

УДК 532.529:536.24

СРАВНЕНИЕ НИЗКОРЕЙНОЛЬДСОВЫХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ С ДАННЫМИ ПРЯМОГО ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ

К.Н. ВОЛКОВ

Университет Суррея, Гилфорд, Великобритания

Проводится прямое численное моделирование полностью развитого турбулентного течения в канале. Для решения полных уравнений Навье — Стокса используется метод контрольного объема на неравномерной сетке и схемы повышенной разрешающей способности по времени и пространству. Результаты прямого численного моделирования используются для сравнения с выражениями для демпфирующих функций и источниковых членов, постулируемыми в низкорейнольдсовых версиях $k-\varepsilon$ модели турбулентности. Указываются модели, имеющие удовлетворительное согласование с результатами прямого численного моделирования.

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании современных технических устройств различного назначения (газотурбинные двигатели, теплообменники, энергетические установки) практически невозможно обойтись без использования численных методов расчета внутренних турбулентных течений и теплообмена вязкого сжимаемого газа. В отличие от ламинарных течений, расчет которых представляет собой во многом рутинную процедуру, надежное предсказание характеристик турбулентных потоков по ряду причин (трехмерный характер течения, стохастическая природа и широкий пространственно-временной спектр масштабов) остается скорее искусством, чем строгой наукой.

Вопросы замыкания уравнений Рейнольдса решаются на различном уровне сложности [1, 2]. Наиболее представительную группу дифференциальных моделей турбулентности составляют модели с двумя уравнениями (двухпараметрические модели), среди которых широкое распространение получила $k-\varepsilon$ модель турбулентности [3]. Несмотря на известные ограничения (пограничные слои с градиентом давления, закрученные и отрывные течения, ламинарно-турбулентный переход), распространение $k-\varepsilon$ модели объясняется ее относительной простотой и наглядностью, устойчивым итерационным процессом, устойчивостью к погрешностям задания входных данных и разумной точностью для широкого круга задач. Имеются многочисленные расчеты турбулентных течений с использованием $k-\varepsilon$ модели [2, 4], а сама модель включается во многие коммерческие вычислительные пакеты (например, STAR-CD, CFX, FLUENT).

Стандартная $k-\varepsilon$ модель (модель в формулировке Лаундера — Сполдинга [3]) справедлива для полностью развитого турбулентного потока и неточно описывает течение в пристеночной области ($y^+ < 10$), где турбулентные флуктуации подавляются

стенкой. При расчете пристеночных течений модель обычно дополняется эмпирическим законом о поведении потока вблизи стенки (метод пристеночных функций).

Низкорейнольдсовы версии $k-\varepsilon$ модели [5 – 24] обеспечивают описание турбулентных течений вплоть до стенки и устраняют недостатки исходной модели [3], но требуют использования подробной сетки вблизи стенки ($y^+ < 1$) из-за высоких градиентов диссипативной функции [2].

Для снижения требований к расчетной сетке используется также двухслойная модель турбулентности [25]. Стандартная (высокорейнольдсовая) версия $k-\varepsilon$ модели применяется вдали от стенки в области полностью развитого турбулентного течения, а в вязкой области применяется однопараметрическая $k-l$ модель и алгебраические соотношения для расчета скорости диссипации (обычно $y^+ \sim 1$).

Наряду с традиционными исследованиями, направленными на усовершенствование существующих и разработку новых моделей турбулентности, в последнее время большое внимание уделяется проблеме их тестирования и определению границ применимости. Имеются специальные международные программы, посвященные тестированию полуэмпирических моделей турбулентности, координируемые Стэнфордским университетом, Комиссией ЕС по развитию научных исследований и Европейским сообществом по течениям, турбулентности и горению (European Research Community on Flow, Turbulence and Combustion, ERCOFTAC). Значительный вклад в решение данной проблемы внесли Стэнфордские конференции (Stanford, USA, 1968, 1980, 1990), международные рабочие семинары ERCOFTAC (1997, 1998), а также Европейский проект по вычислительной аэродинамике (European Computational Aerodynamics Research Project, ECARP) [4].

Правомерность использования различных моделей турбулентности исследуется, как правило, применительно к более простым задачам, имеющим упрощенную геометрию, но сохраняющим ключевые моменты исходной постановки. К одной из таких задач относится полностью развитое турбулентное течение в канале, для которой накоплен большой по объему и разнообразный по содержанию экспериментальный и теоретический материал [2, 26].

Основным критерием точности и приемлемости различных моделей турбулентности является согласование результатов, полученных на основе той или иной модели, с данными физического эксперимента или результатами применения более общего подхода к моделированию турбулентности.

В отличие от уравнений Рейнольдса (Reynolds Averaged Navier — Stokes, RANS), прямое численное моделирование (Direct Numerical Simulation, DNS) предполагает решение полных нестационарных трехмерных уравнений Навье — Стокса, что при отсутствии численных и другого рода ошибок позволяет получить мгновенные характеристики и разрешить все масштабы турбулентного потока. Полученная статистика может быть использована для тестирования моделей турбулентности, развития методов управления турбулентными потоками, исследования ламинарно-турбулентного перехода. Принимая во внимание ограниченные возможности измерительной техники, DNS рассматривается как дополнительный источник экспериментальных данных (например, таких характеристик течения как пульсации давления, завихренность и скорость диссипации турбулентной энергии).

