

УДК 532.517

## Численное исследование методов управления потоком и эффектов расщепления в круглой затопленной струе\*

А.К. Шевченко, С.Н. Яковенко

*Институт теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

E-mail: s.yakovenko@mail.ru

В работе представлены результаты численного моделирования затопленной струи, вытекающей из круглого отверстия в стенке, с введением возмущений различных типов. Рассмотрены активные методы управления течением, включающие наложение осевых и спиральных гармонических колебаний на входной профиль скорости струи, вибрации сопла струи, а также их комбинации. Установлено, что внешнее воздействие приводит к эффектам расщепления струи при числе Рейнольдса  $Re \geq 1000$  в широких диапазонах частот и амплитуд возмущения, как это было показано в работах других авторов. Исследованы механизмы взаимодействия вихревых структур при бифуркации струи и сделаны оценки угла расширения течения в плоскости бифуркации, демонстрирующего увеличение с ростом  $Re$ . Расчеты при  $500 \leq Re < 1000$  показали, что для получения и усиления указанных выше эффектов необходима оптимизация параметров воздействия, в частности, типа, частоты и амплитуды возмущений. Сделан вывод, что механические вибрации сопла оказываются более эффективным способом управления течением, чем спиральное возбуждение входного профиля скорости.

**Ключевые слова:** круглая струя, осевые возмущения, спиральные возмущения, механические вибрации, число Струхала, расщепление струи, численные эксперименты.

### Введение

Управление струйными течениями применяется во многих отраслях промышленности. Так, например, воздействие на выхлопные струи летательных аппаратов способствует снижению уровня шума, расхода топлива и, как следствие, уменьшению вредного влияния авиационного транспорта на экологию. В электронике струи используются для точечного охлаждения нагретых поверхностей малоразмерных устройств — микроэлектромеханических систем, микрочипов. В энергетике различные технологии основаны на горении газовых струй. Для успешного решения задач, связанных с применением струй жидкости и газа, необходимо понимание происходящих в струйных течениях процессов и развитие надежных способов управления ими.

Физические эксперименты показывают, что активные способы управления потоком, в частности, акустическое или механическое воздействие на выходе из сопла, приводят к эффектам расщепления струи в широких диапазонах частот и амплитуд воздействия при наличии и при отсутствии горения [1–14] (рис. 1).

---

\* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-38-90256.

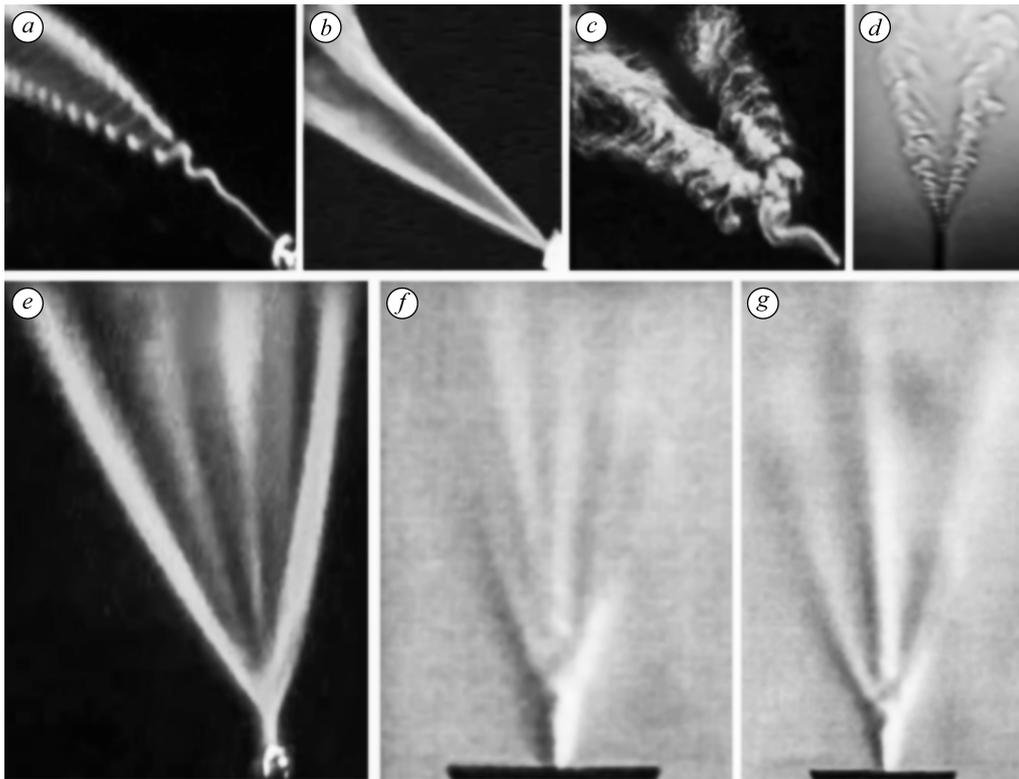


Рис. 1. Эффекты расщепления струй в физических экспериментах: бифуркация круглых струй при  $Re = 20$ ,  $St = 0,027$  (a),  $Re = 50$ ,  $St = 0,5$  (b),  $Re = 160$ ,  $St = 0,013$  (c),  $Re = 1687$ ,  $St = 0,135$  (d); расщепление псевдоплоских и плоских струй на четыре ветви при  $L/h = 12$ ,  $Re = 27$ ,  $St = 0,25$  (e), при  $L/h = 110$ ,  $Re = 29$ ,  $St = 0,00038$  (f) и на три ветви при  $L/h = 110$ ,  $Re = 32$ ,  $St = 0,00034$  (g). Дымовая визуализация в струях воздуха [3] (a–c, e); теневые фотографии в истекающих в воздух струях смеси пропана и бутана [11] (d), гелия [6] (f, g) (приведено с разрешения авторов).

В обзоре [1] упоминались ранние работы (например, [2]), где рассматривались опыты с влиянием звука на горячие и «холодные» струи, приводящего к их расщеплению на две и более ветвей, а также более поздние исследования этого эффекта как в собственных, так и в других работах (например, [3]), и был указан механизм, ответственный за возникновение эффекта. Этот механизм связан со взаимодействием вихревых колец, генерируемых на периферии струи вследствие сдвиговой неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Воздействие, раскачивающее струю, приводит к попеременному смещению и повороту каждого вихревого кольца в разные стороны от оси струи. Таким образом, плоскости соседних колец располагаются под углом друг к другу, взаимная индукция заставляет их двигаться в разных направлениях от оси струи, растягивая и/или расщепляя ядро струи. Этот механизм нашел подтверждение при анализе динамики вихрей в работе [4], где для раскачивания струи применялось 18 актюаторов, расположенных по окружности на выходе из сопла и колеблющихся с определенной частотой и фазой. Было обнаружено раздвоение струи с появлением минимума средней скорости на оси при введении спиральных колебаний (т.е. раскачивания с включением актюаторов в противофазе) для  $2000 < Re < 13000$  и  $St = 0,25$ . Число Рейнольдса  $Re = UD/\nu$  включает среднее значение входной скорости  $U$ , равное максимуму скорости  $U_0$  в случае «ударного» профиля на входе, и диаметр сопла  $D$ , а число Струхала  $St = fD/U$  содержит частоту воздействия  $f$ .

В работе [5] поперечным акустическим полем вводилось возмущение в струю метана при истечении его в воздух для управления пламенем струи и была получена бифуркация круглой струи при  $1470 \leq Re \leq 2210$  и  $0,2 \leq St \leq 0,9$ . Теневые визуализации продемонстрировали различие поведения струи в зависимости от частоты воздействия  $f$ . Так, в исходно узкой ламинарной струе иглоподобного вида при приближении частоты к «оптимальному» диапазону появляются колебания синусоидального вида (меандрирование). Затем, когда частота попадает в диапазон бифуркации, эти колебания приводят к бифуркации — разрыву струи на две ветви, расходящихся в разных направлениях. Этот диапазон частот расширяется с ростом числа  $Re$ . Отсутствие горения приводит к смещению диапазонов бифуркации в сторону  $150 \leq Re \leq 1150$  и  $0,15 \leq St \leq 0,35$ .

Для ламинарных потоков воздуха из круглого, щелевого и прямоугольного (эллиптического) отверстий с ударным, параболическим и промежуточными входными профилями скорости в работах [6, 8] были получены эффекты расщепления струй под действием акустического поля при малых числах Рейнольдса  $20 \leq Re \leq 160$  в широком диапазоне частот: от 40 до 4000 Гц ( $0,006 \leq St \leq 0,5$ ) (рис. 1а–1с). Для «псевдоплоской» струи с отношением длины к высоте сопла  $L/H = 10$  и «плоской» струи с  $L/H = 70$  и 180, числа Рейнольдса и Струхала определялись как  $Re = UH/\nu$ ,  $St = fH/U$ . Авторами также были зафиксированы процессы трансформации круглой струи в плоскую (точнее, эллиптическую) под влиянием поперечного акустического поля и доминирование синусоидальной неустойчивости в развитии течения, которая приводит к расщеплению. Было отмечено, что после раздвоения исходного ядра струи две первичные ветви могут демонстрировать вторичную неустойчивость и иногда испытывают вторичное расщепление, вследствие чего появляются три или четыре ветви (рис. 1е). Для псевдоплоской струи была обнаружена зависимость между углом расширения струи и частотой  $f$ , а для плоской — эффекты сворачивания вихревой пелены в противоположных друг другу направлениях (закрутки плоскости струи на каждом периоде акустического воздействия) вследствие концевых эффектов.

