Теплофизика и аэромеханика, 2023, том 30, № 4

УДК 532.72

Влияние бародиффузии на динамику роста газового пузырька в магматическом расплаве*

А.А. Чернов[1,2], М.Н. Давыдов[1,3], С.И. Лежнин[1,2]

[1]*Новосибирский государственный университет*

[2]*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

[3]*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

E-mail: chernov@itp.nsc.ru

В работе исследуется влияние эффекта бародиффузии на динамику роста газового пузырька в высоковязком газонасыщенном магматическом расплаве, подвергшемся быстрой декомпрессии. Предложена математическая модель процесса, представляющая собой совместные динамическую и диффузионную задачи. Показано, что по мере роста пузырька вокруг него формируется диффузионный пограничный слой, ведущий к появлению в расплаве большого градиента вязкости и, как следствие, большого градиента давления. Найдено полуаналитическое решение задачи, основанное на существовании квазистационарного состояния для процесса роста пузырька. Показано, что эффект бародиффузии существенен на начальной и переходной стадиях процесса. Со временем его влияние убывает и на диффузионной стадии полностью исчезает.

Ключевые слова: газовый пузырек, магматический расплав, декомпрессия, бародиффузия, краевая задача с подвижной границей, численное моделирование.

Введение

Уже несколько десятилетий большое внимание исследователей привлекает проблема вулканических извержений. Прежде всего это связано с необходимостью прогноза и определения степени потенциальной опасности действующих вулканов. Очевидно, что в силу отсутствия прямых методов наблюдения за процессами, происходящими в земной коре, даже непрерывное наблюдение за активным вулканом не может дать достаточно полной информации о том, что происходит в канале вулкана при извержении. Кроме того, современными методами диагностики начало самого извержения может быть предсказано только по косвенным признакам. С уверенностью можно судить лишь о происходящих в магме фазовых переходах по конечным образцам затвердевшей магмы и о характере разрушения изначально сплошного магматического потока по структуре выброса. Поэтому последовательное и как можно более строгое построение математических

---

* Работа поддержана Российским научным фондом (проект No 22-19-00092).

моделей течения магмы в канале вулкана, а также исследование динамики различных режимов вулканических извержений методами механики многофазных сред с целью понимания механизмов, определяющих тип и характер извержения и интерпретации данных полевых наблюдений, представляется особенно актуальным.

В теоретических и экспериментальных постановках моделирования вулканических извержений прежде всего следует обратить внимание на следующие аспекты: особенность формирования трехфазного состояния магмы при ее декомпрессии; эволюцию структуры магмы при ее подъеме по каналу вулкана; динамику разрушения вспененной и частично закристаллизованной магмы — процесс фрагментации с образованием газовзвеси и магматических «бомб»; влияние реологии магмы на структуру потока и динамику извержения в целом. Отметим, что все эти задачи чрезвычайно сложны как для экспериментального, так и для теоретического исследования и каждая из них представляет отдельную проблему.

На сегодняшний день существует множество работ, посвященных экспериментальному и математическому моделированию вулканических извержений в общей постановке, а также сопровождающих это явление отдельных процессов. Ключевым из них здесь является процесс кавитации магмы при ее декомпрессии, во многом предопределяющий структуру формирующегося двухфазного потока [1]. Отметим, что исследование кавитационных процессов в жидкостях имеет уже более чем столетнюю историю и данному явлению посвящено большое количество работ. Достаточно полное описание моделей роста паровых и газовых пузырьков в различного рода метастабильных системах можно найти в классической монографии [2]. Несмотря на то, что вопросы, посвященные кавитации обычных жидкостей, достаточно хорошо изучены, процесс кавитации магматических расплавов все же имеет свою специфику. Это главным образом связано с уникальными физико-химическими свойствами магм. Среди них прежде всего следует отметить их высокую вязкость, которая в процессе дегазации может меняться на порядки, что накладывает определенные ограничения на применимость тех или иных, как правило, равновесных моделей. В частности, из-за высокой вязкости магмы время релаксации давления в пузырьке может при определенных условиях составлять сотни секунд, а следовательно, при описании динамики роста пузырька должны быть учтены инерционные эффекты.

Отметим некоторые работы, в которых, как считают авторы, были получены значимые результаты при описании динамики роста газовых пузырьков в магматических расплавах [3 – 6]. Все они в той или иной степени посвящены численному моделированию. Теоретическое моделирование нуклеации и роста одиночного пузырька, а также ансамбля пузырьков в широком диапазоне пересыщений как в случае мгновенной декомпрессии, так и в случае декомпрессии с конечной скоростью было представлено в работах [1, 7, 8]. Однако несмотря на то, что данной проблеме в литературе уделено достаточное внимание, один эффект, который может оказывать существенное влияние на общую картину всего процесса, до сих пор не учитывался. Он связан с наличием бародиффузии, обусловленной формированием в расплаве в процессе роста пузырька большого градиента давления. Исследованию этого эффекта посвящена настоящая работа.

1. Основные уравнения

Рассмотрим объем газонасыщенного магматического расплава, который в начальный момент времени подвергся быстрой декомпрессии, при этом конечное давление будем считать фиксированным. Для определенности положим, что скорость декомпрессии настолько велика, что ее можно считать мгновенной, хотя полученное ниже решение без труда может быть обобщено и на случай декомпрессии с конечной скоростью, как это было сделано в одной из недавних работ авторов [8].