В настоящей работе проводится прямое численное моделирование полностью развитого турбулентного течения в канале. Для численного решения полных уравнений Навье — Стокса используется метод контрольного объема на неравномерной сетке. Для продвижения решения во времени и представления пространственных производных на мельчайших масштабах используются конечно-разностные схемы высокой разрешающей способности. Результаты прямого численного моделирования используются для сравнения с выражениями для демпфирующих функций

и источниковых членов, постулируемыми в низкорейнольдсовых версиях $k-\varepsilon$ модели турбулентности [5 – 24]. Указываются модели, имеющие удовлетворительное согласование с результатами прямого численного моделирования.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И РАСЧЕТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

В декартовой системе координат (x, y, z) нестационарное течение вязкого сжимаемого газа описывается уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) дополняется уравнением состояния совершенного газа

$$p = (\gamma - 1)\rho \left[e - \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right].$$

Вектор консервативных переменных \mathbf{Q} , а также векторы потоков \mathbf{F} , \mathbf{G} и \mathbf{H} имеют следующий вид:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho e \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x v_x + p - \tau_{xx} \\ \rho v_x v_y - \tau_{xy} \\ \rho v_x v_z - \tau_{xz} \\ (\rho e + p)v_x - v_x \tau_{xx} - v_y \tau_{xy} - v_z \tau_{xz} + q_x \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y v_x - \tau_{yx} \\ \rho v_y v_y + p - \tau_{yy} \\ \rho v_y v_z - \tau_{yz} \\ (\rho e + p)v_y - v_x \tau_{yx} - v_y \tau_{yy} - v_z \tau_{yz} + q_y \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_x - \tau_{zx} \\ \rho v_z v_y - \tau_{zy} \\ \rho v_z v_z + p - \tau_{zz} \\ (\rho e + p)v_z - v_x \tau_{zx} - v_y \tau_{zy} - v_z \tau_{zz} + q_z \end{pmatrix}.$$

Компоненты тензора вязких напряжений и составляющие вектора теплового потока находятся из соотношений:

$$\tau_{ij} = \mu_e \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \quad q_i = -\lambda_e \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Здесь t — время, ρ — плотность, v_x, v_y, v_z — составляющие скорости в координатных направлениях x, y, z , p — давление, T — температура, e — полная энергия

единицы массы, γ — отношение удельных теплоемкостей. Молекулярному числу Прандтля присваивается постоянное значение. Теплопроводность выражается через вязкость и число Прандтля $\lambda = c_p \mu / Pr$, где c_p — теплоемкость при постоянном давлении.

2. НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ газ покоится. Во входном сечении канала задаются равномерные профили скорости, плотности и давления ($v_x = u_0$, $\rho = \rho_0$, $p = p_0$), на которые накладываются случайные возмущения с заданной амплитудой (белый шум) [26]. На стенках канала выставляются граничные условия прилипания и непротекания для составляющих скорости ($v_x = v_y = v_z = 0$), а также температура стенки T_w .

При моделировании нестационарных дозвуковых течений возникает проблема постановки граничных условий для выходящего потока газа, содержащего интенсивные вихревые структуры. Возможные нефизические эффекты генерации и отражения звуковых волн на выходной границе искажают реальную картину потока. На выходе из расчетной области для всех искомых функций выставляются условия конвективного переноса (неотражающие граничные условия)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0,$$

где Φ — искомая функция; U — скорость, которая выбирается исходя из условия сохранения массы и не зависит от положения выходной границы.

3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Для дискретизации уравнения (1) применяется метод контрольного объема на неравномерной сетке

$$\frac{dQ_i}{dt} + L(Q_{i,j,k}) = 0. \quad (2)$$

Дифференциальный оператор в (2) находится из соотношения

$$L(Q_{i,j,k}) = \frac{F_{i+1/2,j,k} - F_{i-1/2,j,k}}{\Delta x_{i,j,k}} + \frac{G_{i,j+1/2,k} - G_{i,j-1/2,k}}{\Delta y_{i,j,k}} + \frac{H_{i,j,k+1/2} - H_{i,j,k-1/2}}{\Delta z_{i,j,k}}.$$

Потоки расщепляются на невязкую и вязкую составляющие, и для их дискретизации используются различные разностные схемы. Дискретизация невязких потоков проводится при помощи метода кусочно-параболической реконструкции и схемы Чакраварти — Ошера [27]. Для дискретизации диффузионных потоков используются центрированные конечно-разностные формулы 2-го порядка.

Для дискретизации по времени применяется трехшаговый метод Рунге — Кутты [28]:

$$\begin{aligned} Q_{i,j,k}^{(1)} &= Q_{i,j,k}^{(n)} + \Delta t L(Q_{i,j,k}^{(n)}), \\ Q_{i,j,k}^{(2)} &= \frac{3}{4} Q_{i,j,k}^{(n)} + \frac{1}{4} [Q_{i,j,k}^{(1)} + \Delta t L(Q_{i,j,k}^{(1)})], \\ Q_{i,j,k}^{(n+1)} &= \frac{1}{3} Q_{i,j,k}^{(n)} + \frac{2}{4} [Q_{i,j,k}^{(2)} + \Delta t L(Q_{i,j,k}^{(2)})]. \end{aligned}$$

Решение системы разностных уравнений осуществляется многосеточным методом, основанным на схеме полной аппроксимации (в расчетах используется 4 уровня сетки и V-цикл). Для распараллеливания вычислительного процесса применяется библиотека межпроцессорного взаимодействия MPI (Message Passing Interface).

3. НИЗКОРЕЙНОЛЬДСОВЫЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Уравнения Рейнольдса в совокупности с k - ε моделью турбулентности записываются в виде обобщенного уравнения переноса для переменной $\Phi = \rho, v_i, T, k, \varepsilon$, а именно:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i \Phi) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + S_\Phi. \quad (3)$$

Выражения для коэффициента переноса Γ_Φ и источникового члена S_Φ в уравнении (3) приведены в таблице. Турбулентная вязкость вычисляется по формуле Колмогорова — Прандтля

$$\mu_t = c_\mu f_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

Член производства турбулентности имеет вид

$$P_k = \left[\mu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Постоянные модели связаны соотношением

$$\frac{\sigma_\varepsilon (c_{\varepsilon 2} - c_{\varepsilon 1})}{\kappa^2} c_\mu^{1/2} = 1,$$

где κ — постоянная Кармана ($\kappa = 0,42$).