В работах [7, 9] изучалось поведение плоской ламинарной струи гелия при  $28 \leq Re \leq 85$  и  $L/H = 110$  под влиянием поперечного акустического поля интенсивностью до 125 дБ и частотой от 0,5 до 50 кГц. Как и в исследованиях [6, 8], было обнаружено, что акустическое воздействие приводит к появлению быстрорастущих синусоидальных возмущений, течению с большим углом расширения и разрыву ядра струи на несколько ветвей, текущих в разных направлениях (рис. 1f, 1g). Максимальному расширению соответствовало малое значение числа Струхала  $St = 3,6 \cdot 10^{-4}$  ( $St_L = fL/U = 0,042$ ). Был выполнен детальный анализ спектров мощности пульсаций массового расхода в целях изучения развития возмущений в струйном течении.

Эффекты воздействия акустического поля с частотой до 9 кГц и звуковым давлением до 120 дБ на круглые ламинарные ( $300 < Re < 2000$ ) струи метана с горением, гелия и углекислого газа без горения рассматривались в работах [10, 11]. Были найдены зависящие от  $Re$  диапазоны частот, в которых внешнее воздействие способствует расщеплению струи, вызванному развитием синусоидальной моды неустойчивости. Бифуркация круглой струи приводит к уменьшению температуры пламени, более интенсивному перемешиванию топлива и окислителя, что снижает концентрацию токсичных оксидов азота  $NO_x$  в продуктах горения [10]. Было показано, что угол расщепления зависит от частоты и интенсивности воздействия: при малых амплитудах эффект расщепления струи не наблюдается, а оптимальное число Струхала, соответствующее максимальному расширению струи, падает с уменьшением числа Рейнольдса.

В работах [12, 13] изучалось акустическое воздействие на горящие микроструи пропана и водорода, приводящее к упомянутым выше эффектам уплощения круглой струи и бифуркации. Было получено, что вследствие воздействия факел становится в несколько раз шире по сравнению с невозбужденной струей. В диапазоне частот от 7 до 15 кГц ( $0,05 \leq St \leq 0,14$ ) наблюдалось раздвоение пламени в круглых струях водорода

при  $Re = 990$  и  $1327$ . Для псевдоплоских горящих струй водорода ( $L/H = 7$ ) было обнаружено, что при больших скоростях истечения  $260 \text{ м/с} \leq U \leq 450 \text{ м/с}$  ( $710 \leq Re \leq 1228$ ) струя генерирует достаточно мощный шум интенсивностью  $60 \div 90$  дБ на частотах от 5 до 8 кГц, приводящий к ее расщеплению без внешнего воздействия. Уменьшение скорости истечения снижает уровень собственного шума, и этого шума уже недостаточно для самопроизвольного расщепления струи. В экспериментах [14] для истечения смеси пропана и бутана в воздух из круглого отверстия ( $703 \leq Re \leq 3163$ ) при наличии и отсутствии диффузионного горения было показано, что в режиме поднятого пламени начальный участок потока восприимчив к акустическому возмущению ( $90 \div 120$  дБ) частотой до 6 кГц и наблюдаемое без горения раздвоение струи (рис. 1d) не исчезает при горении, а в режиме присоединенного пламени бифуркация отсутствует.

Согласно выводам [5–14], акустическое воздействие приводит к значительному росту угла расширения струи. В частности, для невозбужденной круглой струи [15] при  $Re = 1320$  угол расхождения на турбулентном участке составляет  $20^\circ \div 24^\circ$ , а на ламинарном участке — от  $1^\circ$  до  $2^\circ$ . Введение поперечного акустического поля приводит к росту угла расширения первоначально ламинарной струи до  $20^\circ \div 25^\circ$  [6] и даже до  $40^\circ$  для некоторых комбинаций  $Re$  и  $St$  [9]. По данным работ [6, 8, 16] угол расширения плоских струй вниз по течению увеличивался с  $18^\circ$  (без внешнего воздействия) до  $30^\circ$  в макроструе с акустическими возмущениями и до  $45^\circ$  в микроструе. Отметим, что введение комбинации осевых и спиральных колебаний входного профиля скорости позволяет получить угол бифуркации струи до  $80^\circ$  [1].

Расщепление струи на две, три и более ветвей было получено также в вычислениях методами DNS (Direct Numerical Simulation, прямое численное моделирование) и LES (Large Eddy Simulation, моделирование крупных вихрей) [17–25] после введения комбинации осевых колебаний и покачиваний (flapping) или закручиваний (спиральных возмущений) профиля скорости на входе. Различие результатов расчетов и лабораторных экспериментов состоит в том, что механическое или акустическое воздействие в работах [1–14] приводило к расщеплению струй в широком диапазоне чисел Рейнольдса  $Re$  — от 20 до  $10^5$ . С другой стороны, гармонические возмущения в исследованиях [17–25] рассматривались в более узком диапазоне чисел Рейнольдса —  $10^3 \leq Re_0 \leq 2 \cdot 10^4$ , где  $Re_0 = U_0 D / \nu$ , а величина  $U_0$  равна максимуму входной скорости (для ударного профиля входная скорость постоянна, т.е.  $U = U_0$  и  $Re = Re_0$ ). Согласно данным [17–25], воздействие оказывает заметное влияние в диапазоне чисел Струхала  $0,2 \leq St_0 \leq 0,8$ , где величина  $St_0 = f_a D / U_0$  включает частоту осевых возмущений  $f_a$  распределения входной скорости. Этот диапазон соответствует анализу спектров, который показывает, что при  $Re_0$  от  $3 \cdot 10^3$  до  $2 \cdot 10^4$  на расстоянии  $x/D \leq 3$  от входа собственные возмущения струи доминируют в интервале  $St_0$  от 0,4 до 0,6 [18, 21, 23]. Следует отметить, что в зависимости от числа Струхала возмущение входного профиля скорости может приводить как к бифуркации струи с ее трансформацией в Y-форму, так и к трифуркации струи с возникновением Ψ-формы [19, 24, 25], т.е. к разделению её на три ветви (см. рис. 1g), расположенные в одной плоскости. С изменением числа  $St$  меняется также угол расширения струи от  $25^\circ$  до  $70^\circ$  [24]. Угол расширения, дефицит скорости на оси струи и  $St$ -диапазон расщепления могут быть существенно увеличены за счет специальных методов оптимизации низкоамплитудных спиральных возмущений [25].

С ростом числа Рейнольдса, очевидно, увеличивается протяженность спектра турбулентных движений, ответственных за динамику течения. При этом для описания каскада многомасштабных вихрей требуется измельчение сетки в расчетах методами LES и DNS. Вероятно поэтому для  $Re_0 > 2 \cdot 10^4$  численные эксперименты с эффектами расщепления струи отсутствуют. Например, в работе [17] при  $Re_0 = 2 \cdot 10^4$  были отмечены проблемы получения устойчивого решения, связанные с недостаточным разрешением расчетной сетки,

что приводило к занижению диссипации подсеточной модели и накоплению погрешностей, вызванных схемами дискретизации. С другой стороны, снижение числа Рейнольдса ( $Re_0 < 10^3$ ) ведет к удлинению ламинарного участка струи [15, 26–29] и сдвигу вниз по потоку начала участка с собственными синусоидальными колебаниями асимметричной спиральной моды неустойчивости, наблюдаемыми в струях и без введения гармонических возмущений на входе. Это, по-видимому, ослабляет влияние возмущения, наложенного на входной профиль скорости, и отодвигает начало расщепления струи от входного сечения, требуя увеличения расчетной области и более тонкой настройки параметров вычислений.

Настоящая работа включает численные эксперименты по управлению потоком в круглой затопленной струе, нацеленные на изучение трансформации течения в ответ на внешнее воздействие при  $Re < 1000$  и поиск оптимальных параметров воздействия, приводящих к наиболее ярко выраженному эффекту расщепления. Рассматриваются три метода возмущений: продольное (axial) гармоническое колебание входного профиля скорости, спиральное (helical) гармоническое колебание входного профиля скорости и поперечные механические колебания (вибрации) входного сечения сопла. Последний метод, аналогичный покачиванию входного профиля скорости [4, 19, 24] или наложению поперечного акустического поля [2, 3, 5–14], применялся также в работе [30], где в упрощенной двумерной постановке были получены предварительные результаты трансформации затопленной плоской струи ( $24 \leq Re \leq 160$ ) при введении вибрации сопла.

### Постановка задачи

Численное моделирование выполнялось путем решения трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса при помощи метода конечных объемов. Детали численной модели, граничных условий и результаты предварительных двумерных расчетов плоской струи и трехмерных расчетов прямоугольной струи приведены в работах [27–30]. Вычисления реализовывались в открытом пакете OpenFOAM с решателем rhoPimpleFoam для сжимаемого течения. Цилиндрическая расчетная область и сетка строились с помощью программы gmsh (рис. 2). Выбранный размер базовой области  $16D \times 6D \times 2\pi$  в направлениях  $x$ - $r$ - $\theta$  и число узлов  $267 \times 98 \times 140$  примерно соответствуют прямоугольной области  $16D \times 12D \times 12D$  в координатах  $x$ - $y$ - $z$  с количеством узлов базовой сетки  $264 \times 192 \times 192$ , использованной в работах [22, 23]. Размеры области и число узлов варьировались в зависимости от требований конкретного расчета. Например, для исследования развития собственных возмущений (без гармонических колебаний на входе) длина вычислительной области увеличивалась до  $L_x > 35D$ . Ячейки сетки вблизи входного отверстия имели минимальные размеры ( $0,04D \times 0,014D \times 0,014D$ ) у оси струи, а при удалении от сопла сетка растягивалась в геометрической прогрессии с коэффициентами  $1,003 \times 1,020$  для отношений размеров соседних ячеек по координатам  $x$ - $r$ .

