ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА И ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, 1995, т. 36, № 5

УДК 539.3 : 517.958

ОПЕРАТОРЫ СИММЕТРИИ И ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ*

Н. И. Остросаблин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

В теории упругости известны [1–13] различные варианты общих решений, т. е. представлений напряжений или смещений через произвольные независимые функции (например, гармонические и бигармонические) таким образом, чтобы уравнения равновесия или движения удовлетворялись тождественно. Чаще всего используются общие решения Кельвина — Ламе [13], Галеркина [6], Папковича — Нейбера [1, 3, 4]. Вопрос об общности и полноте этих решений обсуждался во многих работах (см., например, [2–5, 8, 9, 14–24]).

В данной работе на примере уравнений линейной теории упругости показано, что каждому общему решению соответствует формула производства новых решений, т. е. некоторый оператор симметрии [25]. Для изотропного материала найдены операторы симметрии для решений Кельвина — Ламе, Галеркина, Папковича — Нейбера и доказана общность этих решений. Некоторые другие операторы симметрии приведены в [26, 27].

Рассмотрим линейные дифференциальные операторы вида

$$A_{ij} = a_{ij}(x_s) + a_{ijk}(x_s)\partial_k + a_{ij(kl)}(x_s)\partial_{kl} + a_{ij(klm)}(x_s)\partial_{klm} + \ldots \qquad (1)$$

и формально сопряженные операторы

$$A^*_{ji} = a_{ij}(x_s) - \partial_k a_{ijk}(x_s) + \partial_{kl} a_{ij(kl)}(x_s) - \partial_{klm} a_{ij(klm)}(x_s) + \ldots \qquad (2)$$

Здесь x_s — независимые переменные; ∂_k — производные по переменной x_k; повторяющиеся буквенные индексы означают суммирование, а индексы в круглых скобках — симметрическую функцию этих индексов.

Допустим, что $A^* = A$, $D^* = D$ и $AC = BD$, тогда $C^*A = DB^*$. При заданных A и B всегда можно найти [28] операторы C, D, удовлетворяющие этим соотношениям.

Если $u = C\varphi$, где $D\varphi = 0$, то выполняется уравнение

$$Au = AC\varphi = BD\varphi = 0. \qquad (3)$$

Если же $\varphi = B^*\tilde{u}$, где $A\tilde{u} = 0$, то справедливо уравнение

$$D\varphi = DB^*\tilde{u} = C^*A\tilde{u} = 0. \qquad (4)$$

Таким образом, по формулам

$$u = C\varphi, \qquad \varphi = B^*\tilde{u} \qquad (5)$$

решения уравнений (3), (4) переходят друг в друга. Если $A\tilde{u} = 0$, то из (3)–(5) следует, что $u = CB^*\tilde{u}$ — новое решение:

$$Au = ACB^*\tilde{u} = BDB^*\tilde{u} = BC^*A\tilde{u} = 0. \qquad (6)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-01-16757).

Для линейных уравнений $Au = 0$ оператор Q называют оператором симметрии [29], если $AQ - QA = RA$. Оператор симметрии переводит решение уравнения $A\tilde{u} = 0$ в новое решение $u = Q\tilde{u}$: $Au = AQ\tilde{u} = (Q + R)A\tilde{u} = 0$. Отсюда и из (6) видно, что $Q = CB^*$ — оператор симметрии, причем $R = BC^* - CB^*$.

Общее решение уравнения (3) имеет вид

$$u = C\varphi, \qquad D\varphi = f, \qquad Bf = 0, \tag{7}$$

где $f \in \mathrm{Ker}B = \{f, Bf = 0\}$. Если операторы такие, что $D\mathrm{Ker}C = \mathrm{Ker}B$, то общее решение уравнения (3) есть [28]

$$u = C\varphi, \qquad D\varphi = 0. \tag{8}$$

Действительно, существует ψ такая, что $u = C\psi$, $D\psi = f$, $Bf = 0$. Так как $D\mathrm{Ker}C = \mathrm{Ker}B$, то существует $g \in \mathrm{Ker}C$ такая, что $f = Dg$. Тогда $D(\psi - g) = 0$, $u = C(\psi - g)$. Обозначая $\varphi = \psi - g$, получим (8).