В низкорейнольдсовых версиях k - ε модели турбулентности в формулу для расчета турбулентной вязкости вводится демпфирующая функция f_μ , а в уравнениях для кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации используются модифицированные диссипативные члены $E_k = \rho \varepsilon + D_k$ и E_ε , а также демпфирующие функции $f_{\varepsilon 1}$ и $f_{\varepsilon 2}$, зависящие от локальных чисел Рейнольдса

$$\text{Re}_t = \frac{\rho k^2}{\mu \varepsilon}, \quad \text{Re}_y = \frac{\rho k^{1/2} y}{\mu},$$

где y — расстояние до стенки.

Выражения для коэффициентов переноса и источниковых членов

Φ	Γ_Φ	S_Φ
1	0	0
v_i	$\mu + \mu_t$	$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right]$
T	$\frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t}$	0
k	$\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}$	$P_k - E_k$
ε	$\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}$	$\frac{\varepsilon}{k} (c_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 1} P_k - c_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2} E_k) + E_\varepsilon$

Функция f_μ служит ограничителем турбулентной вязкости. Функции f_{ε_1} и f_{ε_2} учитывают в пристеночной области увеличение члена, описывающего порождение скорости диссипации, а также обеспечивают ограниченность производной от диссипативной функции на стенке.

Использование модифицированных диссипативных членов диктуется тем, что скорость диссипации принимает ненулевое значение на стенке, в то время как энергия пульсаций на ней равняется нулю, поэтому в стандартной модели $\varepsilon^2/k \rightarrow \infty$. В частности, в моделях [5 – 7] вблизи стенки диссипативный член представляется в виде

$$E_k = \rho\varepsilon - 2\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sqrt{k} \right)^2.$$

Из уравнения переноса кинетической энергии турбулентности для вязкого подслоя следует, что

$$\mu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2} = E_k + 2\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sqrt{k} \right)^2.$$

При $k \rightarrow 0$ получим, что на стенке $E_k = 0$. Модификация источниковых членов устраняет сингулярность в уравнениях модели турбулентности.

Различные низкорейнольдсовые модели турбулентности [5 – 24] отличаются видом демпфирующих функций, вводимых в уравнения для кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации, выражениями для модифицированных источниковых членов, значениями постоянных, а также граничными условиями.

Исходные уравнения k – ε модели турбулентности получены для несжимаемой жидкости и с успехом используются в той же самой форме при расчете сжимаемых течений (о чем свидетельствуют многочисленные расчеты, включая химически реагирующие течения). Тем не менее, вопрос о степени влияния сжимаемости течений на результаты расчетов представляется достаточно важным (во многих работах этот вопрос не поднимается — уравнения модели турбулентности используются в несжимаемой форме по умолчанию).

Имеются различные способы учета сжимаемости в уравнениях k – ε модели. Один из них состоит во введении дополнительного источникового члена в уравнение для кинетической энергии турбулентности и использовании модифицированной формы записи диссипативной функции [29 – 31]. При этом член генерации турбулентности P_k вычисляется с учетом сжимаемости (в него подставляются выражения для компонентов тензора вязких напряжений и напряжений Рейнольдса в сжимаемом течении без учета свойства соленоидальности вектора скорости, которое выполняется только для несжимаемой жидкости).

Дополнительный источниковый член в уравнении для кинетической энергии турбулентности представляется в виде

$$S_c = -2\rho\varepsilon M_t^2,$$

где M_t — турбулентное число Маха

$$M_t = \left(\frac{k}{c^2} \right)^{1/2}.$$

Под c понимается скорость звука, $c = (\gamma RT)^{1/2}$.

Диссипативная функция расщепляется на соленоидальную и учитывающую сжимаемость составляющие $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ [30]. Составляющая ε_1 удовлетворяет уравнению, записанному в виде (3), другая — оценивается из соотношения $\varepsilon_2 \sim 0,3\varepsilon M_t^4$ [31].

Проведенные оценки показали, что учет вклада члена S_c и поправки к диссипативной функции не приводят к искажению результатов численного моделирования, выполненного на основе стандартных уравнений $k-\varepsilon$ модели, и ими можно пренебречь (турбулентное число Маха не превышает 0,2). Такой вывод согласуется с данными [29 – 31]. Учет указанных поправок важен, по-видимому, при расчете сверхзвуковых потоков.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Параметрам потока во входном сечении канала присваивались следующие значения: $\rho_0 = 1,18 \text{ кг/м}^3$, $u_0 = 180,0 \text{ м/с}$, $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Температура стенки принималась равной $T_w = 288 \text{ К}$. Полагается, что $\gamma = 1,4$, $R = 287,1 \text{ Дж/(кг·К)}$, $c_p = 1004,85 \text{ Дж/(кг·К)}$, $\mu = 0,00039 \text{ Па·с}$, $\text{Pr} = 0,72$. Полуширина канала принимается равной $h = 0,01 \text{ м}$.

Характерным параметром задачи является число Рейнольдса, вычисленное по полуширине канала и параметрам потока во входном сечении $\text{Re} = \rho_0 u_0 h / \mu_0$ или по динамической скорости $\text{Re}_\tau = \rho_0 u_\tau h / \mu_0$, где $u_\tau = (\tau_w / \rho_0)^{1/2}$, τ_w — напряжение трения на стенке. При выбранных параметрах $\text{Re} = 5450$ и $\text{Re}_\tau = 360$ (заданные начальные параметры соответствуют величине $u_\tau = 11,84 \text{ м/с}$).

Расчеты проводились на сетке $210 \times 130 \times 130$ со сгущением узлов к стенкам канала и его начальному сечению. Максимальные шаги по координатным направлениям составляли $\Delta x_{\max} = 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ и $\Delta y_{\max} = \Delta z_{\max} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, а их минимальные значения вблизи стенки канала — $\Delta y_{\min} = \Delta z_{\min} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ($\Delta y_{\max} / \Delta y_{\min} = \Delta z_{\max} / \Delta z_{\min} = 1600$).