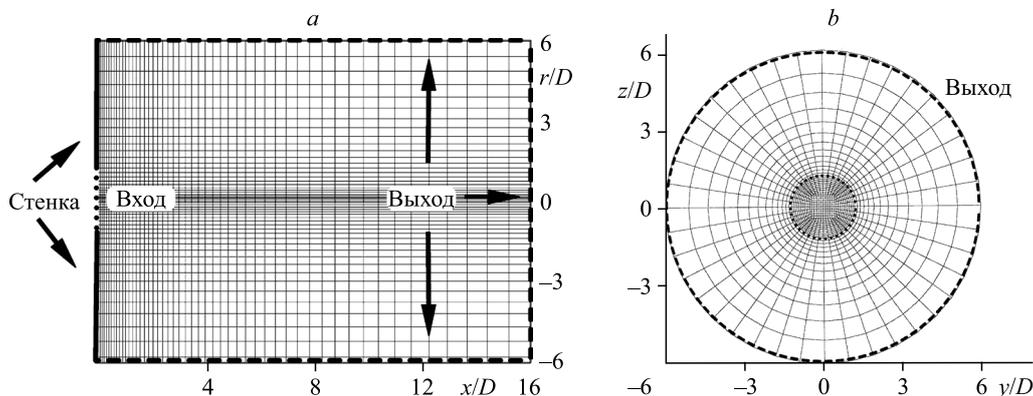


Рис. 2. Схема расчетной области.

$a$  — сечения  $y = 0$  или  $z = 0$ ,  $b$  — сечение  $x = 0$  (ячейки сетки показаны схематично, в укрупненном виде).

Во входном сечении области задавался ударный профиль продольной скорости  $u(x=0) = U = U_0 = \text{const}$  при  $r < R$  и  $u(x=0) = 0$  при  $r \geq R$  (где  $R = D/2$  — радиус сопла), приближенно соответствующий сглаженному ударному входному профилю скорости в физических и численных экспериментах. Предварительные расчеты показали, что сглаживание профиля с учетом реальной толщины пограничного слоя почти не влияет на поведение течения ниже по потоку в месте расщепления струи, которая к этому моменту уже «расплывается» под влиянием вязкости. Подобный вывод был сделан и в работе [19], где расщепление струи на двенадцать ветвей практически не зависело от толщины тонкого пограничного слоя на выходе из круглого сопла. К заданному входному профилю  $U$  добавлялись возмущения различных типов:

$$\begin{aligned} u(x=0, y, z, t) &= u_p(y, z, t) = U + u_a(t) + u_h(y, z, t) \text{ при } r < R, \\ u(x=0) &= 0 \text{ при } r \geq R. \end{aligned} \quad (1)$$

Член  $u_a$  соответствует продольным колебаниям, способствующим раскачке струи в направлении  $x$  и интенсификации генерации осесимметричных вихревых колец вследствие неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, а слагаемое  $u_h$  вводит спиральные осцилляции [23], которые вызывают согласно механизму, описанному в [1], отклонение вихревых колец от оси струи:

$$u_a(x=0, t) = A_a \cdot \sin(2\pi f_a t) \text{ при } r < R, \quad (2)$$

$$u_h(y, z, t) = A_h \cdot \sin(2\pi f_h t + \theta) \cdot \sin(2\pi r/R) \text{ при } r < R, \quad y = r \cdot \cos(\theta), \quad z = r \cdot \sin(\theta), \quad (3)$$

где  $f_a$  и  $f_h$  — частоты продольной и спиральной мод возмущения,  $A_a$  и  $A_h$  — соответствующие частотам амплитуды возмущений.

При моделировании также рассматривались поперечные механические вибрации входной стенки с круглым отверстием [30], подобные акустическому полю:

$$\begin{aligned} u(x=0) &= u_p(y, z^*, t) \text{ при } y < [R^2 - (z^*)^2]^{1/2}, \quad u(x=0) = 0 \text{ при } y \geq [R^2 - (z^*)^2]^{1/2}, \\ v(x=0, t) &= \omega Z_0 \cos(\omega t), \quad \omega = 2\pi f_v, \quad z^* = z - Z(t), \quad Z(t) = Z_0 \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (4)$$

где функция  $Z(t)$  задает вертикальное смещение стенки на входе,  $f_v$  и  $Z_0$  — частота (в Гц) и амплитуда вибрации, при  $Z_0 = 0$  имеем стационарное условие (неподвижная стенка).

Как показали предварительные тестовые расчеты, добавление случайных возмущений в виде «белого шума» к профилю входной скорости (1) практически не влияет на изучаемые эффекты расщепления струи. Аналогичный вывод был сделан в исследованиях [19, 20, 24] при DNS-моделировании для  $Re \leq 2000$ . Поэтому результаты, приведенные ниже, как и данные [17, 18, 22, 23], получены (если это специально не упоминается) без учета случайных возмущений.

### Валидация численной модели

Первая серия расчетов проводилась с наложением на профиль входной скорости комбинации спиральных и осевых возмущений (1)–(3) с амплитудой  $A = A_a = A_h$ . Этот метод воздействия подробно описывался в работах [19, 20, 22, 23]. Как указывалось в исследовании [1] и было подтверждено в дальнейшем, ключевым параметром здесь является отношение частот осевой ( $f_a$ ) и спиральной ( $f_h$ ) мод, задающее число ветвей, на которое разделяется струя. Например,  $f_a/f_h = 2$  приводит к бифуркации, а отношения  $f_a/f_h = 3, 4, 5$  обеспечивают появление трех-пяти ветвей, расходящихся в разных по углу  $\theta$  направлениях.

В настоящей работе далее выбрано отношение  $f_a/f_h = 2$ , поскольку минимальное количество ветвей струи позволяет лучше видеть влияние остальных параметров. Для сравнения с результатами [20], полученными при числе Рейнольдса  $Re = 2000$ , амплитуде  $0,025 \leq A/U_0 \leq 0,075$ , и с данными [22, 23], полученными при  $1000 \leq Re \leq 5000$ ,  $A/U_0 = 0,15$ ,

проведены тестовые расчеты при фиксированном числе Струхала  $St = f_a D/U = 0,45$  (это значение было отмечено в работах [22, 23] как оптимальное) для амплитуд  $A/U = 0,05$  и  $0,15$  при  $Re = UD/\nu = 1000$  и  $3000$ .

Для сравнения с данными других работ продольная компонента скорости  $u$  и пассивный скаляр  $c$  (концентрация вещества, истекающего из сопла) осреднялись по времени. Осреднение величины  $\varphi = (u, c)$  имело вид

$$\langle \varphi(x, y, z) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(x, y, z, t) dt, \quad T > t_0 > L_x/U,$$

где  $t_0$  — начальный период развития, после которого характер течения уже не зависит от начальных условий,  $T$  — период осреднения. В настоящих расчетах эти величины составляли  $t_0 U/D = 100$ , как и в работах [21–23],  $T^* = TU/D = 500$  [23] (при больших  $t_0$  или  $T$  осредненные поля скорости и скаляра меняются незначительно). Отметим, что в работах [20–22]  $300 \leq T^* \leq 1000$ .

Полученные результаты иллюстрируют бифуркацию струи (рис. 3), как и данные работ [1–14, 17–25]. Следует отметить хорошее согласование полученных данных для  $A/U = 0,05$  (рис. 3а, 3б) с результатами измерений (при  $x/D = 5$  согласование данных

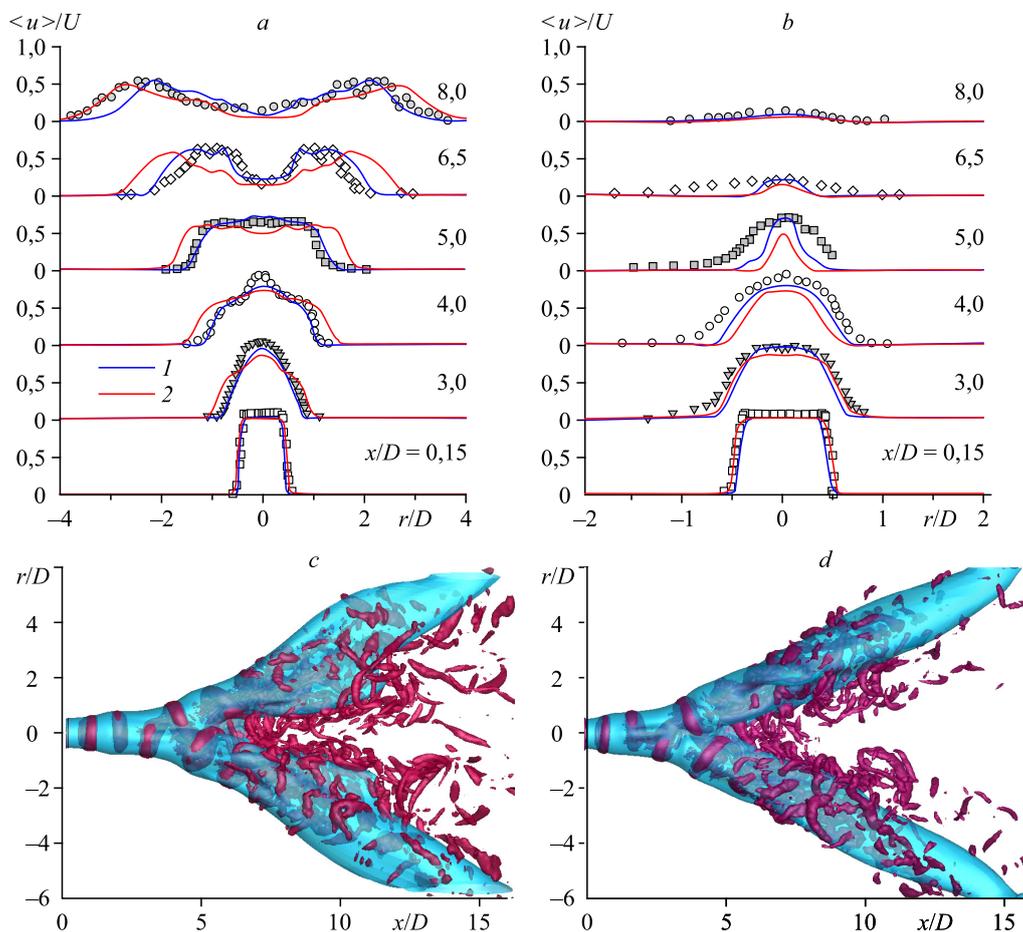


Рис. 3. Вычисленные при  $Re = 3000$ ,  $A/U = 0,05$  и  $0,15$  (кривые 1 и 2) профили средней скорости  $\langle u \rangle / U$  (линии) в плоскостях бифуркации  $y = 0$  (а) и бисекции  $z = 0$  (б) в сравнении с данными [1] при  $Re = 4300$  (символы) в сечениях  $x/D = 0,15, 3,0, 4,0, 5,0, 6,5, 8,0$ ; изоповерхности  $Q$ -критерия ( $Q = 0,1(U/D)^2$ ) и осредненной по времени концентрации пассивного скаляра  $\langle c \rangle = 0,2$  при  $A/U = 0,05$  (с),  $0,15$  (д).