Пусть в объеме расплава в результате декомпрессии образуется и начинает расти газовый пузырек. Как было показано в работе [7], процесс роста пузырька можно условно разделить на три стадии: динамическую инерционную, когда давление газа в пузырьке практически равно начальному, а зависимость радиуса пузырька от времени имеет экспоненциальный характер; переходную, характеризующуюся выравниванием давления в пузырьке с давлением окружающей жидкости, что приводит к диффузионным процессам в жидкости и, как следствие, к увеличению массы газа в пузырьке; асимптотическую диффузионную, когда давление в пузырьке практически равно давлению окружающей жидкости, а рост пузырька происходит исключительно в результате диффузии.

Рост газового пузырька в магматическом расплаве имеет свою специфику. Это в первую очередь связано с уникальными физико-химическими свойствами магм. Здесь следует отметить большую массовую долю (до 7 %) растворенных в магме летучих компонент (преимущественно воды), а также сильную зависимостью вязкости магмы от этой доли. Эту зависимость зачастую аппроксимируют зависимостью аррениусовского типа, имеющую вид [5]:

$$\eta(C) = \eta^* \exp\left\{E_\eta^* \left(1 - k_\eta C\right) \Big/ (R_g T)\right\}, \tag{1}$$

где η — динамическая вязкость магматического расплава, C — массовая доля растворенного в расплаве газа, T — температура, R_g — универсальная газовая постоянная, η^*, E_η^* и k_η — эмпирические постоянные. Отметим, что при дегазации магматического расплава его вязкость может увеличиваться на порядки. Это объясняет то, что переходная стадия роста пузырька в магме (в отличие от обычных жидкостей) может длиться достаточно долго: сотни и даже тысячи секунд. Еще один эффект, который может повлиять на динамику роста пузырька — это эффект бародиффузии. Он обусловлен тем, что формирующийся вокруг пузырька в процессе его роста диффузионный пограничный слой влечет за собой формирование в жидкости большого градиента давления. Рассмотрим данный вопрос подробнее.

Будем считать жидкость несжимаемой, тогда для описания динамики роста пузырька уравнение Навье – Стокса, отражающее сферическую симметрию задачи, примет вид:

$$\rho_1 \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p_1}{\partial r} + \eta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{2 v_r}{r^2} \right) + 2 \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial r}, \tag{2}$$

где t — время, r — радиальная координата с началом в центре пузырька, v_r — радиальная скорость жидкости (движение жидкости, очевидно, обусловлено ростом пузырька), p — давление, ρ — плотность, η — динамическая вязкость жидкости. Здесь и далее индексы l и g обозначают жидкую и газовую фазы соответственно.

Зависимость скорости жидкости v_r от радиальной координаты r находится из уравнения неразрывности и имеет вид:

$$v_r = \dot{R} R^2 / r^2, \tag{3}$$

где R — радиус пузырька. Подставив (3) в (2), получим:

$$\rho_l\left(\frac{\ddot{R}R^2}{r^2}+\frac{2\dot{R}^2R}{r^2}-\frac{2\dot{R}^2R^4}{r^5}\right)=-\frac{\partial p_l}{\partial r}-4\frac{\dot{R}R^2}{r^3}\frac{\partial\eta}{\partial r}. \tag{4}$$

Чтобы избавиться от неизвестного градиента давления в правой части уравнения (4), проинтегрируем его от R до бесконечности:

$$\rho_l\left(\ddot{R}R+\frac{3}{2}\dot{R}^2\right)=p_l(R)-p_l(\infty)+4\eta(R)\frac{\dot{R}}{R}-12\dot{R}R^2\int_R^\infty\frac{\eta(r)}{r^4}dr. \tag{5}$$

Отметим, что при изменяющихся внешних условиях давление вдали от пузырька зависит от времени.

Условие равенства сил, действующих на поверхность пузырька со стороны газа и со стороны жидкости, записывается следующим образом:

$$p_g-\left\{p_l(R)-2\eta(R)\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)_{r=R}\right\}=\frac{2\sigma}{R},$$

где σ — поверхностное натяжение. Выражая из последнего уравнения зависимость $p_l(R)$, получим:

$$\rho_l\left(R\ddot{R}+\frac{3}{2}\dot{R}^2\right)=p_g-p_l(\infty)-\frac{2\sigma}{R}-4\hat{\eta}\frac{\dot{R}}{R},\ \ \hat{\eta}=3R^3\int_R^\infty\frac{\eta(r)}{r^4}dr, \tag{6}$$

Уравнение (6) является аналогом уравнения Рэлея–Плессета с единственной разницей, что вместо вязкости в правой его части присутствует интегральная вязкость $\hat{\eta}$. Нетрудно показать, что в случае однородной вязкости уравнение (6) сводится к классическому виду. Отметим, что, так как в решаемой задаче градиенты вязкости в жидкости достаточно большие, это, конечно, должно быть учтено.

Динамика массовой доли растворенного в расплаве газа $C(t, r)$ описывается уравнением диффузии:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+v_r\frac{\partial C}{\partial r}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(Dr^2\frac{\partial C}{\partial r}\right), \tag{7}$$

где D — коэффициент диффузии. Конвективный член в уравнении (7) обусловлен радиальным движением жидкости.

