(f)})$:

$$\Phi_{\tau,2}^{(b)}(S_\tau^{(b)}, S_\tau^{(f)}) = |\tau| r_\tau \left(\frac{d\sigma_w}{dS}(\tilde{S}_2^{(b)})(S_\tau^{(b)} - S^*) + \frac{d\sigma_w}{dS}(\tilde{S}_2^{(f)})(S^* - S_\tau^{(f)}) \right),$$

где $\tilde{S}_2^{(b)} \in [S_\tau^{(b)}, S^*]$, $\beta = b, f$. Согласно (46), из этого представления немедленно следует неравенство

$$\Phi_{\tau,2}^{(b)}(S_\tau^{(b)}, S_\tau^{(f)}) \geq B_2^{(b)}(S_\tau^{(b)} - S^*), \quad (50)$$

где $B_2^{(b)} = |\tau| r_\tau d\sigma_w/dS(\tilde{S}_2^{(b)}) \geq 0$. Таким образом, оценки (49) и (50) являются аналогом

двустороннего неравенства (47) для функции $\Phi_{\tau,2}^{(b)}(S_{\tau}^{(b)}, S_{\tau}^{(f)})$. Совместное использование оценок (47), (49) и (50) в уравнении (42) приводит к неравенствам:

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{\phi_{\tau}^{(b)}|\tau|}(A^{(b)} + B_1^{(b)})\right) S_{\tau}^{(b),n} + \frac{\Delta t}{\phi_{\tau}^{(b)}|\tau|}(A^{(b)} + B_1^{(b)})S_* \leq S_{\tau}^{(b),n+1} \leq \left(1 - \frac{\Delta t}{\phi_{\tau}^{(b)}|\tau|}(A^{(b)} + B_2^{(b)})\right) S_{\tau}^{(b),n} + \frac{\Delta t}{\phi_{\tau}^{(b)}|\tau|}(A^{(b)} + B_2^{(b)})S_*.$$

В рассматриваемом случае ($p_{\tau}^{(f)} > p_{\tau}^{(b)}$) условие Куранта–Фридрихса–Леви имеет вид

$$\Delta t \left(A^{(b)} + \max \{ B_1^{(b)}, B_2^{(b)} \} \right) \leq \phi_{\tau}^{(b)}|\tau|. \quad (51)$$

Из этого условия немедленно следуют оценки (41) при $\beta = b$. Отметим, что условие (51) автоматически обеспечивает выполнение условия (48), т. е. (51) обеспечивает выполнение неравенства (41) для $\beta = b$ при любом знаке разности $p_{\tau}^{(f)} - p_{\tau}^{(b)}$.

Случай $\beta = f$ исследуется совершенно аналогично: следует поменять местами индексы b и f во всех обозначениях, начиная с заданной формулой (23) величины r_{τ} . В результате получим неравенства (41) при выполнении наряду с (51) условия

$$\Delta t \left(A^{(f)} + \max \{ B_1^{(f)}, B_2^{(f)} \} \right) \leq \phi_{\tau}^{(f)}|\tau|.$$

В заключение данного пункта следует отметить, что приведенные условия Куранта–Фридрихса–Леви зависят от найденных на n -ом слое сеточных функций $\mathbf{v}^{(\beta)}$ и $p^{(\beta)}$, и, следовательно, желательно иметь соответствующие оценки этих функций. Техника получения таких оценок изложена, например, в [22], а как влияет наличие скважин на эти оценки исследовано в работе [32].

5. Вычислительный эксперимент

В данном пункте приведены результаты вычислительных экспериментов для модели фильтрации в трещиновато-пористой среде, иллюстрирующие работоспособность изложенного в статье алгоритма. Основной целью экспериментов являлась демонстрация отсутствия осцилляций в окрестности водонефтяного контакта в задаче Баклея–Лeverетта для модели двойной пористости. Рассмотрен пример с одной нагнетательной и одной добывающей скважинами. Предполагается, что пласт является однородным по пористости и абсолютной проницаемости в вертикальном направлении, а скважины по степени вскрытия являются совершенными. Эти предположения означают, что расчеты могут быть проведены для 2D-задачи. Все приводимые ниже результаты экспериментов получены при следующих значениях физических параметров процесса фильтрации:

$$\begin{aligned} \phi^{(b)} &= 0.375, & \phi^{(f)} &= 0.05, & k_0 &= 3.06 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2, & S_* &= 0.2, & S^* &= 0.8, \\ \mu_w &= 1.15 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}, & \mu_o &= 9.28 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}, \\ Q^{(b)} &= 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}, & Q^{(f)} &= 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}. \end{aligned}$$