лучше, чем в работах [20, 21], где расчеты завышают скорость  $\langle u \rangle$  на оси и дают более немонотонное поведение в плоскости бифуркации). В сечениях  $x/D > 5$  результаты расчета смещаются в сторону от данных опыта из-за отклонения последних от симметричного профиля  $\langle u \rangle(r)$ . Эта потеря точности экспериментальных данных [1], отмеченная и в работе [21], связана, вероятно, с недостаточным периодом осреднения. Поперечные распределения продольной компоненты вектора средней скорости  $\langle u \rangle$  и изоповерхности осредненного по времени поля концентрации втекающего вещества  $\langle c \rangle$  показывают две ветви струи (рис. 3), как при расщеплении круглой струи под действием акустического поля (рис. 1а–1д). Влияние числа Рейнольдса ( $1000 \leq Re \leq 3000$ ) в данном случае несущественно и здесь не показано. С ростом амплитуды  $A$  наблюдается увеличение угла бифуркации и смещение ее начала ко входу, а структура течения при этом не изменяется и аналогична полученной в работах [17–24]. Поля  $Q$ -критерия визуализируют вихревые кольца, которые расходятся вместе с ядром струи в двух направлениях и ясно различимы от входного сечения до  $x \sim 5D$ , после чего исчезают на фоне шума разномасштабных вихрей.

### Влияние амплитуды возмущения

В следующей серии расчетов число Рейнольдса было уменьшено до  $Re = 750$  и проверена реакция течения на методы воздействия (1) – (3) при фиксированном числе Струхала  $St = 0,45$  (оптимальном при  $1000 \leq Re \leq 5000$ , согласно данным [22, 23]) и при  $St_h = = f_h D/U = 0,225$  для различных амплитуд  $0,025 \leq A/U \leq 0,2$ . Трансформация течения в плоскости бифуркации визуализирована изолиниями осредненной по времени концентрации пассивного скаляра. При  $A/U \leq 0,05$  (рис. 4а, 4б) струя разделяется не на две ветви, как можно было ожидать при выбранном значении  $f_a/f_h = 2$  (согласно результатам настоящей (рис. 3) и других работ для  $Re \geq 10^3$ ), а на три-четыре ветви, лежащие примерно в одной плоскости, как на рис. 1е–1г. Наличие «вторичных» ветвей предположительно можно объяснить тем, что после первичной бифуркации течение все еще чувствительно к наложенным на входе возмущениям. Под их влиянием новообразованные ветви расщепляются повторно, формируя четыре «пальца». Увеличивая далее амплитуду вводимых возмущений, можно расщепить и эти вторичные ветви на шесть «пальцев» (рис. 4с). Однако при больших амплитудах (рис. 4д, 4е) число ветвей вновь уменьшается, по-видимому, из-за слияния соседних ветвей «многопальцевой» струи. Явления расщепления струи на большое число (в частности, семь) «язычков», расположенных в одной плоскости, наблюдалось также в работе [2] при некотором расходе газа под воздействием на пламя горелки звуком свистка или удара молота.

Для более полного количественного описания принято рассматривать также угол бифуркации струи  $\alpha$  [1, 6, 11, 24] и значения концентрации пассивного скаляра и скорости на оси струи [18–24]. Оценка  $\alpha$  из рис. 4 дает его разброс от  $30^\circ$  до  $53^\circ$  в зависимости от амплитуды воздействия и показывает усиление чувствительности струи к параметру  $A$  по сравнению со случаями  $Re \geq 10^3$ . Отметим, что при  $A \geq 0,15U$  плоскость расщепления струи отклоняется на некоторый угол (увеличивающийся с ростом  $A$ ) от вертикали, и величина  $\alpha$  должна это учитывать. Явление сильного разворота плоскости бифуркации на угол до  $45^\circ$  было обнаружено авторами [23] для  $A/U = 0,15$ ,  $Re = 3000$ ,  $St = 0,55$  и [31] для  $A/U = 0,63$ ,  $Re = 500$ ,  $St = 0,28$ . Метод воздействия в работе [31] отличался от возмущений (1)–(3), он включал оптимизацию параметров управления потоком при помощи эволюционных стратегий и три различных моды в распределении радиальной, а не продольной скорости на входе в струю.

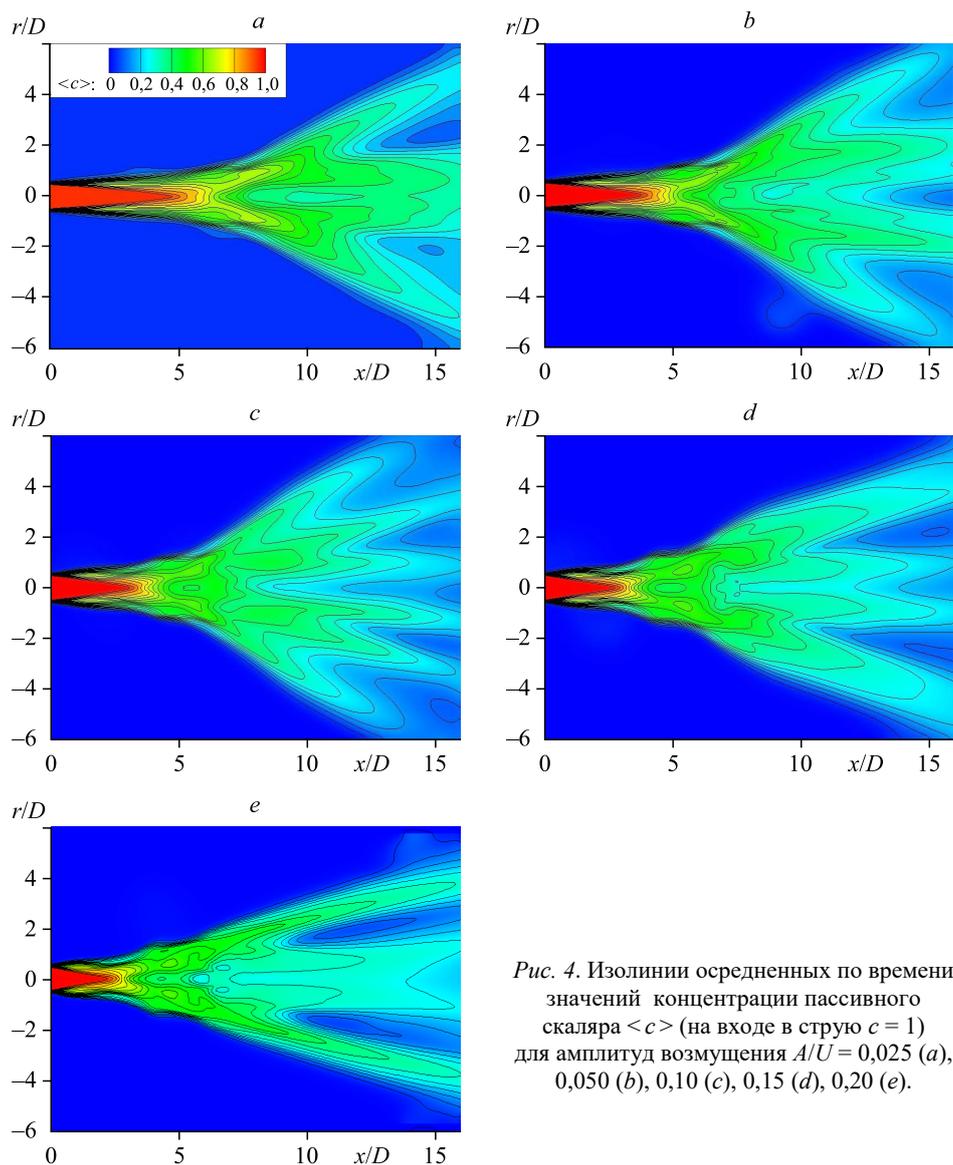


Рис. 4. Изолинии осредненных по времени значений концентрации пассивного скаляра  $\langle c \rangle$  (на входе в струю  $c = 1$ ) для амплитуд возмущения  $A/U = 0,025$  (a),  $0,050$  (b),  $0,10$  (c),  $0,15$  (d),  $0,20$  (e).

Изменение значений скорости  $\langle u \rangle$  на оси при  $y = z = r = 0$  (рис. 5a) демонстрирует её плавное снижение вниз по течению от входа до сечения  $x/D = 3 \div 5$ , а затем более резкое падение, отражающее растяжение ядра струи и его последующее расщепление в плоскости бифуркации. При  $x/D \sim 9$  уменьшение средней скорости с ростом  $x$  снова замедляется. Отметим небольшие локальные максимумы  $\langle u \rangle$  при  $5 < x/D < 11$  для  $A \leq 0,15U$  между участками с различной скоростью падения. Осредненная по времени концентрация пассивного скаляра на оси струи показывает короткий горизонтальный участок у входного сечения, затем резкое падение (рис. 5b). В конце участка резкого падения, как и для  $\langle u \rangle$ , наблюдается внезапный скачок при всех амплитудах  $A$ . Протяженность исходных участков кривых  $\langle c \rangle(x)$  и  $\langle u \rangle(x)$  с нулевым или слабым падением уменьшается с ростом амплитуды возмущения для всех  $A$ , что согласуется с данными [20]. Подобная корреляция с амплитудой возмущения наблюдается также при  $x/D > 7$  для  $A \leq 0,05U$ , а при больших амплитудах влияние величины  $A$  вдали от входа незаметно. В целом, немонотонное поведение функций  $\langle c \rangle(x)$  и  $\langle u \rangle(x)$  на оси струи соответствует их поведению, описанному в работах [18–24].