В начальный момент времени расплав полагается насыщенным газом до равновесного состояния: $(C)_{t=0}=C_i$, где $C_i=C_s(p_i)$. Здесь C_s — равновесная массовая доля растворенного в расплаве газа, которая, согласно закону Генри, является функцией давления p (для воды, растворенной в магме, эта зависимость имеет следующий вид: $C_s(p)=\sqrt{K_H p}$, где K_H — постоянная Генри). Здесь и далее нижние индексы i и f соответствуют начальному и конечному состояниям. На границе пузырька выполняется условие локального термодинамического равновесия: $(C)_{r=R}=C_s(p_g)$; вдали от пузырька массовая дола растворенного в расплаве газа равна начальной: $(C)_{r\to\infty}=C_i$. Газ в пузырьке считается идеальным: $p_g=\rho_g\bar{R}_gT$, где $\bar{R}_g=R_g/\mu_g$ — приведенная газовая постоянная, μ_g — мольная масса газа.

Сформулированная краевая задача дополняется уравнением материального баланса, которое с учетом бародиффузионного эффекта записывается следующим образом (эффектом термодиффузии мы здесь пренебрегаем, полагая, что формирующийся в жидкости градиент температуры не столь велик, чтобы получился какой-либо значимый эффект):

$$\frac{dm_g}{dt} = 4\pi R^2 \rho_1 \left(D \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{D_p}{p} \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=R}, \tag{8}$$

где m_g — масса газа в пузырьке, $D_p = k_p D$ — коэффициент бародиффузии, k_p — бародиффузионное отношение. Отметим, что эффектом термодиффузии также можно пренебречь, полагая, что формирующийся в жидкости градиент температуры не столь велик, чтобы получился какой-либо значимый эффект. Такое предположение сделано на основе работы [9], в которой было показано, что температура магмы вблизи границы пузырька меньше температуры на бесконечности всего лишь на ~ 1 K (формирование температурного пограничного слоя обусловлено поглощением скрытой теплоты десорбции на межфазной поверхности), хотя при полной дегазации магмы ее температура может понижаться и на ~ 100 K. Градиент температуры, обусловленный данным эффектом, также мал. Это связано с тем, что толщина диффузионного пограничного слоя много меньше температурного — примерно в $\sqrt{\mathrm{Le}}$ раз, где Le = D/a — число Льюиса, которое для магматических расплавов имеет значение ~10^{-4}; a — температуропроводность расплава. Таким образом, тепловые эффекты в рассматриваемом процессе не имеют какого-либо существенного значения. Следует подчеркнуть, что это справедливо лишь до тех пор, пока пузырек можно считать одиночным, т.е. пока толщина температурного пограничного слоя, формирующегося вокруг пузырька, значительно меньше размера ячейки, к стенке которой он растет.

Присутствующие в уравнении (8) давление и градиент давления находятся из уравнений (4), (5) и (в пренебрежении инерционными членами и лапласовским давлением) имеют следующий вид:

$$p_1(R) = p_1(\infty) - 4\big(\eta(R) - \hat{\eta}\big)\dot{R}/R, \quad \big(\partial p_1/\partial r\big)_{r=R} = -4(\dot{R}/R)\big(\partial \eta/\partial r\big)_{r=R}. \tag{9}$$

Градиент вязкости жидкости при этом может быть выражен через градиент массовой доли растворенного в жидкости газа:

$$\partial \eta/\partial r = \eta_C' \cdot \big(\partial C/\partial r\big) = -\kappa\eta \cdot \big(\partial C/\partial r\big), \tag{10}$$

где $\kappa = E_\eta^* k_\eta / (R_g T)$ — коэффициент, зависящий от свойств магматического расплава. Как видно из последнего соотношения, вклад бародиффузии в массовый поток является положительным.

В отличие от газовых сред, для любых жидких сред, тем более сильновязких, в настоящее время практически отсутствуют модели для определения значения коэффициента бародиффузии. Единственным способом его определения остается экспериментальный. Известно только, что в жидкостях, как и в газах, в процессе бародиффузии тяжелые молекулы стремятся перейти в область повышенного давления, а легкие — пониженного.

Важно отметить, что поток газа в пузырек, обусловленный бародиффузией, является лишь добавочным к определяющему, диффузионному потоку. Это предполагает, что второй член в правой части уравнения (8) мал по отношении к первому, и позволяет в самом уравнении переноса (7) пренебречь членом, отвечающим за бародиффузию. Сформулированная задача может быть решена методом последовательных приближений.

Сначала находятся зависимости массовой доли растворенного в жидкости газа, давления и вязкости жидкости от времени, а также градиенты массовой доли растворенного газа и давления на межфазной границе без учета бародиффузионного эффекта. Далее определяется вклад последнего в общую картину процесса.

2. Аналитическое решение задачи

Рассматриваемая задача решалась с использованием следующих безразмерных переменных: $\tau = t / t_0$, $\bar{r} = r / R_0$, $\bar{R} = R / R_0$, $\bar{p} = (p - p_\mathrm{f}) / \Delta p_\mathrm{i}$, $\bar{C} = (C - C_\mathrm{f}) / \Delta C_\mathrm{i}$, где t_0 — характерное время процесса, R_0 — характерный размер, $\Delta p_\mathrm{i} = p_\mathrm{i} - p_\mathrm{f}$, $\Delta C_\mathrm{i} = C_\mathrm{i} - C_\mathrm{f}$, $C_\mathrm{f} = C_\mathrm{s}(p_\mathrm{f})$. Характерный размер R_0 выбирался таким образом, чтобы характерные времена диффузионных $t_0^\mathrm{D} = R_0^2 / D$ и динамических $t_0^\eta = \eta_\mathrm{i} / \Delta p_\mathrm{i}$ процессов были равны: $t_0^\mathrm{D} = t_0^\eta \equiv t_0$. Тогда $R_0 = \sqrt{D\eta_\mathrm{i} / \Delta p_\mathrm{i}}$, где $\eta_\mathrm{i} = \eta(C_\mathrm{i})$. Такой выбор характерного размера представляется наиболее разумным, так как это позволяет уменьшить число свободных параметров задачи, что существенно упрощает параметрический анализ изучаемого процесса. Введем также характерную скорость: $v_0 = R_0 / t_0 = \sqrt{D\Delta p_\mathrm{i} / \eta_\mathrm{i}}$.