Здесь k_0 — скалярная абсолютная проницаемость пласта, одинаковая для поровых блоков и трещин, а обусловленные анизотропией тензоры абсолютной проницаемости заданы в виде

$$K_0^{(b)} = k_0 \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_0^{(f)} = k_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Величина $k^{(b,f)}$ в экспериментах будет варьироваться. В дальнейшем расчетная область $\Omega \subset R^2$ будет привязана к декартовой системе координат: $\Omega = (0, L_x) \times (0, L_y)$, где $L_x = L_y = 50$ м. Координаты центров скважин: $x_{in} = 10$ м, $y_{in} = 25$ м, $x_{pr} = 40$ м, $y_{pr} = 25$ м. Во всех экспериментах в качестве начальных данных для водонасыщенности рассматривался пласт с нулевой подвижностью воды: $S(0, \mathbf{x}) = S_*$, $\mathbf{x} \in \Omega$. Все расчеты проводились на квадратной сетке при следующих значениях сеточных параметров: $M_x = M_y = 200$, $\Delta t = 250$ с. Шаг по времени, обеспечивающий условие Куранта–Фридрихса–Леви, выбирался экспериментально.

В первом эксперименте иллюстрируется отсутствие осцилляций на фронте водонефтяного контакта. На рис. 2 приведены значения водонасыщенности в поровых блоках и в трещинах в различные моменты времени при $k^{(b,f)} = 10^{-15}$. Численное решение имеет характер распространяющегося разрыва, что в точности соответствует одномерным аналитическим решениям задачи Баклея–Левретта. При этом использование противопотоковой технологии обеспечивает отсутствие нефизичных осцилляций на фронте разрыва.

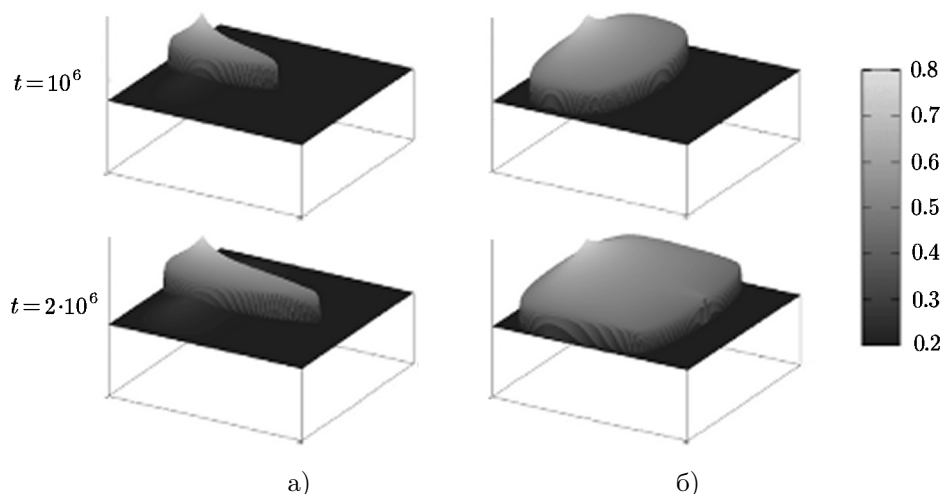


Рис. 2. Водонасыщенности в поровых блоках (а) и в трещинах (б) с коэффициентом массообмена 10^{-15}

Следующая серия экспериментов иллюстрирует поведение водонасыщенности при различной интенсивности массообмена между поровыми блоками и трещинами на начальной стадии процесса вытеснения нефти водой и на стадии заводнения добывающей скважины. Соответствующие результаты приведены на рисунках 3 и 4.