Таким образом, общие решения уравнения $Au = 0$ основаны на соотношении $AC = BD$ и даются формулами (7) или (8). Каждому общему решению соответствует формула производства новых решений $u = CB^*\tilde{u}$, или оператор симметрии $Q = CB^*$. Изложенный подход позволяет находить операторы симметрии вида $Q = CB^*$, а если известен оператор симметрии Q, который можно представить в таком виде, то можно найти [28] оператор D и получить общее решение (7) или (8).

Известные в теории упругости общие решения обычно записывают в форме (8), не проверяя выполнение условия $D\mathrm{Ker}C = \mathrm{Ker}B$. Но если это условие не выполнено, то (8) не будет общим или полным решением, так как при этом теряются решения, соответствующие неоднородному уравнению $D\varphi = f \in \mathrm{Ker}B$. Далее проверим условие $D\mathrm{Ker}C = \mathrm{Ker}B$ и найдем операторы симметрии $Q = CB^*$ в случае изотропного материала для решений Кельвина — Ламе, Галеркина, Папковича — Нейбера.

В классическом решении Кельвина — Ламе [13] для оператора

$$A_{ij} = A_{ji} = (\lambda + \mu)\partial_{ij} + (\mu\partial_{kk} - \rho\partial_{..})\delta_{ij} = A^*_{ji} \tag{9}$$

(λ, μ — постоянные Ламе, ρ — постоянная плотность материала, δ_{ij} — символ Кронекера, $\partial.$ — производная по времени) смещения u_j представляются так:

$$\begin{aligned} &u_j = \partial_j\varphi + \varepsilon_{jps}\partial_p\psi_s, \qquad \partial_i\psi_i = 0, \\ &[(\lambda + 2\mu)\partial_{kk} - \rho\partial_{..}]\varphi = 0, \quad (\mu\partial_{kk} - \rho\partial_{..})\psi_s = 0, \qquad s = 1,2,3 \end{aligned} \tag{10}$$

(ε_{jps} — символы Леви-Чевита). Из (10) получаем

$$C = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ \partial_2 & \partial_3 & 0 & -\partial_1 \\ \partial_3 & -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^* = -\begin{bmatrix} \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ 0 & \partial_3 & -\partial_2 \\ -\partial_3 & 0 & \partial_1 \\ \partial_2 & -\partial_1 & 0 \end{bmatrix} = -C' \tag{11}$$

(штрих означает транспонирование матрицы). Найдем AC, для этого подставим u_j из (10) в (9):

$$\begin{aligned} A_{ij}u_j &= [(\lambda + \mu)\partial_{ij} + (\mu\partial_{kk} - \rho\partial_{..})\delta_{ij}](\partial_j\varphi + \varepsilon_{jps}\partial_p\psi_s) = \\ &= [(\lambda + 2\mu)\partial_{kk} - \rho\partial_{..}]\partial_i\varphi + (\mu\partial_{kk} - \rho\partial_{..})\varepsilon_{ips}\partial_p\psi_s. \end{aligned} \tag{12}$$

Из (12) видно, что

$$AC = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ \partial_2 & \partial_3 & 0 & -\partial_1 \\ \partial_3 & -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} (\lambda+2\mu)\partial_{kk} - \rho\partial_{..} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu\partial_{kk} - \rho\partial_{..} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu\partial_{kk} - \rho\partial_{..} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu\partial_{kk} - \rho\partial_{..} \end{bmatrix} =$$

$$= CD = BD,$$

т. е. $B = C$ и $B^* = C^* = -C'$, а D — диагональная матрица. Из соотношения $C^*A = DB^*$ следует $-C'A = D(-C')$, $C'A = DC'$. Тогда $\varphi = C'\tilde{u}$ и $D\varphi = DC'\tilde{u} = C'A\tilde{u} = 0$.