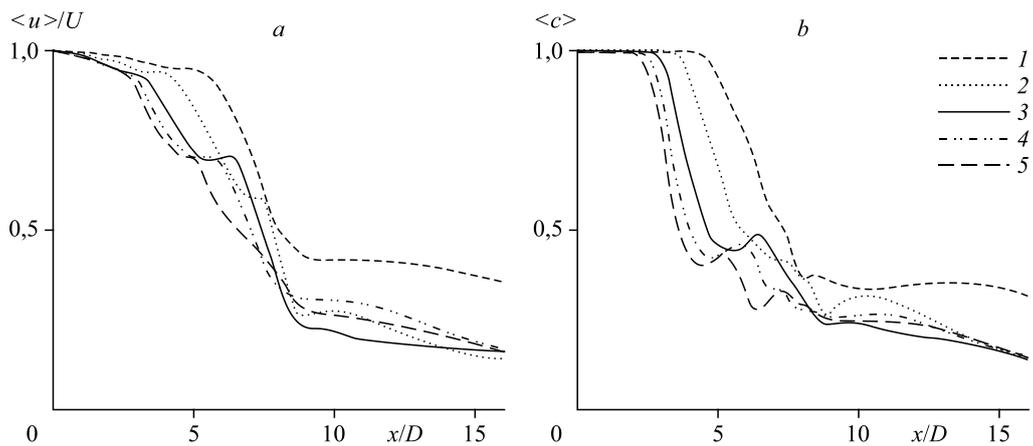


Рис. 5. Значения  $\langle u \rangle/U$  и  $\langle c \rangle$  вдоль оси струи при амплитудах воздействия  $A/U = 0,025$  (1), 0,050 (2), 0,10 (3), 0,15 (4), 0,20 (5).

### Влияние чисел Струхаля и Рейнольдса

Для выяснения оптимальных в отношении бифуркации струи параметров воздействия далее амплитуда  $A = 0,15U$  выбиралась той же, что и в работах [17, 19, 22–24], и расчеты проводились при  $Re = 750$  с вариацией числа Струхаля  $St = 2St_h$ . В исследовании [23] на основе анализа спектров было показано соответствие собственных возмущений течения (без наложенного возмущения на входе) некоторому интервалу частот около  $St = 0,5$  и предлагалось рассматривать диапазон  $0,35 \leq St \leq 0,55$ . Результаты настоящих расчетов при  $0,3 \leq St \leq 0,5$  (рис. 6) показывают наиболее четкую бифуркацию и отсутствие вторичных ответвлений при  $St = 0,4$ , а в других случаях наблюдается три и более ветвей. Средние по времени скорость и концентрация пассивного скаляра на оси (рис. 7)

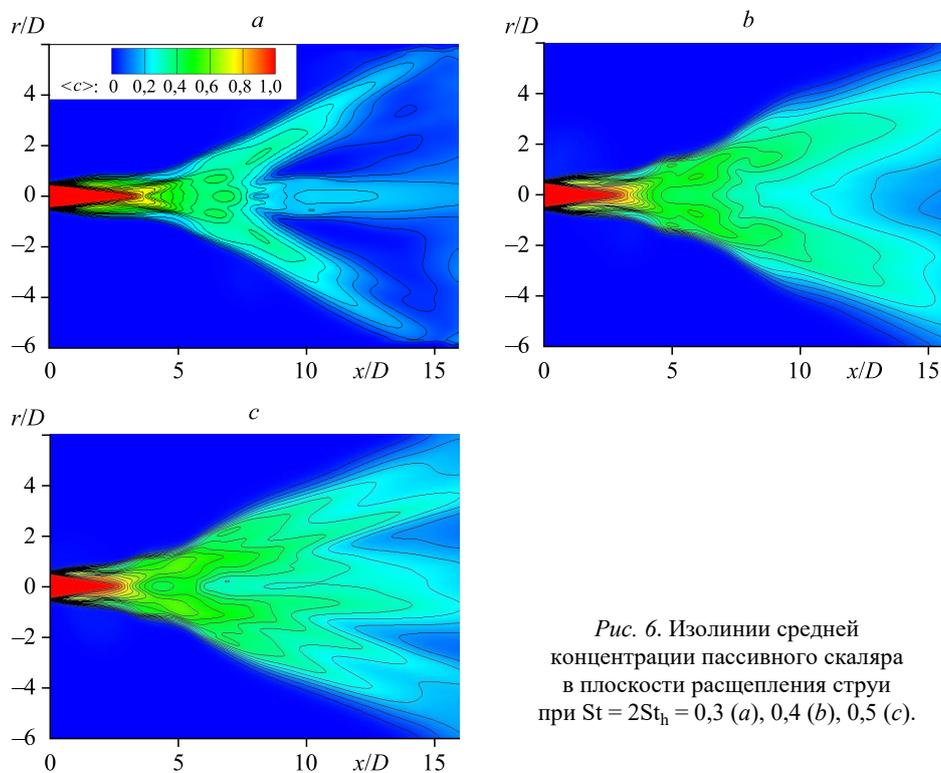


Рис. 6. Изолинии средней концентрации пассивного скаляра в плоскости расщепления струи при  $St = 2St_h = 0,3$  (a), 0,4 (b), 0,5 (c).

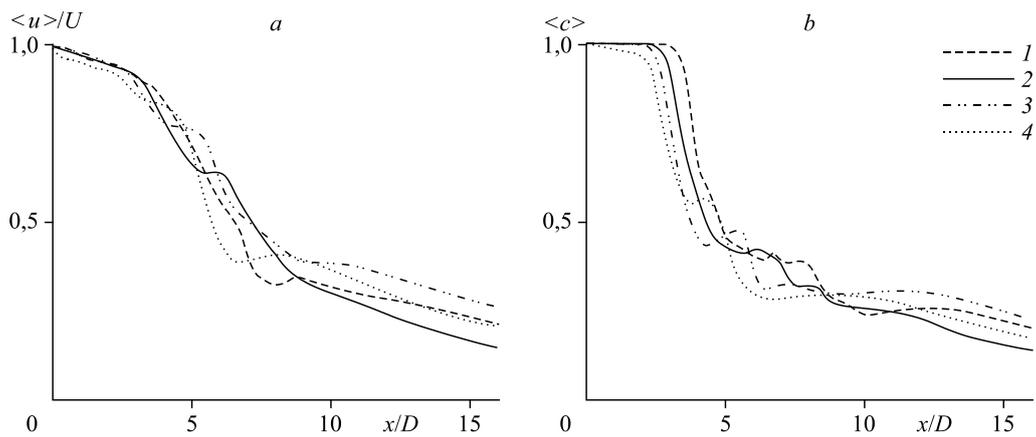


Рис. 7. Значения  $\langle u \rangle/U$  и  $\langle c \rangle$  вдоль оси струи при числах Струхала  $St = 2St_h = 0,3$  (1), 0,4 (2), 0,5 (3), 0,6 (4).

согласуются с визуализацией на рис. 6 и демонстрируют отмеченные выше особенности (см. рис. 5): существование горизонтального участка  $\langle c \rangle$ , интервалов резкого падения и локальных максимумов. Чем выше значения  $St$ , тем ниже концентрация пассивного скаляра на оси струи при  $x/D < 5$ . В интервале  $5 < x/D < 10$  поведение  $\langle c \rangle$  и  $\langle u \rangle$  более хаотично и влияние числа Струхала неочевидно. При  $x/D > 11$  величина  $\langle c \rangle$  оказывается наименьшей для  $St = 0,4$ , что подтверждает «оптимальность» сделанного выбора для наиболее четкой бифуркации при  $Re = 750$  и  $A = 0,15U$ .

В следующей серии вычислений с варьируемой амплитудой воздействия при фиксированном  $St = 0,4$  и меньшем числе Рейнольдса  $Re = 500$  было обнаружено, что угол бифуркации круглой струи с наложенными на входе возмущениями падает по сравнению со случаем  $Re = 750$  (рис. 8а). Увеличение амплитуды возмущения ( $A > 0,05U$ ) приводит к трифуркации струи (рис. 8б). Более пологие кривые осредненных по времени значений скорости и концентрации скаляра (рис. 9) также указывают на то, что течение при  $Re = 500$  реагирует на возмущение входного профиля скорости слабее, чем при  $Re = 750$ .

### Механическое воздействие

На следующем этапе, спиральное возбуждение входного профиля скорости (3) было заменено поперечной осцилляцией сопла (4), т.е. механической вибрацией входного сечения  $x = 0$  при  $A_h = 0$  в (3). Комбинация осевых и спиральных колебаний профиля входной

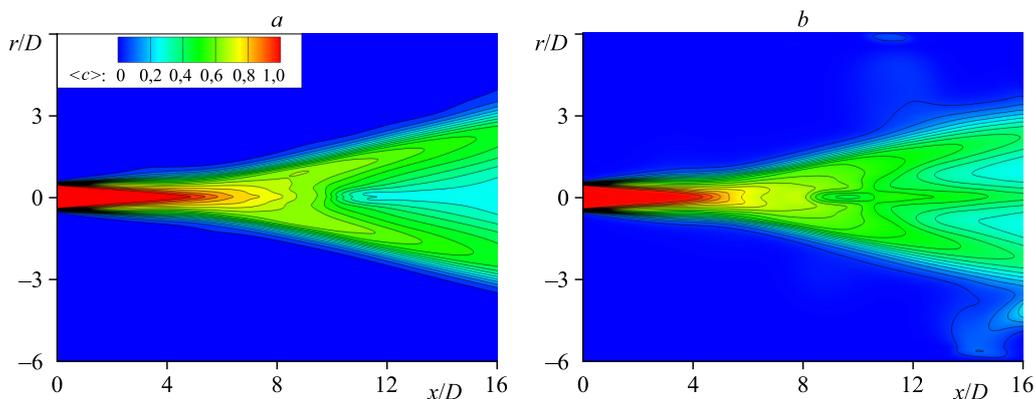


Рис. 8. Изолинии  $\langle c \rangle$  в плоскости бифуркации при  $Re = 500$ ,  $St = 0,4$ ,  $A/U = 0,05$  (а), 0,15 (б).