Размеры наиболее мелких масштабов турбулентного движения соответствуют колмогоровскому масштабу длины $l_k = (v^3 / \varepsilon)^{1/4}$. Для заданных входных данных $l_k = (2h v^3 / u_\tau^3)^{1/4} = 1,4 \cdot 10^{-5}$. Интересно отметить, что в работе [32] шаг сетки принимается равным $15l_k$.

Шаг по времени выбирался равным $\Delta t = 0,000018 \text{ с}$. Для получения статистически достоверной осредненной картины течения делалось 50000 шагов по времени.

Для визуализации мгновенной картины течения использовался модуль вихря скорости

$$\Omega = |\nabla \times \mathbf{v}| = (\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2)^{1/2},$$

где Ω_x , Ω_y , Ω_z — составляющие вихря в координатных направлениях x , y и z соответственно. Картина течения в канале, обработанная в виде линий равных значений вихря скорости, показана на рис. 1.

Распределение кинетической энергии турбулентных пульсаций по частотам (частотный спектр) иллюстрируется рис. 2. Прямая линия соответствует закону Колмогорова — Обухова [26].

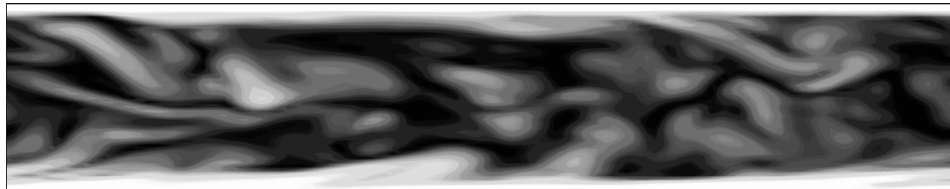


Рис. 1. Вихревая картина течения в канале при $t = 0,85 \text{ с}$.

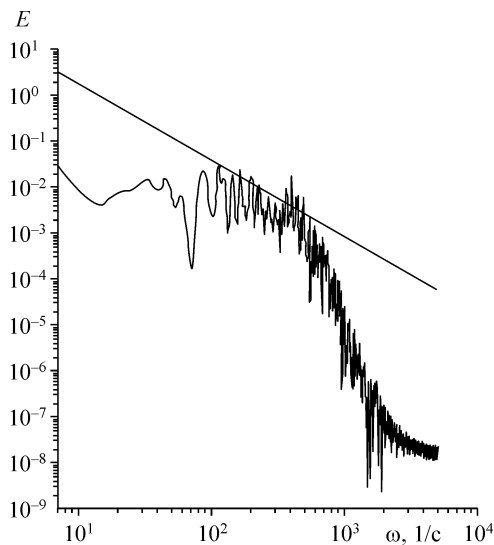


Рис. 2. Спектральная плотность кинетической энергии турбулентности.

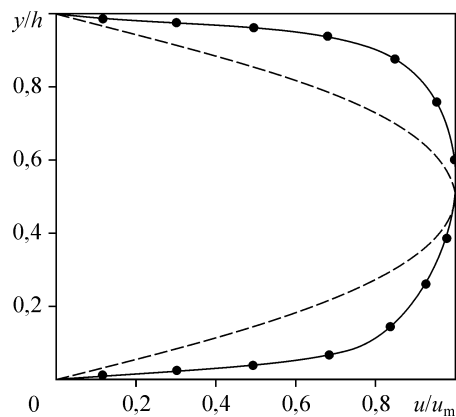


Рис. 3. Профиль продольной составляющей скорости в поперечном сечении канала. Результаты прямого численного моделирования (сплошная линия), расчетов [26] (●). Пунктирная линия — профиль скорости ламинарного течения.

Профиль продольной составляющей скорости в поперечном сечении канала приведен на рис. 3 (результаты расчетов нормированы на максимальную скорость в поперечном сечении u_m и полуширину канала h). Распределение скорости около стенки достаточно хорошо согласуется с законом Рейхардта [26], построенным на основе экспериментальных данных и охватывающим вязкий подслой, буферную и логарифмическую области пограничного слоя (рис. 4). Распределение турбулентной вязкости в пристеночной области показано на рис. 5 в сравнении с расчетными данными [26] при $Re_\tau = 390$.

Результаты прямого численного моделирования и данные, полученные на основе различных низкорейнольдсовых моделей турбулентности, сравниваются на рис. 6 – 11. С данными прямого численного моделирования согласуется поведение демпфирующей функции f_μ в моделях [11, 14, 15] (рис. 7) и в модели [19] (рис. 8),

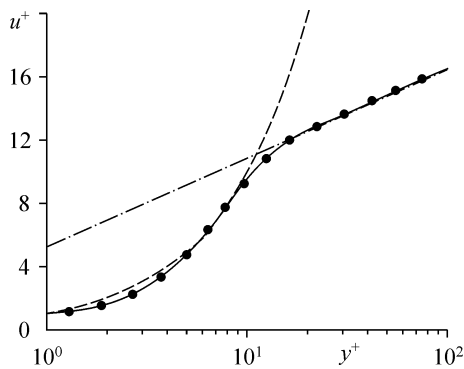


Рис. 4. Распределение скорости в пограничном слое (сплошная линия) по закону Рейхардта (●) [26], соответствует линейному распределению скорости в вязком подслое и логарифмическому распределению в турбулентной области пограничного слоя (пунктирная и штрихпунктирная линии).

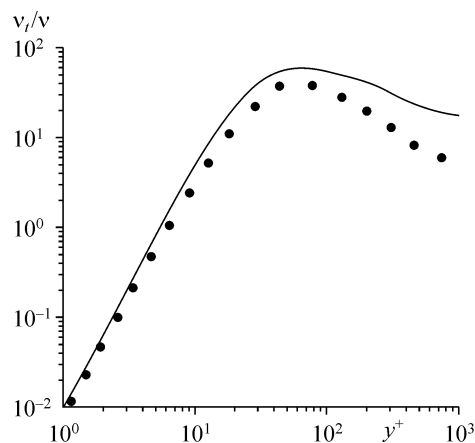


Рис. 5. Распределение турбулентной вязкости около стенки. Результаты расчетов (сплошная линия), данные [26] (●).