Теперь с учетом (11) запишем φ, ψ_j через $\tilde{u}$:

$$\varphi = \partial_i \tilde{u}_i, \qquad \psi_j = -\varepsilon_{jps}\partial_p \tilde{u}_s. \tag{13}$$

Так как $u = C\varphi$, $\varphi = C'\tilde{u}$, то $u = CC'\tilde{u}$ — новое решение: $Au = ACC'\tilde{u} = CDC'\tilde{u} = CC'A\tilde{u} = 0$. Из (10), (13) получаем формулу производства решений:

$$u_j = \partial_j \partial_i \tilde{u}_i + \varepsilon_{jps}\partial_p(-\varepsilon_{smn}\partial_m \tilde{u}_n) = \delta_{jn}\partial_{pp}\tilde{u}_n = \partial_{pp}\tilde{u}_j, \tag{14}$$

причем $Q = CC' = \delta_{jn}\partial_{pp}$ — оператор симметрии, а $\tilde{u}_j$ — решение уравнения

$$[(\lambda+\mu)\partial_{ij} + (\mu\partial_{kk} - \rho\partial_{..})\delta_{ij}]\,\tilde{u}_j = 0. \tag{15}$$

Из (13) следует, что всегда выполняется второе уравнение (10):

$$\partial_j \psi_j = -\partial_j \varepsilon_{jps}\partial_p \tilde{u}_s = -\varepsilon_{jps}\partial_{jp}\tilde{u}_s \equiv 0.$$

Ядро оператора $C = B$ определяется из уравнений

$$Cg = \begin{bmatrix} \partial_1 g + \partial_2 g_3 - \partial_3 g_2 \\ \partial_2 g + \partial_3 g_1 - \partial_1 g_3 \\ \partial_3 g + \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1 \end{bmatrix} = 0,$$

решение которых, как несложно проверить, следующее:

$$g = \partial_i f_i, \qquad \partial_{kk} f_i = 0, \qquad g_s = \partial_s f - \varepsilon_{smn}\partial_m f_n \tag{16}$$

(f — произвольная функция). Находим теперь $p = Dg$:

$$p = [(\lambda+2\mu)\partial_{kk} - \rho\partial_{..}]\partial_i f_i = \partial_i[(\lambda+2\mu)\partial_{kk} - \rho\partial_{..}]f_i = \partial_i(-\rho\partial_{..}f_i),$$

$$\begin{aligned} p_s &= (\mu\partial_{kk} - \rho\partial_{..})(\partial_s f - \varepsilon_{smn}\partial_m f_n) = \\ &= \partial_s[(\mu\partial_{kk} - \rho\partial_{..})f] - \varepsilon_{smn}\partial_m[(\mu\partial_{kk} - \rho\partial_{..})f_n] = \\ &= \partial_s[(\mu\partial_{kk} - \rho\partial_{..})f] - \varepsilon_{smn}\partial_m(-\rho\partial_{..}f_n). \end{aligned}$$

Обозначая здесь $q = (\mu\partial_{kk} - \rho\partial_{..})f$, $q_i = -\rho\partial_{..}f_i$, получим, что $D\mathrm{Ker}C$ имеет вид (16)

$$p = \partial_i q_i, \qquad \partial_{kk} q_i = 0, \qquad p_s = \partial_s q - \varepsilon_{smn}\partial_m q_n.$$

Это означает, что $D\mathrm{Ker}\,C = \mathrm{Ker}B = \mathrm{Ker}\,C$, решение Кельвина —Ламе полное и его достаточно записывать в виде (10), причем имеют место формулы (13)–(15).

Отметим, что в статике, как видно из (10), функции φ, ψ_s гармонические, и тогда $\partial_j u_j = \partial_{jj}\varphi = \partial_{jj}\partial_i\widetilde{u}_i = 0$, т. е. нет изменения объема. Это связано с тем, что по формуле (14) произвольное решение $\widetilde{u}_j$ переводится в решение u_j, не изменяющее объем.