Уравнение Рэлея (6) в безразмерных переменных, а также связь между давлением в пузырьке и давлением в жидкости на границе пузырька (9) запишутся в виде:

$$\mathrm{Pr}_\mathrm{D}^{-1}\left(\bar{R}\bar{R}'' + (3/2)\bar{R}'^2\right) = \bar{p}_\mathrm{g} - \bar{p}_\mathrm{l}(\infty) - \bar{R}_\mathrm{cr} / \bar{R} - 4\hat{\bar{\eta}}\bar{R}' / \bar{R}, \tag{11}$$

$$\bar{p}_{\mathrm{l}\Gamma} = \bar{p}_\mathrm{g} - \bar{R}_\mathrm{cr} / \bar{R} - 4\bar{\eta}_\Gamma \bar{R}' / \bar{R}, \tag{12}$$

$$\hat{\bar{\eta}} = 3\int_1^\infty \bar{\eta}(\chi) / \chi^4 d\chi, \tag{13}$$

где $\mathrm{Pr}_\mathrm{D} = \nu_\mathrm{i} / D$ — диффузионное число Прандтля, $\nu_\mathrm{i} = \mu_\mathrm{i} / \rho_\mathrm{l}$ — кинематическая вязкость расплава; $\bar{R}_\mathrm{cr} = R_\mathrm{cr} / R_0$, $R_\mathrm{cr} = 2\sigma / \Delta p_\mathrm{i}$ — критический радиус пузырька; $\bar{R}' = d\bar{R} / d\tau$, $\bar{R}'' = d^2\bar{R} / d\tau^2$. Здесь и далее нижний индекс Γ обозначает значение величины на межфазной границе. Отметим, что так как вязкость магматических расплавов велика (что соответствует большим значениям числа Прандтля — от 10^{10} и выше), инерционными членами в уравнении (11) можно пренебречь. Кроме того, если рассматривать рост пузырьков, размеры которых значительно больше критического, то в уравнениях (11), (12) можно пренебречь и лапласовским давлением. Однако при необходимости все эти члены могут быть учтены.

Для нахождения решения диффузионной задачи (7) и (8) воспользуемся подходом, который был предложен в работах [8 – 11] для различных физических систем. Для этого перейдем к переменным τ, $\chi = \bar{r} / \bar{R}$, в которых граница пузырька неподвижна. В этих переменных диффузионная задача принимает вид:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} + \frac{\bar{R}'}{\bar{R}}\left(\frac{1}{\chi^2} - \chi\right)\frac{\partial \bar{C}}{\partial \chi} = \frac{1}{\bar{R}^2}\frac{1}{\chi^2}\frac{\partial}{\partial \chi}\left(\chi^2 \frac{\partial \bar{C}}{\partial \chi}\right), \tag{14}$$

$$\left(\bar{C}\right)_{\tau=0} = 1, \quad \left(\bar{C}\right)_{\chi=1} = \bar{C}_\Gamma, \quad \left(\bar{C}\right)_{\chi\to\infty} = 1, \tag{15}$$

где $\bar{C}_{\Gamma} = \bar{C}_{\rm s}(\bar{p}_{\rm g}) = \dfrac{\sqrt{\psi \bar{p}_{\rm g} + 1} - 1}{\sqrt{\psi + 1} - 1}$ — массовая доля растворенного газа на границе пузырька, $\psi = \Delta p_{\rm i} / p_{\rm f}$. В работах [7, 12] было показано, что в переменных τ, $\chi = \bar{r} / \bar{R}$ в системе достаточно быстро устанавливается квазистационарное состояние, при котором можно пренебречь производной по времени $\partial \bar{C} / \partial \tau$ в уравнении (14). В рамках этого допущения, интегрируя (14), с учетом (15), можно найти аналитическое решение, которое хорошо согласуется с численным в широком диапазоне режимных параметров процесса и на всех его стадиях:

$$\bar{C}(\tau, \chi) = 1 - \left(1 - \bar{C}_{\Gamma}\right) \frac{I(\chi, \beta)}{I(1, \beta)}, \tag{16}$$

где $I(\chi, \beta) = \int_0^{1/\chi} \exp\left\{-\beta\left(\zeta + \zeta^{-2}/2\right)\right\} d\zeta$, $\beta(\tau) = \bar{R}\bar{R}'$. Зависимость радиуса пузырька от времени при этом находится из уравнения материального баланса (8), которое с учетом (16) представляет собой следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$I^*(\beta) \frac{d}{d\tau}\left\{\left(1 + \psi \bar{p}_{\rm g}\right) \bar{R}^3\right\} = 3\varepsilon \bar{R}\left(1 - \bar{C}_{\Gamma}\right)\left(1 + 4k_p \kappa \bar{\eta}_{\Gamma} \frac{\psi}{\psi \bar{p}_{\rm l\Gamma} + 1} \frac{\bar{R}'}{\bar{R}}\right), \tag{17}$$