В случае слабого массообмена между поровыми блоками и трещинами (рис. 3) поток воды в трещинах достигает добывающей скважины практически одновременно с потоком, распространяющимся в поровых блоках. Это происходит, несмотря на анизотропию пласта, препятствующую потоку воды в трещинах в направлении добывающей скважины. При этом заводнение скважины начинается, когда в поровых блоках остается значительное количество невытесненной нефти. Совершенно другая картина наблюдается при значительном усилении интенсивности массообмена (рис. 4). Поток воды в трещинах самым существенным образом способствует вытеснению нефти в поровых блоках. Особенностью процесса в этом случае является локальный рост водонасыщенности в трещинах в окрестности добывающей скважины за счет воды в поровых блоках.

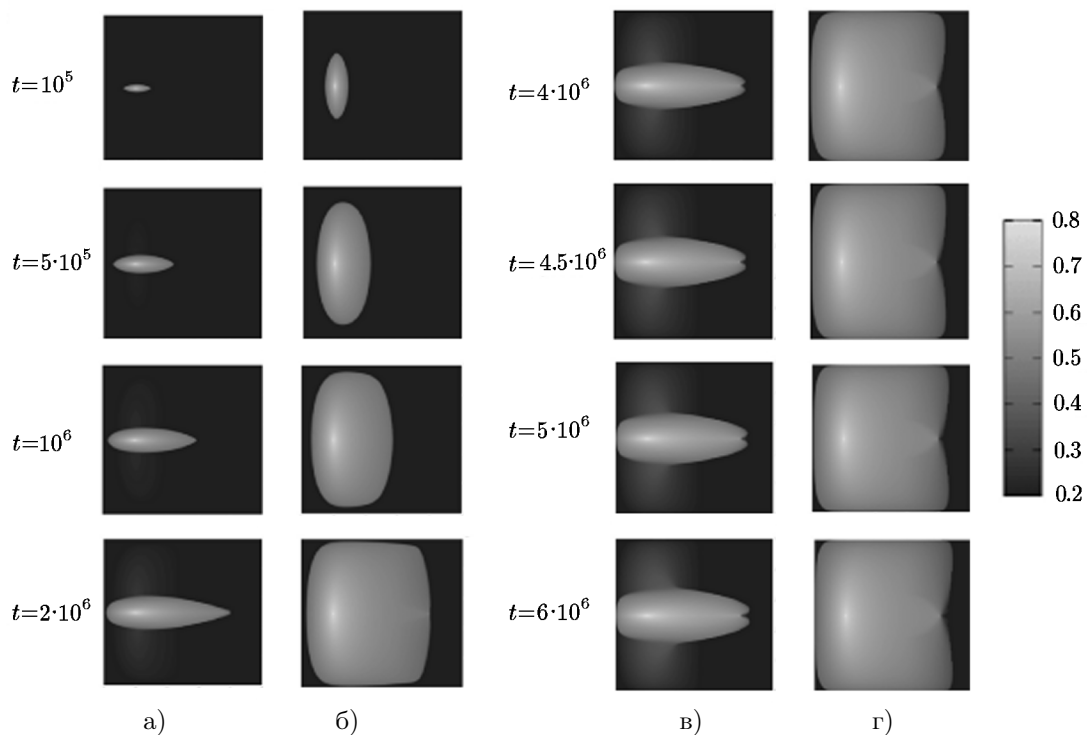


Рис. 3. Динамика водонасыщенности в поровых блоках (а, в) и в трещинах (б, г) с коэффициентом массообмена 10^{-15}