Рассмотрим теперь решение Галеркина [6], которое запишем как [10]

$$\begin{aligned} u_j &= C_{jk}\varphi_k = [-(\lambda+\mu)\partial_{jk} + ((\lambda+2\mu)\partial_{ss} - \rho\partial_{..})\delta_{jk}]\varphi_k, \\ D_{jk}\varphi_k &= (\mu\partial_{pp} - \rho\partial_{..})((\lambda+2\mu)\partial_{ss} - \rho\partial_{..})\delta_{jk}\varphi_k = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

В (17), очевидно, $C^*_{kj} = C_{jk}$. Далее находим

$$\begin{aligned} A_{ij}C_{jk} &= [(\lambda+\mu)\partial_{ij} + (\mu\partial_{pp} - \rho\partial_{..})\delta_{ij}][-(\lambda+\mu)\partial_{jk}+ \\ &\qquad +((\lambda+2\mu)\partial_{ss} - \rho\partial_{..})\delta_{jk}] = \\ &= (\mu\partial_{pp} - \rho\partial_{..})((\lambda+2\mu)\partial_{ss} - \rho\partial_{..})\delta_{ij}\delta_{jk} = B_{ij}D_{jk}. \end{aligned} \tag{18}$$

Из (18) вытекает, что возможны следующие варианты:

1) $B_{ij} = \delta_{ij}, \qquad D_{jk} = (\mu\partial_{pp} - \rho\partial_{..})((\lambda+2\mu)\partial_{ss} - \rho\partial_{..})\delta_{jk};$

2) $B_{ij} = (\mu\partial_{pp} - \rho\partial_{..})\delta_{ij}, \qquad D_{jk} = ((\lambda+2\mu)\partial_{ss} - \rho\partial_{..})\delta_{jk};$

3) $B_{ij} = ((\lambda+2\mu)\partial_{ss} - \rho\partial_{..})\delta_{ij}, \qquad D_{jk} = (\mu\partial_{pp} - \rho\partial_{..})\delta_{jk};$

4) $B_{ij} = (\mu\partial_{pp} - \rho\partial_{..})((\lambda+2\mu)\partial_{ss} - \rho\partial_{..})\delta_{ij}, \qquad D_{jk} = \delta_{jk}.$

Варианты 1, 4 равносильны, и им соответствует решение (17), причем с учетом вышеизложенного получаем

$$\begin{aligned} \varphi_j &= B^*_{ji}\widetilde{u}_i = B_{ij}\widetilde{u}_i = \delta_{ij}\widetilde{u}_i = \widetilde{u}_j, \\ A_{ij}\widetilde{u}_j &= [(\lambda+\mu)\partial_{ij} + (\mu\partial_{kk} - \rho\partial_{..})\delta_{ij}]\widetilde{u}_j = 0; \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} u_j &= C_{jk}B^*_{ki}\widetilde{u}_i = C_{jk}B_{ik}\widetilde{u}_i = C_{jk}\delta_{ik}\widetilde{u}_i = C_{jk}\widetilde{u}_k = \\ &= [-(\lambda+\mu)\partial_{jk} + ((\lambda+2\mu)\partial_{ss} - \rho\partial_{..})\delta_{jk}]\widetilde{u}_k. \end{aligned} \tag{20}$$

Формулы (17) — это обычное решение Галеркина, (19) — выражение φ_j через $\widetilde{u}_j$, (20) — формула производства новых решений (C_{jk} — оператор симметрии).