где $\varepsilon = \rho_{\rm l} \Delta C_{\rm i} / \rho_{\rm g}(p_{\rm f})$ — безразмерный критерий фазового превращения; $\bar{\eta}_{\Gamma} = \bar{\eta}(\bar{C}_{\Gamma})$, $\bar{\eta}(\bar{C}) = \eta / \eta_{\rm i} = \exp\left\{\bar{\kappa}(1 - \bar{C})\right\}$ — безразмерная вязкость жидкости; $\bar{\kappa} = \kappa \Delta C_{\rm i}$, $I^*(\beta) = \int_0^1 \exp\left\{-\beta\left(\zeta + \zeta^{-2}/2 - 3/2\right)\right\} d\zeta$. При больших пересыщениях ($\varepsilon \gg 1$), которым соответствуют большие значения β и которые характерны для реальных вулканических процессов, интегральное выражение $I^*(\beta)$ имеет простое асимптотическое разложение: $I^*(\beta) \approx \sqrt{\pi/(6\beta)} - 4/(9\beta)$. Отметим, что так как подынтегральная функция в выражении (13) для интегральной вязкости $\hat{\bar{\eta}}$ (для больших $\bar{\kappa}$) экспоненциально быстро убывает с координатой χ, нахождение $\hat{\bar{\eta}}$ может быть значительно упрощено. Разлагая показатель экспоненты в ряд Тейлора в окрестности $\chi = 1$, после несложных преобразований получим: $\hat{\bar{\eta}} \approx \bar{\eta}_{\Gamma} \dfrac{3I^*(\beta)}{\bar{\kappa}(1 - \bar{C}_{\Gamma})}$.

Отметим, что полученное полуаналитическое решение может быть использовано и при нестационарных внешних условиях, так как давление $\bar{p}_{\rm l}(\infty)$, присутствующее в правой части уравнения (11), в общем случае является функцией времени (в случае мгновенной декомпрессии $\bar{p}_{\rm l}(\infty) = 0$).

Заметим, что второе слагаемое в скобках в правой части уравнения (17) является отношением плотности потока газа j_p на межфазной поверхности, обусловленной бародиффузией, к плотности диффузионного потока j, что позволяет оценить вклад первого в динамику роста пузырька:

$$j_p / j = 4k_p \kappa \bar{\eta}_{\Gamma} \frac{\psi}{\psi \bar{p}_{l\Gamma} + 1} \frac{\bar{R}'}{\bar{R}}. \tag{18}$$

Рассмотрим некоторые предельные случаи. На малых временах ($\tau \ll 1$), когда давление в пузырьке практически равно начальному, в случае мгновенной декомпрессии уравнение (6) может быть проинтегрировано, в результате чего получим:

$$\bar{R}(\tau) = \bar{R}_{\mathrm{cr}}\left(1+\delta e^{\tau/4}\right), \tag{19}$$

где $\delta = R_{\mathrm{i}} / R_{\mathrm{cr}} - 1$, $R_{\mathrm{cr}} = 2\sigma / \Delta p_{\mathrm{i}}$ — критический радиус пузырька, R_{i} — начальный (надкритический) радиус, в выборе которого, собственно, есть некий острый произвол: достаточно только, чтобы он был несколько больше критического; $\bar{R}_{\mathrm{cr}} = R_{\mathrm{cr}} / R_0$.

На больших временах ($\tau \gg 1$) давление газа в пузырьке асимптотически стремится к давлению жидкости вдали от пузырька: $\bar{p}_{\mathrm{g}} \to 0$, коэффициент β — к константе β_0, зависящей только от степени метастабильности ε, а распределение массовой доли растворенного в жидкости газа — к стационарному, что свидетельствует об автомодельности данной стадии процесса (автомодельной переменной здесь является χ). На рассматриваемой стадии, которую называют диффузионной, рост пузырька происходит исключительно в результате десорбции газа из окружающей его жидкости. Также отметим, что на этой стадии процесса влияние бародиффузии нивелируется (см. (18)). Распределение массовой доли и закон роста пузырька в данном случае могут быть найдены в явном виде:

$$\bar{C}(\chi) = 1 - I(\chi, \beta_0) / I(1, \beta_0), \quad \bar{R}(\tau) = \sqrt{\bar{R}_*^2 + 2\beta_0(\tau - \tau_*)}, \tag{20}$$

где τ_* и $\bar{R}_* = \bar{R}(\tau_*)$ — характерное время установления диффузионной стадии роста и радиус пузырька к этому моменту времени соответственно. Коэффициент β_0 при этом находится из следующего интегрального уравнения: $\beta_0 I^*(\beta_0) = \varepsilon$. При больших пересыщениях ($\varepsilon \gg 1$) для β_0 существует хорошее асимптотическое разложение: $\beta_0 \approx (6/\pi)(\varepsilon + 4/9)^2$. Аналогичное решение было получено в работах [13–15]. При этом следует учитывать, что диффузионная стадия роста может быть недостижима на обозримых временах (все зависит от конкретных условий, при которых протекает рассматриваемый процесс).

Полученные предельные решения (19), (20) позволяют оценить вклад бародиффузии в динамику роста пузырька на начальной стадии процесса и на больших временах:

$$j_p / j \approx k_p \kappa \psi \quad \text{при } \tau < 1 \text{ (или } \tau \sim 1), \tag{21}$$

$$j_p / j = 2 k_p \kappa \psi \bar{\eta}_{\mathrm{f}} \tau^{-1} \quad \text{при } \tau \gg 1. \tag{22}$$

Как видно из соотношений (21), (22) и как отмечалось выше, влияние бародиффузии существенно лишь на начальной и переходной стадиях процесса. Со временем оно уменьшается, и на временах $\tau \gg 2 k_p \kappa \psi \bar{\eta}_{\mathrm{f}}$ эффектом бародиффузии можно пренебречь.