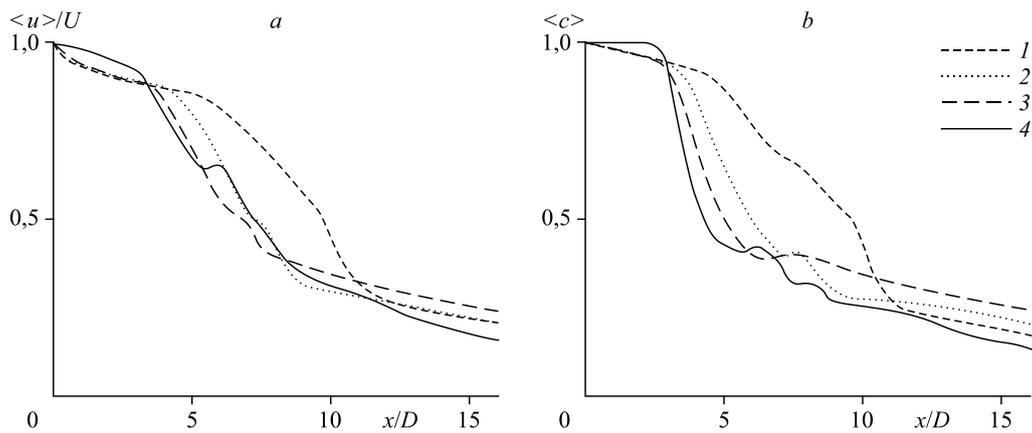


Рис. 9. Значения  $\langle u \rangle/U$  и  $\langle c \rangle$  вдоль оси струи при  $St = 2St_h = 0,4$ ,  $Re = 500$ ,  $A/U = 0,05$  (1), 0,10 (2), 0,15 (3) и при  $St = 2St_h = 0,4$ ,  $Re = 750$ ,  $A/U = 0,15$  (4).

скорости при  $f_a/f_h = 2$ , приводящих к бифуркации струи, фактически означает раскачивание распределения скорости в некоторой плоскости. Механическим воздействием на струю, аналогичным этой раскачке, является колебание сопла струи в определенном направлении с частотой  $f_v$ . Для изучения бифуркации при одновременном наложении возмущений (2) и (4) также выбираем  $f_a/f_v = 2$ . Для метода воздействия (1) – (3) амплитуда определяется относительно входной скорости. Амплитуда поперечного смещения сопла в (4) определяется относительно диаметра последнего и выбрана равной  $Z_0/D = 0,15$  (по аналогии с  $A/U = 0,15$ ). Остальные параметры воздействия приняты следующими:  $A/U = 0,15$  для осевых колебаний (2),  $Re = 750$  и  $St = 0,40$ , т.е.  $St_v = f_v D/U = 0,2 = St/2$ . Струя с колебанием (2) и вибрацией сопла (4) разделяется на две первичные ветви и две вторичные, расположенные приблизительно в одной плоскости (рис. 10). Вторичные

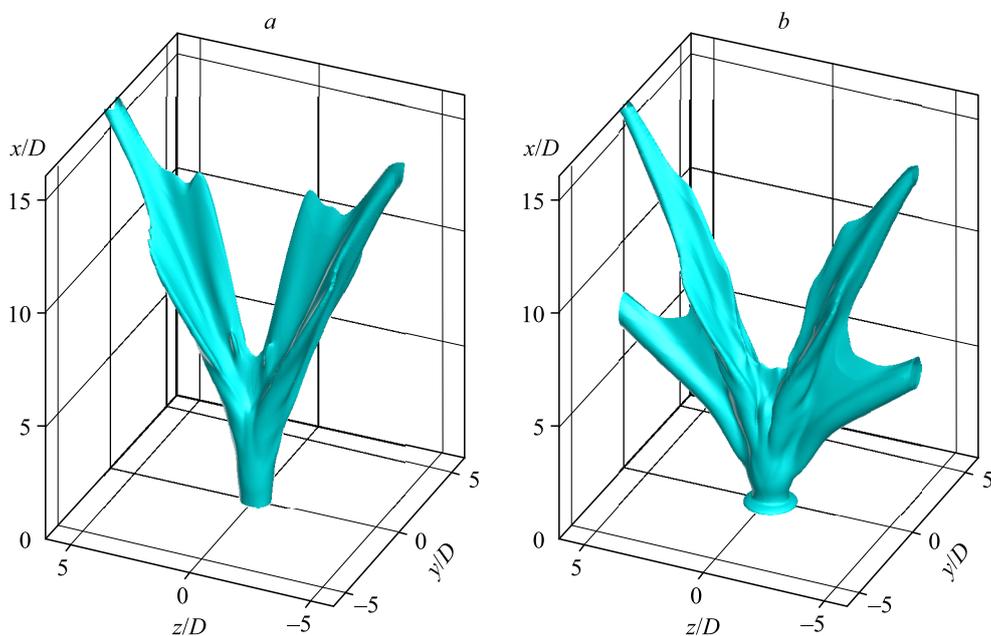


Рис. 10. Исоповерхности  $\langle u \rangle/U = 0,25$  (a) и  $\langle c \rangle = 0,25$  (b) в струе с вибрацией сопла и осевым колебанием профиля входной скорости при  $Re = 750$ ,  $St = 2St_h = 2St_v = 0,4$ ,  $Z_0/D = A/U = 0,15$ .

Рис. 11. Значения  $\langle u \rangle / U$  (1, 3) и  $\langle c \rangle$  (2, 4) на оси струи при  $Re = 750$ ,  $St/2 = St_h = St_v = 0,2$ ,  $Z_0/D = A/U = 0,15$ .

Линии 1, 2 — комбинация осевых и спиральных возмущений, заданных выражениями (2) и (3), линии 3, 4 — комбинация осевых возмущений и вибрации сопла, вводимых согласно (2) и (4).

ответвления оказываются внутри первичных на изоповерхности средней скорости и снаружи — на изоповерхности концентрации пассивного скаляра. Механическое воздействие оказывается эффективнее и приводит к большему углу бифуркации по сравнению со струей, возбуждаемой лишь путем искажения входного профиля скорости в неподвижном сопле. При этом значения скорости и скаляра на оси в области  $x/D > 5$  падают гораздо сильнее (рис. 11) при введении механических вибраций. Локальный максимум  $\langle u \rangle \approx 1,02U$  вблизи входа наблюдался также в исследовании [23].

Следующий расчет проводился при  $Re = 500$ ,  $St_v = 0,2$ ,  $Z_0/D = 0,05$  для сравнения эффективности вибраций (4) без продольных колебаний (2) (рис. 12а) и комбинации осевого и спирального возбуждения (2), (3) профиля входной скорости при аналогичной амплитуде  $A/U = 0,05$  (рис. 8а). Видно, что механическое воздействие вызывает расщепление круглой струи при  $x/D \sim 5$  и ее расширение под бóльшим углом, чем для случая спирально-осевого возмущения. Отметим, что поперечные вибрации сопла в настоящих расчетах и поперечное акустическое воздействие, рассмотренное в работах [1–3, 5–14], оказывают аналогичное влияние на входной участок струи, вызывая ее бифуркацию (рис. 1а–1д, 10, 12). Преимущество вибраций сопла относительно метода с искажением входного профиля скорости также подтверждает поведение осредненной концентрации пассивного скаляра  $\langle c \rangle$  вдоль оси. Кривые  $\langle c \rangle$  при механическом возбуждении для  $Re = 500$  демонстрируют более крутое падение, приводя ниже по потоку от сечения расщепления струи к меньшим значениям:  $\langle c \rangle < 0,1$ , которые оказываются недостижимыми при вращательном возмущении входного профиля (рис. 12б).

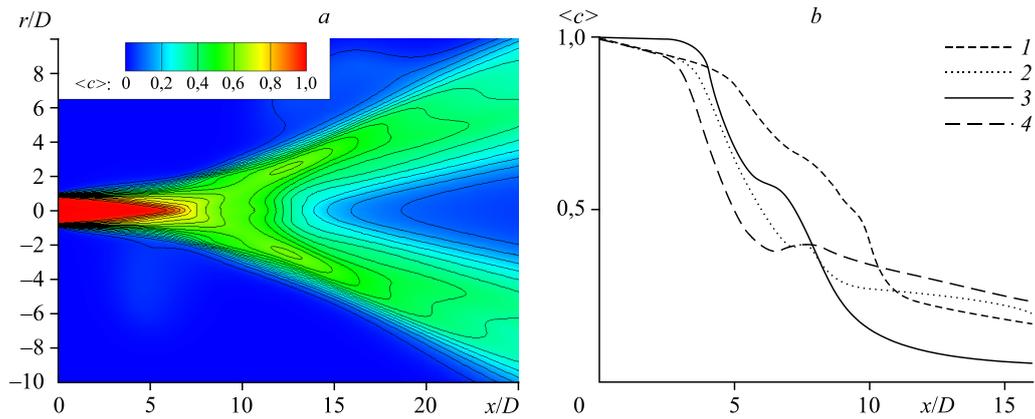
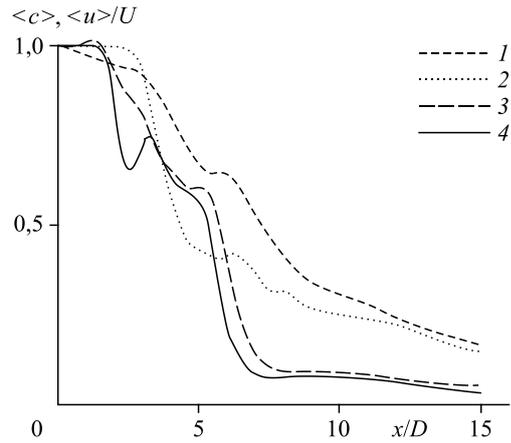


Рис. 12. Изолинии  $\langle c \rangle$  в плоскости бифуркации струи при  $Re = 500$ ,  $St_v = f_v D/U = 0,2$ ,  $Z_0/D = 0,05$  (а), а также изменения  $\langle c \rangle$  вдоль оси струи (б) с комбинацией осевых и спиральных возмущений при  $St/2 = St_h = 0,2$ ,  $A/U = 0,05$  (1), 0,10 (2), 0,15 (3) и с вибрацией сопла при  $St_v = 0,2$ ,  $Z_0/D = 0,05$  (4).