Для варианта 2 аналогично находим

$$u_j = C_{jk}\varphi_k, \qquad D_{jk}\varphi_k = ((\lambda+2\mu)\partial_{ss} - \rho\partial_{..})\delta_{jk}\varphi_k = 0; \tag{21}$$

$$\varphi_j = B^*_{ji}\widetilde{u}_i = B_{ij}\widetilde{u}_i = (\mu\partial_{pp} - \rho\partial_{..})\delta_{ij}\widetilde{u}_i = (\mu\partial_{pp} - \rho\partial_{..})\widetilde{u}_j,$$

$$\begin{aligned} A_{ij}\widetilde{u}_j = 0, \qquad u_j &= C_{jk}B^*_{ki}\widetilde{u}_i = C_{jk}B_{ik}\widetilde{u}_i = \\ &= C_{jk}(\mu\partial_{pp} - \rho\partial_{..})\delta_{ik}\widetilde{u}_i = C_{jk}(\mu\partial_{pp} - \rho\partial_{..})\widetilde{u}_k. \end{aligned} \tag{22}$$

В (21) φ_j удовлетворяют волновому уравнению, а не произведению двух волновых операторов, как в (17). Но зато в (22) появился множитель $(\mu\partial_{pp} - \rho\partial_{..})$.

Для варианта 3 имеем

$$u_j = C_{jk}\varphi_k, \qquad D_{jk}\varphi_k = (\mu\partial_{pp} - \rho\partial_{..})\delta_{jk}\varphi_k = 0; \tag{23}$$

$$\varphi_j = B^*_{ji}\widetilde{u}_i = B_{ij}\widetilde{u}_i = ((\lambda+2\mu)\partial_{ss} - \rho\partial_{..})\delta_{ij}\widetilde{u}_i = ((\lambda+2\mu)\partial_{ss} - \rho\partial_{..})\widetilde{u}_j,$$

$$\begin{aligned} A_{ij}\widetilde{u}_j = 0, \qquad u_j &= C_{jk}B^*_{ki}\widetilde{u}_i = C_{jk}B_{ik}\widetilde{u}_i = \\ &= C_{jk}((\lambda+2\mu)\partial_{ss} - \rho\partial_{..})\delta_{ik}\widetilde{u}_i = C_{jk}((\lambda+2\mu)\partial_{ss} - \rho\partial_{..})\widetilde{u}_k. \end{aligned} \tag{24}$$

Формулы (23), (24) аналогичны (21), (22), только множители $(\mu\partial_{pp}-\rho\partial_{..})$ и $((\lambda+2\mu)\partial_{ss}-\rho\partial_{..})$ поменялись местами.

Таким образом, для решения Галеркина возможны три варианта формул, которые мы выписали выше. Так как для решения (17) $B_{ij}f_j=\delta_{ij}f_j=f_i=0$, то формы записи (7) и (8) совпадают и решение (17) общее. Решения (21) и (23) станут полными, если их записать в виде (7), где B, D соответствуют вариантам 2 или 3.

Решение Папковича — Нейбера [1, 3, 4] для изотропного материала в случае статики запишем как [27]

$$\begin{gathered} u_j=C_{jk}\varphi_k=(1+2\mu_1)\varphi_j-x_1\partial_j\varphi_1-x_2\partial_j\varphi_2-x_3\partial_j\varphi_3-\partial_j\varphi_4,\\ D_{jk}\varphi_k=(1+\mu_1)\partial_{pp}\varphi_j=0,\qquad \mu_1=\mu/(\lambda+\mu), \end{gathered}\tag{25}$$

при этом соответствующие операторы имеют вид

$$\begin{gathered} A_{ij}=\partial_{ij}+\mu_1\delta_{ij}\partial_{ss}=A^*_{ji},\\ C_{jk}=(1+2\mu_1)\delta_{jk}-x_k\partial_j,\qquad C^*_{kj}=2(1+\mu_1)\delta_{jk}+x_k\partial_j,\\ B_{ij}=(2\mu_1-1)\delta_{ij}-x_j\partial_i,\qquad B^*_{ji}=2\mu_1\delta_{ij}+x_j\partial_i,\\ D_{jk}=(1+\mu_1)\delta_{jk}\partial_{pp}=D^*_{kj},\qquad x_4=1,\qquad \partial_4=0 \end{gathered}\tag{26}$$