3. Результаты расчета

Ниже представлены результаты расчета на примере роста газового пузырька в риолитовом магматическом расплаве, подвергшемся мгновенной декомпрессии. Отметим, что в работе не ставится целью описание рассматриваемого процесса при всевозможных вариациях его режимных параметров, а демонстрируется влияние эффекта бародиффузии на общую картину его протекания. Все результаты расчетов приведены в безразмерных переменных, что представляется наиболее логичным, так как в этих переменных количество свободных параметров задачи существенно меньше, чем в размерных. Кроме того, анализ данных в безразмерных переменных наиболее информативен с точки зрения определения характерных пространственно-временных масштабов той или иной стадии рассматриваемого процесса.

Будем считать, что в начальный момент времени давление в магме падает с начального $p_{\mathrm{i}} = 500$ атм до конечного $p_{\mathrm{f}} = 100$ атм. Расплав изначально будем полагать насыщенным. Это соответствует следующим значениям характерных величин и определяющих безразмерных параметров процесса: $C_{\mathrm{i}} = 2{,}83$ %, $C_{\mathrm{f}} = 1{,}27$ %, $\eta_{\mathrm{i}} = 1{,}5\cdot10^4$ Па·с, $\eta_{\mathrm{f}} = 1{,}6\cdot10^6$ Па·с, $R_0 = 0{,}026$ мкм, $t_0 = 0{,}8$ мс, $\varepsilon = 2$, $\psi = 4$, $\kappa = 319$. Отметим, что данные условия характерны для реальных вулканических извержений. Необходимые для расчета физико-химические свойства магмы взяты из работы [5], в которой представлена достаточно полная подборка имеющихся в литературе данных. Однако в опубликованных работах отсутствуют какие-либо достоверные сведения о коэффициенте бародиффузии. В связи с этим коэффициент бародиффузии в настоящее время может быть задан только в качестве параметра, варьируя который, можно было бы определить, при каких условиях бародиффузию следует учитывать, а при каких нет. Авторами были выбраны такие значения указанного коэффициента, при которых влияние бародиффузии на общую картину рассматриваемого процесса становится существенным, но не определяющим. В противном случае требуется учитывать соответствующий поток в самом уравнении переноса.

На рис. 1 приведены зависимости радиуса пузырька и давления газа в пузырьке от времени, построенные в рамках найденного полуаналитического решения (17) как без учета, так и с учетом эффекта бародиффузии. Зависимости на рис. 1*a* представлены с использованием логарифмической шкалы, так как характерные масштабы времени различных стадий процесса имеют разные порядки. Эти же зависимости в более узком временном интервале, затрагивающим лишь переходную стадию процесса, представлены на рис. 1*b*, где более отчетливо

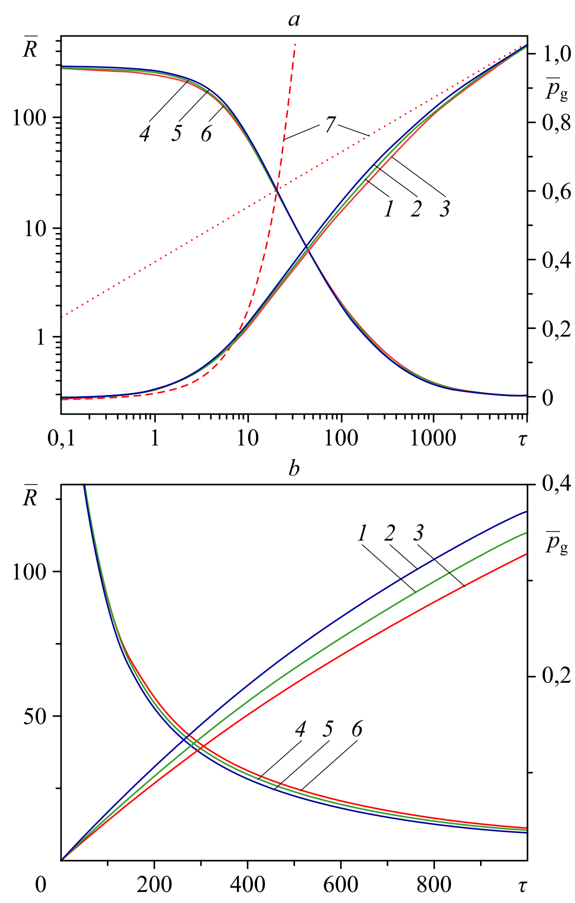


Рис. 1. Зависимости радиуса пузырька $\overline{R}$ (линии *1*–*3*) и давления газа в пузырьке $\overline{p}_{\mathrm{g}}$ (линии *4* – *6*) от времени τ для значений бародиффузионного отношения $k_p = 10^{-4}$ (*1*), $2\cdot10^{-4}$ (*2*), 0 (*3*) (в отсутствие бародиффузии).
Штриховая и пунктирная линии *7* иллюстрируют асимптотические решения (19) и (20) соответственно.

заметно различие в динамике роста пузырька с учетом и без учета бародиффузионного эффекта.