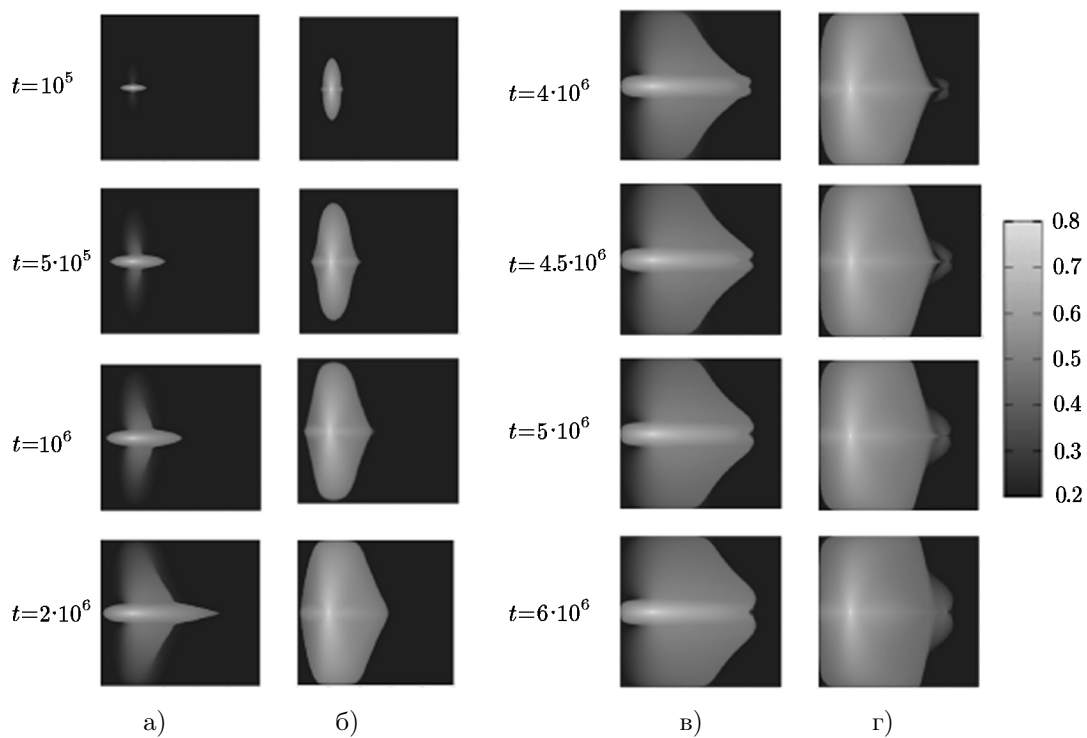


Рис. 4. Динамика водонасыщенности в поровых блоках (а, в) и в трещинах (б, г) с коэффициентом массообмена 10^{-13}

6. Заключение

В статье рассмотрен метод решения 3D-задачи фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости в трещиновато-пористой среде в рамках модели Баклея–Леверетта. Рассмотренная модель сформулирована в виде интегральных законов сохранения в терминах суммарных скоростей, давлений и насыщенных в поровых блоках и скважинах. Нагнетательные и добывающие скважины обеспечивали приток и сток двухфазной жидкости заданными суммарными дебитами. С учетом условия непроницаемости внешней границы пласта для суммарных скоростей и давлений была сформулирована задача Неймана для системы 4-х уравнений первого порядка. Получено условие однозначной разрешимости этой задачи, состоящей в ортогональности константе суммы давлений в поровых блоках и трещинах. Предложена однозначно разрешимая модификация этой задачи. Другой особенностью рассмотренного алгоритма явился тот факт, что противопотоковая технология была применена не только к конвективным слагаемым, но и к функции массообмена. Как результат при вычисленных суммарных скоростях и давлениях удалось установить условия Куранта–Фридрихса–Леви, обеспечивающие устойчивость и монотонность явной схемы вычисления водонасыщенностей. Работоспособность рассмотренного алгоритма проиллюстрирована вычислительными экспериментами.