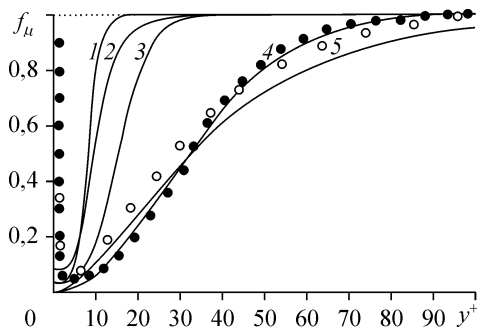


Рис. 6. Сравнение низкорейнольдсовых моделей турбулентности с данными прямого численного моделирования (●).
 Модели из работ [7] (1), [5, 6, 9, 10, 12] (2), [8] (3), [16] (4), [13] (5). Расчетные данные [33] (○).

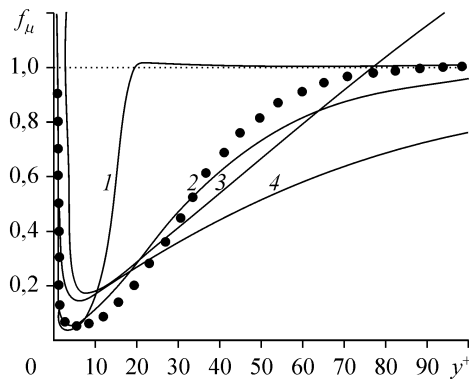


Рис. 7. Сравнение низкорейнольдсовых моделей турбулентности с данными прямого численного моделирования (●).
 Модели из работ [17] (1), [15] (2), [11] (3), [14] (4).

а демпфирующих функций $f_{\varepsilon 1}$ и $f_{\varepsilon 2}$ — в модели [17]. Вблизи стенки указанные модели турбулентности предсказывают корректное поведение турбулентной вязкости $\nu_t \sim y^{+3}$ и ограниченность диссипативной функции $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_w$ при $y^+ \rightarrow 0$ [31]. В то же время модели [13–15] имеют особенность при $y^+ = 0$, предсказывая нереалистичный минимум теплового потока вблизи точки присоединения потока [34, 35]. Следует также отметить, что вид функций $f_{\varepsilon 1}$ и $f_{\varepsilon 2}$ оказывается менее критичным по отношению к результатам численного моделирования, чем представление демпфирующей функции для турбулентной вязкости [2, 34, 35]. Поведение функции f_μ согласуется с расчетными данными [33] в вязком подслое при $y^+ < 10$ (рис. 6), но при больших значениях y^+ наблюдается заметное расхождение.

В соответствии с поведением демпфирующей функции f_μ модели [5–10, 12] дают завышенный уровень кинетической энергии турбулентности вблизи стенки. С другой стороны, модели [14, 15] приводят к заниженным значениям турбулентной вязкости в пристеночной области.

Модифицированный диссипативный член E_k обычно используется во всей вычислительной области без каких-либо ограничений. Однако как показывают расчеты, величина слагаемого D_k является значимой только в пристеночной области

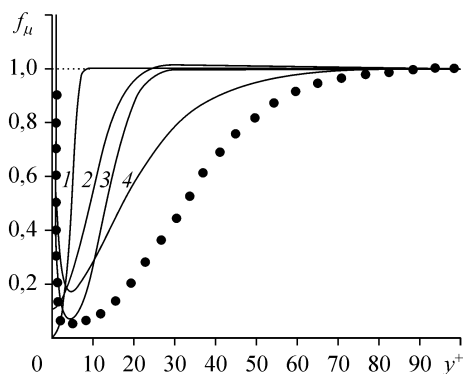


Рис. 8. Сравнение низкорейнольдсовых моделей турбулентности с данными прямого численного моделирования (●).
 Модели из работ [18] (1), [22] (2), [21] (3), [19] (4).

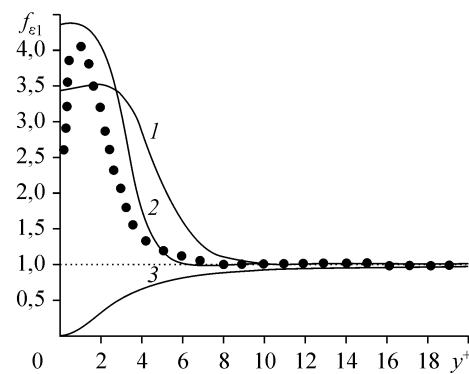


Рис. 9. Сравнение низкорейнольдсовых моделей турбулентности с данными прямого численного моделирования (●).
 Модели из работ [8] (1), [12] (2), [17] (3).

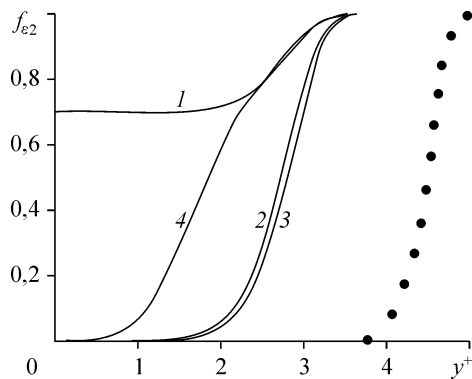


Рис. 10. Сравнение низкорейнольдсовых моделей турбулентности с данными прямого численного моделирования (•). Модели из работ [5, 6, 7, 13] (1), [8] (2), [9, 10] (3).