Как видно из рис. 1, рост пузырька сопровождается падением в нем давления, которое ввиду большой вязкости магматического расплава может длиться достаточно продолжительный промежуток времени (последний в зависимости от свойств магматического расплава и от условий протекания процесса, может достигать сотен и даже тысяч секунд). На графиках хорошо определяются инерционная (экспоненциальная), переходная и диффузионная стадии процесса. Последняя, как уже отмечалось выше, является асимптотической и вне зависимости от того, учитывается ли бародиффузия или нет, характеризуется установлением зависимости радиуса пузырька пропорционального квадратному корню из времени (с коэффициентом пропорциональности, являющимся только функцией начального пересыщения среды, вызванного декомпрессией) (20). Давление в пузырьке на этой стадии практически равно давлению окружающей жидкости. Таким образом, влияние эффекта бародиффузии проявляется только на начальной и переходной стадиях процесса, что соответствует приведенным выше рассуждениям.

Влияние эффекта бародиффузии на скорость роста пузырька может быть также наглядно продемонстрировано на графике зависимости коэффициента β от времени τ (рис. 2). Именно функция $\beta(\tau)$ определяет скорость роста пузырька. Напомним, что со временем β стремится к константе β_0, являющейся функцией начального пересыщения ε. Как видно из рисунка, бародиффузия приводит к более быстрому его росту (по отношению к β, рассчитанному в отсутствии бародиффузии) на начальной и переходной стадиях процесса, и этот рост тем быстрее, чем больше коэффициент k_p, что, в принципе, достаточно очевидно. Со временем, когда β все ближе приближается к β_0, влияние бародиффузии становится менее заметным.

Еще одна зависимость, построенная по формуле (18), наглядно иллюстрирующая характер протекания процесса, представлена на рис. 3. Она показывает отношение плотности потока газа j_p на межфазной границе, обусловленного бародиффузией, к плотности

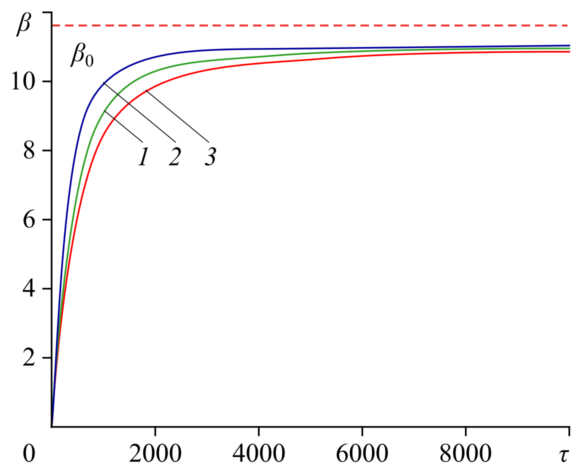
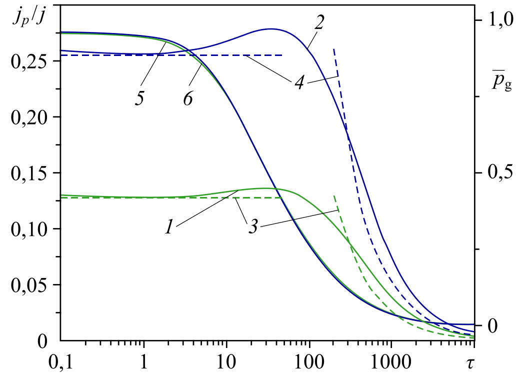


Рис. 2. Зависимость коэффициента β от времени τ для значений бародиффузионного отношения $k_p = 10^{-4}$ (*1*), $2 \cdot 10^{-4}$ (*2*), 0 (*3*) (в отсутствие бародиффузии).

Штриховой линией обозначена асимптотика $\beta = \beta_0$.

Рис. 3. Зависимости отношения плотности потока газа j_p на межфазной поверхности, обусловленного бародиффузией, к плотности диффузионного потока j (18) (кривые *1–4*) и давления газа в пузырьке $\overline{p}_g$ (кривые *5*, *6*) от времени τ для значений бародиффузионного отношения $k_p = 10^{-4}$ (*1*, *3*, *5*), $2{\cdot}10^{-4}$ (*2*, *4*, *6*).

Штриховые линии иллюстрируют асимптотические решения (21), (22).



диффузионного потока j. Первое, что следует отметить и что вполне очевидно: поток, обусловленный бародиффузией, увеличивается с ростом коэффициента k_p. Конечно, можно подобрать такие значения k_p, когда эти потоки сравняются или даже когда поток, обусловленный бародиффузией, будет больше диффузионного. Однако в таком случае полученное решение будет некорректным. Второе — это способ проявления бародиффузии. Сначала отношение бародифузионного потока к диффузионному является практически постоянным. Со временем бародиффузионный поток незначительно увеличивается, что обусловлено ростом градиента давления на межфазной границе, и по мере приближения к диффузионной стадии (когда давление в пузырьке практически выравнивается с давлением окружающей жидкости) постепенно падает до нулевых значений. Из рисунка видно, что полученные асимптотические решения (21), (22) достаточно хорошо описывают начальную и конечную стадии процесса и могут служить для оценки величины начальной декомпрессии ψ и характерного времени, на котором влияние бародиффузии на общую картину процесса существенно. Так, если $\psi \sim (k_p \kappa)^{-1}$, то поток, обусловленный бародиффузией, обязательно должен быть учтен (фактически данная оценка является оценкой сверху). Очевидно, что для получения этой оценки должен быть известен коэффициент k_p.