Литература

1. **Peaceman D.W.** Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation. — Amsterdam: Elsevier, 1977.
2. **Dake L.P.** Fundamentals of Reservoir Engineering // Developments in Petroleum Science. — Elsevier, 1978. — Vol. 8.
3. **Aziz K. and Settari A.** Petroleum Reservoir Simulation // Applied Science Publishers. — London, 1979.
4. **Chavent G. and Jaffre J.** Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation. — Elsevier, 1986.
5. **Kononov A.N.** Problems of Multiphase Fluid Filtration. — World Scientific, 1994.
6. **Chen Z., Huan G., and Ma Y.** Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media. — Philadelphia: SIAM, 2006.
7. **van Golf-Racht T.D.** Fundamentals of Fractured Reservoir Engineering // Developments in Petroleum Science. — Elsevier, 1982. — Vol. 12.
8. **Ramirez B., Kazemi H., Al-kobaisi M., Ozkan E., and Atan S.** A critical review for proper use of water/oil/gas transfer functions in dual-porosity naturally fractured reservoirs: part I // SPE Reservoir Evaluation and Engineering. — 2009. — Vol. 12, № 2. — P. 200–210.
9. **Al-Kobaisi M., Kazemi H., Ramirez B., Ozkan E., and Atan S.** A critical review for proper use of water/oil/gas transfer functions in dual-porosity naturally fractured reservoirs: part II // SPE Reservoir Evaluation and Engineering. — 2009. — Vol. 12, № 2. — P. 211–217.
10. **Lemonnier P. and Bourbiaux B.** Simulation of naturally fractured reservoirs. State of the art. Part 1 // Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP. — 2010. — Vol. 65, № 2. — P. 239–262.
11. **Lemonnier P. and Bourbiaux B.** Simulation of naturally fractured reservoirs. State of the art. Part 2 // Oil and Gas Science and Technology – Rev. IFP. — 2010. — Vol. 65, № 2. — P. 263–286.
12. **Berre I., Doster F., and Keilegavlen E.** Flow in fractured porous media: a review of conceptual models and discretization approaches // Transport in Porous Media. — 2019. — Vol. 130. — P. 215–236.

13. **Barenblatt G.I., Zheltov I.P., and Kochina I.N.** Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks // *J. of Applied Mathematics and Mechanics.* — 1960. — Vol. 24, № 5. — P. 1286–1303.
14. **Warren J.E. and Root P.J.** The behavior of naturally fractured reservoirs // *Society of Petroleum Engineers J.* — 1963. — Vol. 3, № 3. — P. 245–255.
15. **Kazemi H., Merrill Jr. L.S., Porterfield K.L., and Zeman P.R.** Numerical simulation of water-oil flow in naturally fractured reservoirs // *Society of Petroleum Engineers J.* — 1976. — Vol. 16, № 6. — P. 317–326.
16. **Gilman J.R. and Kazemi H.** Improved calculations for viscous and gravity displacement in matrix blocks in dual porosity simulators // *Society of Petroleum Engineers J.* — 1988. — Vol. 40, № 1. — P. 60–70.
17. **Douglas Jr. J. and Arbogast T.** Dual porosity models for flow in naturally fractured reservoirs // *Dynamics of Fluids in Hierarchical Porous Media / J.H. Cushman.* — 1990. — P. 177–221.
18. **Dmitriev N.M. and Maksimov V.M.** Models of flow through fractured-porous anisotropic media // *Fluid Dynamics.* — 2007. — Vol. 42, № 6. — P. 937–942.
19. **Grigoriev A.V., Laevsky Yu.M., and Yakovlev P.G.** On a double porosity model of fractured-porous reservoirs based on a hybrid flow function // *Numerical Analysis and Applications.* — 2018. — Vol. 11, № 2. — P. 121–133.
20. **Zheng H., An-Feng Shi, Zhi-Feng Liu, and Xiao-Hong Wang** A dual-porosity model considering the displacement effect for incompressible two-phase flow // *Inter. J. Numer. Anal. Methods Geomechanics.* — 2020. — Vol. 44, № 5. — P. 691–704.
21. **Васильев В.И., Васильева М.В., Григорьев А.В., Прокопьев Г.А.** Математическое моделирование задачи двухфазной фильтрации в неоднородных трещиновато-пористых средах с использованием модели двойной пористости и метода конечных элементов // *Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки.* — 2018. — Т. 160, № 1. — С. 165–182.
22. **Brezzi F. and Fortin M.** *Mixed and Hybrid Finite Element Methods.* — NY: Springer-Verlag, 1991.
23. **Raviart P.A. and Thomas J.M.** A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems. *Mathematical aspects of finite element methods // Mathematical Aspects of the Finite Element Method.* — 1977. — P. 292–315. — (Lecture Notes in Mathematics; 606).
24. **Ivanov M.I., Kremer I.A., and Laevsky Yu.M.** On the streamline upwind scheme of solution to the filtration problem // *Siberian Electronic Mathematical Reports.* — 2019. — Vol. 16. — P. 757–776.
25. **Chavent G., Jaffre J., and Roberts J.E.** Generalized cell-centered finite volume methods: application to two-phase flow in porous media // *Computational Science for the 21st Century.* — Wiley, 1997. — P. 231–241.
26. **Michel A.** A finite volume scheme for two-phase immiscible flow in porous media // *SIAM J. Numer. Anal.* — 2003. — Vol. 41, № 4. — P. 1301–1317.
27. **Elakkad A., Guessous N., and Elkhalfi A.** Combined mixed hybrid finite element and finite volume method for flow in porous media // *Inter. J. of Mathematics and Statistics.* — 2010. — Vol. 7, № 10. — P. 24–31.
28. **Nikitin K.D.** Nonlinear finite volume method for two-phase flows // *Matem. Model.* — 2010. — Vol. 22, № 11. — P. 131–147.
29. **Buckley S.E. and Leverett M.C.** Mechanism of fluid displacement in sands // *Transactions of the AIME.* — 1942. — Vol. 146, № 1. — P. 107–116.