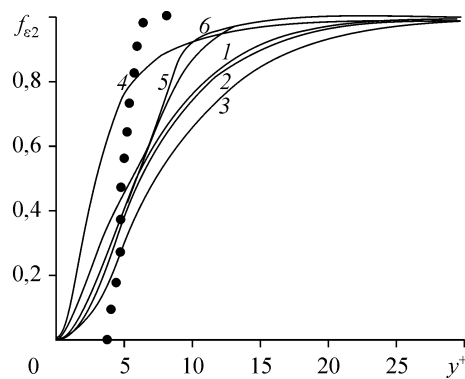


Рис. 11. Сравнение низкорейнольдсовых моделей турбулентности с данными прямого численного моделирования (•). Модели из работ [11] (1), [14] (2), [15] (3), [17] (4), [19, 20] (5), [21] (6).

(при $0 \leq y^+ \leq 10$), в которой $\partial\sqrt{k}/\partial y \geq 0$. Слагаемое E_k становится практически идентичным диссипативной функции при $y^+ > 15$, поэтому модификацию источникового члена в уравнении для диссипативной функции следует учитывать только до тех пор, пока $\partial\sqrt{k}/\partial y \geq 0$, в противном случае можно положить $D_k = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено сравнение результатов прямого численного моделирования с выражениями для демпфирующих функций и источниковых членов, постулируемыми в низкорейнольдсовых версиях $k-\epsilon$ модели турбулентности. На основе сравнительного анализа указаны модели, имеющие удовлетворительное согласование с результатами прямого численного моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений. — СПб.: Изд-во БГТУ, 2001. — 108 с.
2. Patel V.C., Rodi W., Scheuerer G. Turbulence models for near-wall and low-Reynolds number flows: a review // AIAA J. — 1985. — Vol. 23. — P. 1308–1318.
3. Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows // Computat. Methods in Appl. Mech. Engng. — 1974. — Vol. 3. — P. 269–289.
4. Haase W., Chaupt E., Elsholz E., Leschziner M.A., Muller U.R. ECARP — European computational aerodynamics research project: validation of CFD codes and assessment of turbulence models // Notes on Numer. Fluid Mech. — 1997. — Vol. 58. — P. 1–51.
5. Jones W.P., Launder B.E. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence // Int. J. of Heat and Mass Transfer. — 1972. — Vol. 15. — P. 301–314.
6. Jones W.P., Launder B.E. The calculation of low-Reynolds number phenomena with a two-equation model of turbulence // Int. J. of Heat and Mass Transfer. — 1973. — Vol. 16. — P. 1119–1130.
7. Launder B.E., Sharma B.I. Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disk // Letters in Heat and Mass Transfer. — 1974. — Vol. 1. — P. 131–138.
8. Lam C.K.G., Bremhorst K. A modified form of the $k-\epsilon$ model for predicting wall turbulence // J. of Fluids Engng. — 1981. — Vol. 103. — P. 456–460.
9. To W.M., Humphrey J.A.C. Numerical simulation of buoyant turbulent flow. I. Free convection along a heated, vertical, flat plate // Int. J. of Heat and Mass Transfer. — 1986. — Vol. 29. — P. 573–592.
10. Humphrey J.A.C., To W.M. Numerical simulation of buoyant, turbulent flow. II. Free and mixed convection in a heated cavity // Int. J. of Heat and Mass Transfer. — 1986. — Vol. 29. — P. 593–610.
11. Speziale C.G., Abid R., Anderson E.C. A critical evaluation of two-equations models for near wall turbulence // ICASE Report. — 1990. — No. 90–46.

12. Davidson L. Calculation of the turbulent buoyancy-driven flow in a rectangular cavity using an efficient solver and two different low Reynolds number $k-\varepsilon$ turbulence models // Numer. Heat Transfer. A. — 1990. — Vol. 18. — P. 129–147.
13. Nagano Y., Hishida M. Improved form of the $k-\varepsilon$ model for wall turbulent shear flows // J. of Fluids Engng. — 1987. — Vol. 109. — P. 156–160.
14. Myong H.K., Kasagi N. A new approach to the improvement of $k-\varepsilon$ turbulence model for wall-bounded shear flows // JSME Int. J. Ser. II. — 1990. — Vol. 33. — P. 63–72.
15. Nagano Y., Tagawa M. An improved $k-\varepsilon$ model for boundary layer flows // J. of Fluids Engng. — 1990. — Vol. 112. — P. 33–39.
16. Rodi W. On the simulation of turbulent flow past bluff bodies // J. of Wind Engng and Industr. Aerodynam. — 1993. — Vol. 46–47. — P. 3–19.
17. Yang Z., Shih T.H. A Galilean and tensorial invariant $k-\varepsilon$ model for near wall turbulence // NASA Report. — 1993. — No. TM-106263.
18. Goldberg U., Apsley D. A wall-distance-free low-Re $k-\varepsilon$ turbulence model // Computat. Methods in Appl. Mech. Engng. — 1997. — Vol. 145. — P. 227–238.
19. Abe K., Kondoh T., Nagano Y. A new turbulence model for predicting fluid flow and heat transfer in separating and reattaching flows. I. Flow field calculations // Int. J. of Heat Mass Transfer. — 1994. — Vol. 37. — No. 1. — P. 139–151.
20. Abe K., Kondoh T., Nagano T. A new turbulence model for predicting fluid flow and heat transfer in separating and reattaching flows. II. Thermal field calculations // Int. J. of Heat and Mass Transfer. — 1995. — Vol. 37. — P. 1467–1481.
21. Chang K.C., Hsieh W.D., Chen C.S. A modified low-Reynolds-number turbulence model applicable to recirculating flow in pipe expansion // J. of Fluids Engng. — 1995. — Vol. 117. — P. 417–423.
22. Lien F.S., Leschziner M.A. Computational modelling of a transitional 3D turbine-cascade flow using a modified low-Re $k-\varepsilon$ model and a multi-block scheme // Int. J. of Computat. Fluid Dynamics. — 1999. — Vol. 12. — P. 1–15.
23. Chien K.Y. Predictions of channel and boundary-layer flows with a low-Reynolds number turbulence model // AIAA J. — 1982. — Vol. 20. — P. 33–38.
24. Chieng C.C., Launder B.E. On the calculation of turbulent heat transport down-stream from an abrupt pipe expansion // Numer. Heat Transfer. — 1980. — Vol. 3. — P. 189–207.
25. Rodi W. Experience with two-layer models combining the $k-\varepsilon$ model with one-equation model near wall // AIAA Paper. — 1991. — No. 91-0216. — 16 p.
26. Moin P., Mahesh K. Direct numerical simulation. A tool in turbulence research // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1998. — Vol. 30. — P. 539–578.
27. Chakravarthy S.R., Osher S. A new class of high-accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws // AIAA Paper. — 1985. — No. 85-0363. — 11 p.
28. Osher S. Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximation // SIAM J. of Numer. Analysis. — 1984. — Vol. 21. — No. 2. — P. 217–235.
29. Wilcox D.C. Dilatation-dissipation corrections for advanced turbulence models // AIAA J. — 1992. — Vol. 30. — P. 2639–2646.
30. Guezengar D., Francescatto J., Guillard H., Dussauge J.-P. Variations on a $k-\varepsilon$ turbulence model for supersonic boundary layer computations // Europ. J. of Mechanics. B/Fluids. — 1999. — Vol. 18. — P. 713–738.
31. Chapman D.R., Kuhn G.D. The limiting behavior of turbulence near a wall // J. of Fluid Mechanics. — 1986. — Vol. 170. — P. 265–292.
32. Piomelli U. Large-eddy and direct simulation of turbulent flows // Invited short course delivered at the 9th Annual Conference of the CFD Society of Canada (Kitchener, May 2001). — 2001. — 70 p.
33. Bredberg J. On the wall boundary condition for turbulence model // Report of Chalmers University of Technology. — 2000. — No. 4. — 21 p.
34. Hwang C.B., Lin C.A. Improved low-Reynolds-number $k-\varepsilon$ model based on direct numerical simulation data // AIAA Journal. — 1998. — Vol. 36. — No. 1. — P. 38–43.
35. Nagano Y., Shimada M. Development of a two-equation heat transfer model based on direct simulations of turbulent flows with different Prandtl numbers // Physics of Fluids. — 1996. — Vol. 8. — No. 12. — P. 3379–3402.