### Вихревая структура и угол бифуркации струи

Изоповерхности  $\lambda_2$  (рис. 13) иллюстрируют процесс развития и взаимного влияния вихревых колец, которые после введения гармонических возмущений смещаются поочередно (вверх и вниз) относительно оси струи. Это приводит к разрыву струи согласно описанному в работе [1] механизму, который также наблюдался и обсуждался в последующих исследованиях. Маркером красного цвета показана концентрация  $\langle c \rangle$  вещества (пассивного скаляра), вытекающего из сопла. Здесь отчетливо виден процесс взаимной индукции вихревых колец, которая вовлекает вытекающее вещество и направляет его по двум различным руслам, вызывая бифуркацию течения. Для сравнения показаны также случаи струи, где вместо гармонических колебаний (2) – (4) ко входному распределению скорости добавлено случайное возмущение «белого шума» интенсивностью  $A_n = 0,05U$  при  $Re = 500$  и  $750$ , а также  $A_n = 0,10U$  при  $Re = 250$ , что способствует проявлению собственных возмущений струи. Отметим, что в невозбужденной струе ( $A_a = A_h = A_v = 0$ ) вихревая пелена, возникающая на выходе из круглого сопла, при  $Re = 250$  не сворачивается в вихревые кольца, а трансформируется непосредственно в спиральную (синусоидальную) моду возмущений (рис. 13a), тогда как при  $Re > 250$  отчетливо видна дорожка вихревых колец (рис. 13b – 13d). В отсутствие гармонических колебаний (2) – (4) во входном сечении постепенно происходит формирование асимметричной синусоидальной моды, проявляющейся в поочередных наклонах вихревых колец (при  $Re > 250$ ) или в разрывах вихревой пелены (при  $Re = 250$ ) и в сворачивании колец или пелены в спираль, что однако не приводит к расщеплению на две ветви, как на рис. 13d.

Доминирование спиральной моды с азимутальным волновым числом  $m = 1$  по отношению к осесимметричной моде ( $m = 0$ ), отвечающей кольцевым вихрям неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, и к другим асимметричным модам ( $m \geq 2$ ) было обнаружено также в работах [32, 33] для ближней и дальней области круглой струи на основе анализа, выполненного методом POD (собственного ортогонального разложения), примененного к данным, полученным методом LES при  $Re = 5300$  и DNS при  $Re = 5940$ . Отметим, что характерное число Струхала спиральной моды  $St_s = f_s D/U$  частотой  $f_s$

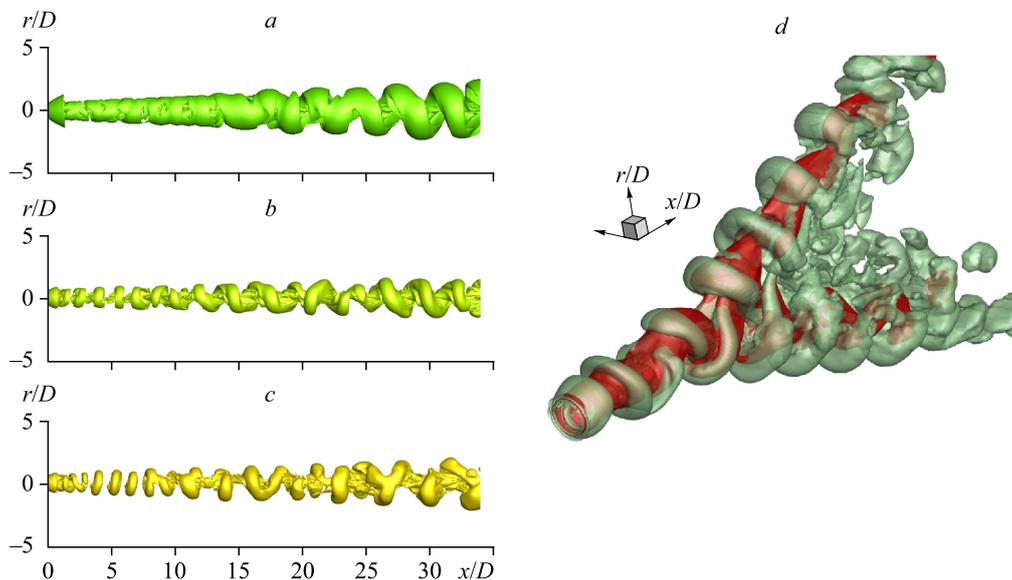


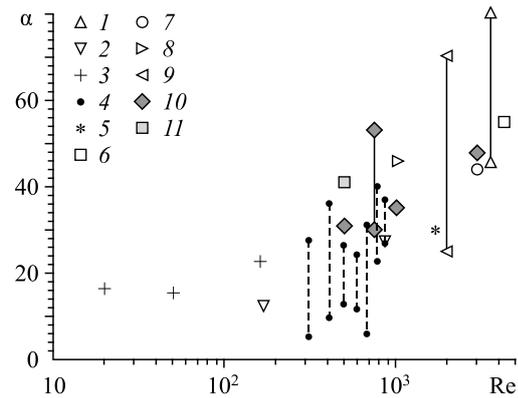
Рис. 13. Вихревая структура течения в струе без возмущений, вводимых согласно (2) – (4) при  $Re = 250$  (a),  $500$  (b),  $750$  (c) и с вибрацией сопла, задаваемой выражением (4), при  $Re = 500$  (d): изоповерхности  $\lambda_2 (D/U) = 0,3$  (a),  $15$  (b),  $25$  (c, d) и мгновенная концентрация пассивного скаляра (окрашено красным)  $\langle c \rangle = 0,4$  (d).

Рис. 14. Угол расширения  $\alpha(\text{Re})$  в плоскости бифуркации струи. Результаты физических (1 — [1], 2 — [4], 3 — [6], 4 — [11], 5 — [14]) и численных (6 — [21], 7 — [22], 8 — [19], 9 — [24]) экспериментов и данные настоящих расчетов (10 — продольные и спиральные возмущения, 11 — вибрации сопла).

быстро падает от  $St_s \approx 0,223$  при  $x/D = 6$  к значениям 0,064 при  $x/D = 20$  и 0,045 при  $x/D = 35$  [33]. Таким образом, если процессы меандрирования и бифуркации струи тесно связаны с активизацией спиральной моды (под действием внешних или собственных возмущений), то с уменьшением числа Рейнольдса кроме смещения начала процесса бифуркации струи вниз по потоку от входного сечения можно также ожидать и снижения оптимального числа Струхала, соответствующего расщеплению с максимальным углом расширения. То есть оптимальное число  $St_h = f_h D/U$  для спиральных возмущений (3) или  $St_v = f_v D/U$  для вибраций (4) сдвинется от значений  $0,2 \div 0,225$ , что соответствует числу Струхала  $St = f_a D/U = 0,4 \div 0,45$  и отношению частот  $f_a/f_h = f_a/f_v = 2$  (рис. 3–12), к меньшим значениям. Это было также подтверждено в работах [5–11], где отмечалось падение оптимальных значений числа Струхала при уменьшении  $\text{Re}$ , и была установлена восприимчивость струи (с точки зрения бифуркации) к акустическому полю при  $St \sim 10^{-4} \div 10^{-2}$  для малых чисел Рейнольдса  $\text{Re} \sim 10^1 \div 10^2$  (см. главу «Введение»).

На рис. 14 показана зависимость угла расширения  $\alpha$  в плоскости бифуркации струи от числа Рейнольдса. Оценки  $\alpha$  отличаются в различных работах (см., например, [11, 24]), однако для качественного анализа зависимости  $\alpha(\text{Re})$  пренебрежем учетом неточностей вследствие различий в определении угла расширения. В настоящей работе величина  $\alpha$  оценивается по зависимости от  $x$  характерной ширины струи, определяемой в каждом сечении  $x = \text{const}$  координатами точек, где значения  $\langle u \rangle$  (или  $\langle c \rangle$ ) равны половине максимумов средней скорости (или скаляра) в этом сечении. Вертикальные линии на рис. 14 соответствуют разбросу данных при различных параметрах (частотах и амплитудах возмущения) в одной работе с одним и тем же типом воздействия. Отметим, что нижние значения этого разброса не являются показательными, поскольку с приближением к границам диапазонов бифуркации и меандрирования угол расширения струи должен стремиться к своему аналогу для невозмущенного течения, т.е. к значениям  $1^\circ \div 2^\circ$  на ламинарном участке круглой струи и к значениям  $20^\circ \div 24^\circ$  на турбулентном участке [15]. Если минимальная величина  $\alpha$  оказывается больше, чем должно быть для невозмущенной струи, это означает, что выбранные параметры физических или численных экспериментов соответствуют диапазону бифуркации и удалены от его границ на некоторое расстояние. С другой стороны, максимум  $\alpha$  вертикального разброса данных не показывает оптимальных параметров воздействия при фиксированном числе Рейнольдса, поскольку такая оптимизация требует применения специальных методов [25, 31], которые могут привести к еще большим значениям угла бифуркации, чем на рис. 14. Значение без вертикального разброса означает относительную малость изменений  $\alpha$  при различных параметрах возмущения при  $\text{Re} = \text{const}$  или отсутствие информации об изменениях  $\alpha$ .