30. **Sheldon J.W., Zondek B., and Cardwell W.T.** One-dimensional, incompressible, noncapillary, two-phase fluid flow in a porous medium // Transactions of the AIME. — 1959. — Vol. 216, № 1. — P. 290–296.
31. **Ivanov M.I., Kremer I.A., and Laevsky Yu.M.** On wells modeling in filtration problems // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2019. — Vol. 16. — P. 1868–1884.
32. **Laevsky Yu.M.** A problem with wells for the steady diffusion equation // Numerical Analysis and Applications. — 2010. — Vol. 3, № 2. — P. 101–117.

Поступила в редакцию 3 октября 2020 г.

После рецензирования без замечаний 17 октября 2020 г.

Принята к печати 4 февраля 2021 г.

Литература в транслитерации

1. **Peaceman D.W.** Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation. — Amsterdam: Elsevier, 1977.
2. **Dake L.P.** Fundamentals of Reservoir Engineering // Developments in Petroleum Science. — Elsevier, 1978. — Vol. 8.
3. **Aziz K. and Settari A.** Petroleum Reservoir Simulation // Applied Science Publishers. — London, 1979.
4. **Chavent G. and Jaffre J.** Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation. — Elsevier, 1986.
5. **Konovalov A.N.** Problems of Multiphase Fluid Filtration. — World Scientific, 1994.
6. **Chen Z., Huan G., and Ma Y.** Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media. — Philadelphia: SIAM, 2006.
7. **van Golf-Racht T.D.** Fundamentals of Fractured Reservoir Engineering // Developments in Petroleum Science. — Elsevier, 1982. — Vol. 12.
8. **Ramirez B., Kazemi H., Al-kobaisi M., Ozkan E., and Atan S.** A critical review for proper use of water/oil/gas transfer functions in dual-porosity naturally fractured reservoirs: part I // SPE Reservoir Evaluation and Engineering. — 2009. — Vol. 12, № 2. — P. 200–210.
9. **Al-Kobaisi M., Kazemi H., Ramirez B., Ozkan E., and Atan S.** A critical review for proper use of water/oil/gas transfer functions in dual-porosity naturally fractured reservoirs: part II // SPE Reservoir Evaluation and Engineering. — 2009. — Vol. 12, № 2. — P. 211–217.
10. **Lemonnier P. and Bourbiaux B.** Simulation of naturally fractured reservoirs. State of the art. Part 1 // Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP. — 2010. — Vol. 65, № 2. — P. 239–262.
11. **Lemonnier P. and Bourbiaux B.** Simulation of naturally fractured reservoirs. State of the art. Part 2 // Oil and Gas Science and Technology – Rev. IFP. — 2010. — Vol. 65, № 2. — P. 263–286.
12. **Berre I., Doster F., and Keilegavlen E.** Flow in fractured porous media: a review of conceptual models and discretization approaches // Transport in Porous Media. — 2019. — Vol. 130. — P. 215–236.
13. **Barenblatt G.I., Zheltov I.P., and Kochina I.N.** Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks // J. of Applied Mathematics and Mechanics. — 1960. — Vol. 24, № 5. — P. 1286–1303.
14. **Warren J.E. and Root P.J.** The behavior of naturally fractured reservoirs // Society of Petroleum Engineers J. — 1963. — Vol. 3, № 3. — P. 245–255.
15. **Kazemi H., Merrill Jr. L.S., Porterfield K.L., and Zeman P.R.** Numerical simulation of water-oil flow in naturally fractured reservoirs // Society of Petroleum Engineers J. — 1976. — Vol. 16, № 6. — P. 317–326.