Для верификации полученного полуаналитического решения задача также решалась численно в полной постановке. Уравнение (11) интегрировалось по схеме Рунге – Кутты – Мерсона 4-го порядка с автоматической коррекцией шага по времени, а уравнения (14) и (17) (с учетом начального и граничных условий (15)) — с использованием неявной схемы первого порядка по времени и второго — по пространственной переменной. Результаты расчета не показали видимых отклонений от полученного полуаналитического решения (11) – (16) и его предельных случаев (19), (20).

В заключение отметим, что полученное в настоящей работе решение указывает на то, что неучет тех или иных факторов, которые превалируют на определенной стадии процесса, может привести к существенной ошибке в описании эволюции пузырька в целом и, как следствие, в описании процесса дегазации магматических расплавов.

Выводы

Представлена математическая модель роста газового пузырька в высоковязком газонасыщенном магматическом расплаве, подвергшемся быстрой декомпрессии, учитывающая как динамические, так и диффузионные эффекты и включающая в себя известные классические уравнения — уравнение импульсов и уравнение диффузии. Новизной разработанной модели является учет эффекта бародиффузии, возникающего в связи с формированием в расплаве большого градиента давления, который обусловлен формированием вокруг пузырька диффузионного пограничного слоя. Определен вклад бародиффузии в общую картину исследуемого процесса.

В работе также найдено аналитическое решение задачи, построение которого основано на существовании квазистационарного состояния для процесса роста пузырька. Это позволило свести исходную краевую задачу с подвижной границей к обыкновенному дифференциальному уравнению. Полученное решение справедливо в широком диапазоне пересыщений, достигаемых в результате декомпрессии, и на всех стадиях процесса, включая инерционную. Установлено, что поток газа, обусловленный бародиффузией, существенен на начальной и переходной стадиях. Со временем он убывает и на диффузионной стадии, которая по сути является асимптотической, становится пренебрежимо малым. Показано, при каких условиях эффект бародиффузии должен быть учтен, а при каких его можно не учитывать. Открытым остается вопрос о точных значениях коэффициента бародиффузии в магме.

Список литературы

1. **Chernov A.A., Kedrinsky V.K., Pil'nik A.A.** Kinetics of gas bubble nucleation and growth in magmatic melt at its rapid decompression // Physics of Fluids. 2014. Vol. 26, No. 11. P. 116602-1–116602-19.
2. **Нигматулин Р.И.** Динамика многофазных сред. Ч. 1. М: Наука, 1987. 464 с.
3. **Sparks R.S.J.** The dynamics of bubble formation and growth in magmas: a review and analysis // J. Volcanology and Geothermal Research. 1978. Vol. 3. No. 1. P. 1–37.
4. **Toramaru A.** Numerical study of nucleation and growth of bubbles in viscous magmas // J. Geophysical Research: Solid Earth. 1995. Vol. 100, No. B2. P. 1913–1931.
5. **Proussevitch A.A., Sahagian D.L.** Dynamics and energetics of bubble growth in magmas: analytical formulation and numerical modeling // J. Geophysical Research: Solid Earth. 1998. Vol. 103, No. B8. P. 18223–18251.
6. **Lensky N.G., Navon O., Lyakhovsky V.** Bubble growth during decompression of magma: experimental and theoretical investigation // J. Volcanology and Geothermal Research. 2004. Vol. 129, No. 1–3. P. 7–22.
7. **Chernov A.A., Pil'nik A.A., Davydov M.N., Ermanyuk E.V., Pakhomov M.A.** Gas nucleus growth in highviscosity liquid under strongly non-equilibrium conditions // Intern. J. of Heat and Mass Transfer. 2018. Vol. 123. P. 1101–1108.
8. **Чернов А.А., Давыдов М.Н., Пильник А.А.** Динамика роста газового пузырька в высоковязкой газонасыщенной жидкости при ее декомпрессии с конечной скоростью // Теплофизика и аэромеханика. 2023. Т. 30, № 1. С. 163–172.
9. **Чернов А.А.** Об одной модели затвердевания магмы в процессе эксплозивного вулканического извержения // Прикл. механика и техн. физика. 2003. Т. 44, № 5. С. 7–89.
10. **Чернов А.А., Пильник А.А.** Механизм роста кристаллического зародыша в переохлажденном расплаве при больших отклонениях от равновесия // Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 102, № 8. С. 591–595.
11. **Chernov A.A., Pil'nik A.A.** Gas segregation during crystallization process // Intern. J. of Heat and Mass Transfer. 2018. Vol. 119. P. 963–969.
12. **Chernov A.A., Pil'nik A.A., Vladyko I.V., Lezhnin S.I.** New semi-analytical solution of the problem of vapor bubble growth in superheated liquid // Sci. Reports. 2020. Vol. 10, No. 1. P. 16526-1–16526-8.
13. **Scriven L.E.** On the dynamics of phase growth // Chemical Engng Sci. 1959. Vol. 10, No. 1. P. 1–13.
14. **Kuchma A.E., Shchekin A.K., Bulgakov M.Yu.** The theory of degassing and swelling of a supersaturated-bygas solution // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2017. Vol. 468. P. 228–237.
15. **Shchekin A.K., Kuchma A.E., Aksenova E.V.** Effects of viscous and capillary forces on the growth rates of gas bubbles in supersaturated liquid-gas solutions // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2023. Vol. 609. P. 128303-1–128303-13.

Статья поступила в редакцию 5 мая 2023 г.,
после доработки — 31 мая 2023 г.,
принята к публикации 16 июня 2023 г.