Статья поступила в редакцию 18 января 2005 г.

Коэффициенты и граничные условия для различных версий низкорейнольдсовых моделей турбулентности

МОДЕЛЬ	σ_k	σ_ε	$c_{\varepsilon 1}$	$c_{\varepsilon 2}$	k	ε
[5, 6]	1,0	1,3	1,44	1,92	0	0
[7]	1,0	1,3	1,44	1,92	0	0
[8]	1,0	1,3	1,44	1,92	0	$\mu(\partial^2 k / \partial y^2)_w = 0$
[9, 10]	1,0	1,3	1,44	1,92	0	$2\mu(\partial\sqrt{k} / \partial y)^2$
[11]	1,36	1,36	1,42	1,83	0	$4\mu k_p / y_p^2$
[12]	1,0	1,3	1,44	1,92	0	$(\partial E_k / \partial y)_w = 0$
[13]	1,4	1,3	1,45	1,90	0	0
[14]	1,4	1,3	1,44	1,80	$k_w = (\partial k / \partial y)_w = 0$	$\mu(\partial^2 k / \partial y^2)_w$
[15]	1,4	1,3	1,45	1,90	$k_w = (\partial k / \partial y)_w = 0$	$\mu(\partial^2 k / \partial y^2)_w$
[16]	1,0	1,3	1,44	1,92	0	0
[17]	1,0	1,3	1,44	1,92	0	$(\partial E_k / \partial y)_w = 0$
[18]	1,0	1,3	1,44	1,92	0	0
[19, 20]	1,0	1,3	1,44	1,92	$k_w = (\partial k / \partial y)_w = 0$	$\mu(\partial^2 k / \partial y^2)_w = 0$
[21]	1,0	1,3	1,44	1,92	$k_w = (\partial k / \partial y)_w = 0$	$\mu(\partial^2 k / \partial y^2)_w = 0$
[22]	1,0	1,3	1,44	1,92	0	$(\partial E_k / \partial y)_w = 0$
[23]	1,0	1,3	1,44	1,92	0	0
[24]	1,0	1,3	1,44	1,92	$(\partial k / \partial y)_w = 0$	$2\mu k_p / y_p^2$

Модель из работ [5, 6]

$$f_\mu = \exp\left(\frac{-2,5}{1 + \text{Re}_t / 50}\right), \quad f_{\varepsilon 1} = 1,$$

$$f_{\varepsilon 2} = 1 - 0,3 \exp(-\text{Re}_t^2), \quad D_k = -2\mu \left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_i}\right)^2, \quad E_\varepsilon = 2\mu\mu_t \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2.$$

Модель из работы [7]

$$f_\mu = \exp\left(\frac{-3,4}{(1 + \text{Re}_t / 50)^2}\right), \quad f_{\varepsilon 1} = 1, \quad f_{\varepsilon 2} = 1 - 0,3 \exp(-\text{Re}_t^2),$$

$$D_k = -2\mu \left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_i}\right)^2, \quad E_\varepsilon = 2\mu\mu_t \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2.$$

Модель из работы [8]

$$f_\mu = \left[1 - \exp(-0,0165 \text{Re}_y)\right]^2 \left[1 + \frac{20,5}{\text{Re}_t}\right], \quad f_{\varepsilon 1} = 1 + \left(\frac{0,05}{f_\mu}\right)^3,$$

$$f_{\varepsilon 2} = 1 - \exp(-\text{Re}_t^2), \quad D_k = 0, \quad E_\varepsilon = 0.$$

Модель из работ [9, 10]

$$f_\mu = \exp\left(\frac{-2,5}{1 + \text{Re}_t / 50}\right), \quad f_{\varepsilon 1} = 1, \quad f_{\varepsilon 2} = [1 - 0,3 \exp(-\text{Re}_t^2)][1 - \exp(-\text{Re}_t^2)],$$

$$D_k = 0, \quad E_\varepsilon = 0.$$

Множитель $1 - \exp(-\text{Re}_t^2)$ в функции $f_{\varepsilon 2}$ применяется при $y^+ \leq 5$.