и выполняются соотношения $AC=BD$, $C^*A=DB^*$. Из (26) получаем выражение функций φ_j через решение уравнений Ламе и формулу производства новых решений (оператор симметрии):

$$\begin{gathered} \varphi_j=B^*_{ji}\tilde u_i=2\mu_1\tilde u_j+x_j\partial_i\tilde u_i,\qquad \tilde u_4=0,\\ A_{ij}\tilde u_j=\partial_{ij}\tilde u_j+\mu_1\partial_{ss}\tilde u_i=0,\\ u_j=C_{jk}B^*_{ki}\tilde u_i=\{2\mu_1[(1+2\mu_1)\delta_{ji}+x_j\partial_i-x_i\partial_j]-x_kx_k\partial_{ji}\}\tilde u_i=\\ =2\mu_1[(1+2\mu_1)\tilde u_j+x_j\partial_i\tilde u_i-x_i\partial_j\tilde u_i]-(x_1^2+x_2^2+x_3^2+1)\partial_{ji}\tilde u_i. \end{gathered}\tag{27}$$

Из (27) следует, что функции φ_j связаны между собой соотношением

$$\partial_j\varphi_j=2\mu_1\varphi_4+\partial_j(x_j\varphi_4).\tag{28}$$

Покажем общность решения (25), т. е. проверим условие $D\mathrm{Ker}C=\mathrm{Ker}B$. Ядро оператора C определяется из уравнений

$$\begin{gathered} C_{jk}g_k=[(1+2\mu_1)\delta_{jk}-x_k\partial_j]g_k=\\ =[2(1+\mu_1)\delta_{jk}-\partial_jx_k]g_k=2(1+\mu_1)g_j-\partial_jx_kg_k=0. \end{gathered}$$

Эти уравнения будут выполняться, если g_j взять в виде

$$\begin{gathered} g_j=\partial_jg,\qquad j=1,2,3,\\ g_4=-x_ig_i+2(1+\mu_1)g,\qquad i\leqslant 3 \end{gathered}\tag{29}$$

(g — произвольная функция), т. е. (29) и есть $\mathrm{Ker}C$.

Для оператора B ядро находится из уравнений

$$B_{ij}f_j=[(2\mu_1-1)\delta_{ij}-x_j\partial_i]f_j=(2\mu_1\delta_{ij}-\partial_ix_j)f_j=2\mu_1f_i-\partial_ix_jf_j=0,$$

которые будут всегда выполнены, если положить

$$\begin{gathered} f_i=\partial_if,\qquad i=1,2,3,\\ f_4=-x_sf_s+2\mu_1f,\qquad s\leqslant 3 \end{gathered}\tag{30}$$

(f — произвольная функция), т. е. (30) и есть Ker$B$. Очевидно, что C получается из B заменой коэффициента μ_1 на $1 + \mu_1$, замена аналогична и для ядер (29) и (30).

Найдем теперь DKer$C$:

$$
\begin{aligned}
&D_{jk}g_k = (1+\mu_1)\partial_{pp}g_j,\\
&(1+\mu_1)\partial_{pp}g_j = (1+\mu_1)\partial_{pp}\partial_j g = \partial_j[(1+\mu_1)\partial_{pp}g], \qquad j = 1,2,3,\\
&(1+\mu_1)\partial_{pp}g_4 = (1+\mu_1)\partial_{pp}[-x_i g_i + 2(1+\mu_1)g] =\\
&\qquad\qquad = (1+\mu_1)(-x_i\partial_{pp}g_i + 2\mu_1\partial_{pp}g), \qquad i \leqslant 3.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Если в (31) обозначить

$$
\begin{aligned}
&f = (1+\mu_1)\partial_{pp}g,\\
&f_i = (1+\mu_1)\partial_{pp}g_i = \partial_i[(1+\mu_1)\partial_{pp}g] = \partial_i f, \qquad i = 1,2,3,\\
&f_4 = (1+\mu_1)\partial_{pp}g_4 = -x_i(1+\mu_1)\partial_{pp}g_i + 2\mu_1(1+\mu_1)\partial_{pp}g =\\
&\qquad\qquad = -x_i f_i + 2\mu_1 f, \qquad i \leqslant 3,
\end{aligned}
$$

то (31) принимает вид (30), т. е. получаем, что DKer$C$ = Ker$B$.