16. **Gilman J.R. and Kazemi H.** Improved calculations for viscous and gravity displacement in matrix blocks in dual porosity simulators // Society of Petroleum Engineers J.—1988.— Vol. 40, № 1.— P. 60–70.
17. **Douglas Jr. J. and Arbogast T.** Dual porosity models for flow in naturally fractured reservoirs // Dynamics of Fluids in Hierarchical Porous Media / J.H. Cushman.— 1990.— P. 177–221.
18. **Dmitriev N.M. and Maksimov V.M.** Models of flow through fractured-porous anisotropic media // Fluid Dynamics.— 2007.— Vol. 42, № 6.— P. 937–942.
19. **Grigoriev A.V., Laevsky Yu.M., and Yakovlev P.G.** On a double porosity model of fractured-porous reservoirs based on a hybrid flow function // Numerical Analysis and Applications.— 2018.— Vol. 11, № 2.— P. 121–133.
20. **Zheng H., An-Feng Shi, Zhi-Feng Liu, and Xiao-Hong Wang** A dual-porosity model considering the displacement effect for incompressible two-phase flow // Inter. J. Numer. Anal. Methods Geomechanics.— 2020.— Vol. 44, № 5.— P. 691–704.
21. **Vasil'ev V.I., Vasil'eva M.V., Grigor'ev A.V., Prokop'ev G.A.** Matematicheskoe modelirovanie zadachi dvukhfaznoi fil'tracii v neodnorodnykh treschinovato-poristykh sredakh s ispol'zovaniem modeli dvoynoi poristosti i metoda konechnykh elementov // Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki.— 2018.— Т. 160, № 1.— S. 165–182.
22. **Brezzi F. and Fortin M.** Mixed and Hybrid Finite Element Methods.— NY: Springer-Verlag, 1991.
23. **Raviart P.A. and Thomas J.M.** A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems. Mathematical aspects of finite element methods // Mathematical Aspects of the Finite Element Method.— 1977.— P. 292–315.— (Lecture Notes in Mathematics; 606).
24. **Ivanov M.I., Kremer I.A., and Laevsky Yu.M.** On the streamline upwind scheme of solution to the filtration problem // Siberian Electronic Mathematical Reports.— 2019.— Vol. 16.— P. 757–776.
25. **Chavent G., Jaffre J., and Roberts J.E.** Generalized cell-centered finite volume methods: application to two-phase flow in porous media // Computational Science for the 21st Century.— Wiley, 1997.— P. 231–241.
26. **Michel A.** A finite volume scheme for two-phase immiscible flow in porous media // SIAM J. Numer. Anal.— 2003.— Vol. 41, № 4.— P. 1301–1317.
27. **Elakkad A., Guessous N., and Elkhalfi A.** Combined mixed hybrid finite element and finite volume method for flow in porous media // Inter. J. of Mathematics and Statistics.— 2010.— Vol. 7, № 10.— P. 24–31.
28. **Nikitin K.D.** Nonlinear finite volume method for two-phase flows // Matem. Model.— 2010.— Vol. 22, № 11.— P. 131–147.
29. **Buckley S.E. and Leverett M.C.** Mechanism of fluid displacement in sands // Transactions of the AIME.— 1942.— Vol. 146, № 1.— P. 107–116.
30. **Sheldon J.W., Zondek B., and Cardwell W.T.** One-dimensional, incompressible, noncapillary, two-phase fluid flow in a porous medium // Transactions of the AIME.— 1959.— Vol. 216, № 1.— P. 290–296.
31. **Ivanov M.I., Kremer I.A., and Laevsky Yu.M.** On wells modeling in filtration problems // Siberian Electronic Mathematical Reports.— 2019.— Vol. 16.— P. 1868–1884.
32. **Laevsky Yu.M.** A problem with wells for the steady diffusion equation // Numerical Analysis and Applications.— 2010.— Vol. 3, № 2.— P. 101–117.