Модель из работы [11]

$$f_\mu = \exp\left(1 + \frac{3,45}{\sqrt{\text{Re}_t}}\right) \text{th}\left(\frac{y^+}{70}\right), \quad f_{\varepsilon 1} = 1,$$

$$f_{\varepsilon 2} = \left\{1 - \frac{2}{9} \exp\left[-\left(\frac{\text{Re}_t}{6}\right)^2\right]\right\} \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{4,9}\right)\right]^2, \quad D_k = 0, \quad E_\varepsilon = 0.$$

Модель из работы [12]

$$f_\mu = \exp\left(\frac{-3,4}{(1 + \text{Re}_t/50)^2}\right), \quad f_{\varepsilon 1} = 1 + \left(\frac{0,05}{f_\mu}\right)^3,$$

$$f_{\varepsilon 2} = [1 - 0,27 \exp(-\text{Re}_t^2)] [1 - \exp(-\text{Re}_t^2)], \quad D_k = 0, \quad E_\varepsilon = 0.$$

Модель из работы [13]

$$f_\mu = \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{26,5}\right)\right]^2, \quad f_{\varepsilon 1} = 1, \quad f_{\varepsilon 2} = 1 - 0,3 \exp(-\text{Re}_t^2),$$

$$D_k = -2\mu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_i}\right)^2, \quad E_\varepsilon = \mu \mu_t (1 - f_\mu) \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2.$$

Модель из работы [14]

$$f_\mu = \left[1 - \exp\left(\frac{y^+}{70}\right)\right] \left(1 + \frac{3,45}{\sqrt{\text{Re}_t}}\right), \quad f_{\varepsilon 1} = 1,$$

$$f_{\varepsilon 2} = \left\{1 - \frac{2}{9} \exp\left[-\left(\frac{\text{Re}_t}{6}\right)^2\right]\right\} \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{5}\right)\right]^2, \quad D_k = 0, \quad E_\varepsilon = 0.$$

Модель из работы [15]

$$f_\mu = \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{26}\right)\right]^2 \left(1 + \frac{4,1}{\text{Re}_t^{3/4}}\right), \quad f_{\varepsilon 1} = 1,$$

$$f_{\varepsilon 2} = \left\{1 - 0,3 \exp\left[-\left(\frac{\text{Re}_t}{6,5}\right)^2\right]\right\} \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{6}\right)\right]^2, \quad D_k = 0, \quad E_\varepsilon = 0.$$

Модель из работы [16]

$$f_\mu = 1 - \exp(-0,0002y^+ - 0,00065y^{+2}), \quad f_{\varepsilon 1} = 1, \quad f_{\varepsilon 2} = 1, \quad D_k = 0, \quad E_\varepsilon = 0.$$

Модель из работы [17]

$$f_\mu = \left(1 + \frac{c_k}{\sqrt{\text{Re}_t}}\right) \left[1 - \exp(-1,5 \cdot 10^{-4} \text{Re}_y - 5,0 \cdot 10^{-7} \text{Re}_y^3 - 1,0 \cdot 10^{-10} \text{Re}_y^5)\right]^{1/2},$$

$$f_{\varepsilon 1} = \left(1 + \frac{c_k}{\sqrt{\text{Re}_t}}\right)^{-1}, \quad f_{\varepsilon 2} = \left(1 + \frac{c_k}{\sqrt{\text{Re}_t}}\right)^{-1}, \quad D_k = 0, \quad E_\varepsilon = 0.$$

Модель из работы [18]

$$f_\mu = \frac{1 - \exp(-A_\mu \text{Re}_t)}{1 - \exp(-\sqrt{\text{Re}_t})} \max\{1, \text{Re}_t^{-1/2}\}, \quad f_{\varepsilon 1} = 1, \quad f_{\varepsilon 2} = 1, \quad D_k = 0, \quad E_\varepsilon = 0.$$

Модель из работ [19, 20]

$$f_{\mu} = \left[1 - \exp\left(-\frac{\text{Re}_t}{14}\right) \right]^2 \left\{ 1 + \frac{5}{\text{Re}_t^{3/4}} \exp\left[-\left(\frac{\text{Re}_t}{200}\right)^2\right] \right\}, \quad f_{\varepsilon 1} = 1,$$

$$f_{\varepsilon 2} = \left[1 - \exp\left(-\frac{\text{Re}_t}{3.1}\right) \right]^2 \left\{ 1 - 0.3 \exp\left[-\left(\frac{\text{Re}_t}{65}\right)^2\right] \right\}, \quad D_k = 0, \quad E_{\varepsilon} = 0.$$

Модель из работы [21]

$$f_{\mu} = \left[1 - \exp(-0.0215 \text{Re}_y) \right]^2 \left(1 + \frac{31.66}{\text{Re}_t^{5/4}} \right), \quad f_{\varepsilon 1} = 1,$$

$$f_{\varepsilon 2} = \left[1 - 0.01 \exp(-\text{Re}_t^2) \right] \left[1 - \exp(-0.0631 \text{Re}_y) \right], \quad D_k = 0, \quad E_{\varepsilon} = 0.$$

Модель из работы [22]

$$f_{\mu} = \left[1 - \exp(-0.0198 \text{Re}_y) \right] \left(1 + \frac{5.29}{\text{Re}_y} \right), \quad f_{\varepsilon 1} = 1, \quad f_{\varepsilon 2} = 1, \quad D_k = 0, \quad E_{\varepsilon} = 0.$$

Модель из работы [23]

$$f_{\mu} = 1, \quad f_{\varepsilon 1} = 1, \quad f_{\varepsilon 2} = 1, \quad D_k = 2\mu \frac{k}{y_n^2}, \quad E_{\varepsilon} = 2\mu \frac{\varepsilon}{y_n} \exp\left(-\frac{y^+}{2}\right).$$