Анализ представленных данных (рис. 14) показывает постепенный рост угла бифуркации от  $10^\circ \div 30^\circ$  при  $20 \leq \text{Re} < 400$  до  $40^\circ \div 80^\circ$  при  $\text{Re} > 2000$ . Результаты настоящих расчетов подтверждают эту тенденцию и показывают более сильное расширение круглой струи под влиянием вибраций (4) на примере  $\text{Re} = 500$  (см. рис. 8, 12).



## Заключение

С целью получения эффекта расщепления круглой струи использовано два метода воздействия: наложение спиральных и осевых возмущений на профиль входной скорости, использование механических колебаний сопла струи. Оба метода приводят к расщеплению струи в широком диапазоне чисел Рейнольдса  $Re$ , Струхала  $St$  и амплитуды возмущения  $A$ . Показано, что угол бифуркации струи имеет тенденцию роста при увеличении  $Re$ , а вибрации сопла оказываются более эффективным методом воздействия, чем спиральные возмущения профиля скорости на входе. Для расщепления струи на три, четыре и более ветвей при помощи механического воздействия (как это происходит при  $f_a/f_h = 3, 4, 5$  или при дробном числе, например,  $f_a/f_h = 5/2$  вместо 5) предположительно можно перемещать сопло по кольцевой траектории [1] с определенной частотой (при  $f_a/f_v = 3, 4, 5/2$  и т.д.). Это утверждение представляет интерес для последующих численных экспериментов, так же как и проверка различных способов управления течением в струе при небольшом числе Рейнольдса  $Re < 500$ .

## Список литературы

1. Reynolds W.C., Parekh D.E., Juvet P.J.D., Lee M.J.D. Bifurcating and blooming jets // Annu. Rev. Fluid Mech. 2003. Vol. 35. P. 295–315.
2. Tyndall J. On the action of sonorous vibrations on gaseous and liquid jets // Philos. Mag. Series 4. 1867. Vol. 33, Iss. 224. P. 375–391.
3. Pfizenmayer E., Simon J., Monkewitz P.A. Bouquet with bifurcating jet diffusion flame // A Gallery of Fluid Motion / Eds. M. Samimy, K.S. Breuer, L.G. Leal, P.H. Steen. Cambridge University Press, 2003. P. 85.
4. Suzuki H., Kasagi N., Suzuki Y. Active control of an axisymmetric jet with distributed electromagnetic flap actuators // Exp. Fluids. 2004. Vol. 36. P. 498–509.
5. Suzuki M., Atarashi T., Masuda W. Behavior and structure of internal fuel-jet in diffusion flame under transverse acoustic excitation // Combust. Sci. Tech. 2007. Vol. 179. P. 2581–2597.
6. Козлов В.В., Грек Г.Р., Литвиненко Ю.А., Козлов Г.В., Литвиненко М.В. Дозвуковые круглая и плоская макро- и микроструи в поперечном акустическом поле // Вест. НГУ. Серия: Физика. 2010. Т. 5, вып. 2. С. 28–42.
7. Фомин В.М., Анискин В.М., Маслов А.А., Миронов С.Г., Цырюльников И.С. Газодинамическая структура течения и развитие возмущений в микроструях // Докл. РАН. 2010. Т. 433, № 5. С. 635–638.
8. Литвиненко Ю.А., Грек Г.Р., Козлов В.В., Козлов Г.В. Дозвуковая круглая и плоская макро- и микроструи в поперечном акустическом поле // Докл. РАН. 2011. Т. 436, № 1. С. 47–53.
9. Анискин В.М., Бунтин Д.А., Маслов А.А., Миронов С.Г., Цырюльников И.С. Исследование устойчивости дозвуковой микроструи // Журн. техн. физики. 2012. Т. 82, вып. 2. С. 17–23.
10. Кривокорытов М.С., Голуб В.В., Володин В.В. Влияние акустических колебаний на диффузионное горение метана // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38, вып. 10. С. 57–63.
11. Кривокорытов М.С., Голуб В.В., Моралев И.А. Развитие неустойчивостей в газовых микроструях при акустическом воздействии // Письма в ЖТФ. 2013. Т. 39, вып. 18. С. 38–44.
12. Грек Г.Р., Катасонов М.М., Козлов В.В., Коробейничев О.П., Литвиненко Ю.А., Шмаков А.Г. Особенности горения пропана в круглой и плоской макро- и микроструе в поперечном акустическом поле при малых числах Рейнольдса // Вест. НГУ. Серия: Физика. 2013. Т. 8, вып. 3. С. 98–120.
13. Козлов В.В., Грек Г.Р., Коробейничев О.П., Литвиненко Ю.А., Шмаков А.Г. Особенности горения водорода в круглой и плоской струе в поперечном акустическом поле и их сравнение с результатами горения пропана в тех же условиях // Вест. НГУ. Серия: Физика. 2014. Т. 9, вып. 1. С. 79–86.
14. Литвиненко Ю.А., Балбуцкий А.Б., Вихорев В.В., Козлов Г.В., Литвиненко М.В. Экспериментальное исследование развития гидродинамической неустойчивости в круглой микроструе пропана при воздействии внешнего акустического поля с горением и без горения // Вест. НГУ. Серия: Физика. 2015. Т. 10, вып. 4. С. 21–28.
15. Леманов В.В., Терехов В.И., Шаров К.А., Шумейко А.А. Экспериментальное исследование микроструй // Вест. Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (5). С. 2305–2307.
16. Козлов Г.В., Грек Г.Р., Сорокин А.М., Литвиненко Ю.А. Влияние начальных условий на срезе сопла на структуру течения и устойчивость плоской струи // Вест. НГУ. Серия: Физика. 2008. Т. 3, вып. 3. С. 14–33.
17. Danaila I., Voersma B.J. Direct numerical simulation of bifurcating jets // Phys. Fluids. 2000. Vol. 12, No. 5. P. 1255–1257.
18. Tyliczszak A., Boguslawski A. LES of variable density bifurcating jets // Complex Effects in Large Eddy Simulations / Eds. S.C. Kassinos, C.A. Langer, G. Iaccarino, P. Moin. Lecture Notes in Computational Sci. Engng. 2007. Vol. 56. P. 273–288.

19. Gohil T.B., Saha A.K., Muralidhar K. Control of flow in forced jets: a comparison of round and square cross-sections // J. Visualization. 2010. Vol. 13. P. 141–149.
20. Gohil T.B., Saha A.K., Muralidhar K. Simulation of the blooming phenomenon in forced circular jets // J. Fluid Mech. 2015. Vol. 783. P. 567–604.
21. Tyliczszak A., Geurts B.J. Parametric analysis of excited round jets — numerical study // Flow, Turbulence and Combustion. 2014. Vol. 93. P. 221–247.
22. Tyliczszak A. Multi-armed jets: a subset of the blooming jets // Phys. Fluids. 2015. Vol. 27. P. 041703-1–041703-7.
23. Tyliczszak A. Parametric study of multi-armed jets // Intern. J. Heat and Fluid Flow. 2018. Vol. 73. P. 82–100.
24. Gohil T.B., Saha A.K. Numerical simulation of forced circular jets: effect of flapping perturbation // Phys. Fluids. 2019. Vol. 31. P. 083602-1–083602-20.
25. Shaabani-Ardali L., Sipp D., Lesshafft L. Optimal triggering of jet bifurcation: an example of optimal forcing applied to a time-periodic base flow // J. Fluid Mech. 2020. Vol. 885. P. A34-1–A34-37.
26. Леманов В.В., Терехов В.И., Шаров К.А., Шумейко А.А. Экспериментальное исследование затопленных струй при низких числах Рейнольдса // Письма в ЖТФ. 2013. Т. 39, вып. 9. С. 34–40.
27. Шевченко А.К., Яковенко С.Н. Моделирование развития неустойчивости в плоской затопленной струе при небольших числах Рейнольдса // Сибирский физический журнал. 2018. Т. 13, № 4. С. 35–45.
28. Shevchenko A.K., Yakovenko S.N. Instability development in submerged laminar plane jet // AIP Conf. Proc. 2019. Vol. 2125. P. 030046-1–030046-5.
29. Shevchenko A.K., Strijhak S.V., Yakovenko S.N. Numerical simulation of jet flows in homogeneous and heterogeneous media // J. Phys. Conf. Ser. 2019. Vol. 1404. P. 012122-1–012122-6.
30. Яковенко С.Н. Нестационарные численные решения для плоской струи, истекающей из узкой щели в затопленном пространстве // Теплофизика и аэромеханика. 2019. Т. 26, № 5. С. 761–772.
31. Koumoutsakos P., Freund J., Parekh D. Evolution strategies for automatic optimization of the jet mixing // AIAA J. 2001. Vol. 39. P. 967–969.
32. Mullyadzhano R., Abdurakipov S., Hanjalić K. Helical structures in the near field of a turbulent pipe jet // Flow, Turbulence and Combustion. 2017. Vol. 98. P. 367–388.
33. Mullyadzhano R.I., Sandberg R.D., Abdurakipov S.S., George W.K., Hanjalić K. Propagating helical waves as a building block of round turbulent jets // Phys. Rev. Fluids. 2018. Vol. 3. P. 062601-1–062601-9.

*Статья поступила в редакцию 14 февраля 2021 г.,  
после доработки — 19 марта 2021 г.,  
принята к публикации 23 марта 2021 г.*