Таким образом, решение Папковича — Нейбера общее и полное, т. е. в форме записи (25) содержатся все решения уравнений Ламе. Из (27), (28) следует, что функцию φ_4 нельзя в общем случае полагать равной нулю, как это пытались сделать многие авторы, начиная с П. Ф. Папковича [2, 3]. Причем значения коэффициента Пуассона $\nu = -3/4;\ -1/2;\ -1/4;\ 0;\ 1/4$ не являются какими-то исключительными, они связаны с попытками [3, 15, 16, 21] доказать общность решения Папковича — Нейбера в случае $\varphi_4 = 0$.

Работа доложена на Секции «Математическое моделирование» Международной конференции по прикладной и индустриальной математике, посвященной памяти лауреата Нобелевской премии Л. В. Канторовича (Новосибирск, 25–29 июля 1994 г.).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Папкович П. Ф.** Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции // Изв. АН СССР. Сер. 7. Отд-ние мат. и естеств. наук. 1932. № 10. С. 1425–1435.
2. **Папкович П. Ф.** Обзор некоторых общих решений основных дифференциальных уравнений покоя изотропного тела // Прикл. математика и механика. 1937. Т. 1, вып. 1. С. 117–132.
3. **Папкович П. Ф.** Теория упругости. Л.; М.: Оборонгиз, 1939.
4. **Нейбер Г.** Концентрация напряжений. М.; Л.: ОГИЗ; Гостехиздат, 1947.
5. **Крутков Ю. А.** Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949.
6. **Галеркин Б. Г.** Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР, 1952. Т. 1.
7. **Байда Э. Н.** Общие решения теории упругости и задачи о параллелепипеде и цилиндре. Л.: Госстройиздат, 1961.
8. **Малиев А. С.** О выборе функций в общих решениях задачи равновесия изотропного упругого тела // Сб. науч. тр. / Ленинград. электротехн. ин-т инж. жел.-дор. транспорта. 1952. Вып. 4. С. 180–244.
9. **Остросаблин Н. И.** Общее представление решения уравнений линейной теории упругости изотропного тела // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1983. Вып. 61. С. 77–91.

10. **Остросаблин Н. И.** К общему решению уравнений линейной теории упругости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1989. Вып. 92. С. 62–71.

11. **Marguerre K.** Ansätze zur Lösung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie // Z. angew. Math. und Mech. 1955. Bd 35, H. 6/7. S. 242–263.

12. **Truesdell C.** Invariant and complete stress functions for general continua // Arch. Ration. Mech. and Anal. 1959. V. 4, N 1. P. 1–29.

13. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.

14. **Слободянский М. Г.** Общие формы решений уравнений упругости для односвязных и многосвязных областей, выраженные через гармонические функции // Прикл. математика и механика. 1954. Т. 18, вып. 1. С. 55–74.

15. **Слободянский М. Г.** Об общих и полных формах решений уравнений упругости // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23, вып. 3. С. 468–482.

16. **Eubanks R. A., Sternberg E.** On the completeness of the Boussinesq — Papkovich stress functions // J. Ration. Mech. and Anal. 1956. V. 5, N 5. P. 735–746.

17. **Naghdi P. M., Hsu C. S.** On a representation of displacements in linear elasticity in terms of three stress functions // J. Math. and Mech. 1961. V. 10, N 2. P. 233–245.

18. **Gurtin M. E.** On Helmholtz's theorem and the completeness of the Papkovich — Neuber stress functions for infinite domains // Arch. Ration. Mech. and Anal. 1962. V. 9, N 3. P. 225–233.

19. **Stippes M.** Completeness of Papkovich potentials // Quart. Appl. Math. 1969. V. 26, N 4. P. 477–483.

20. **Tran-Cong T., Steven G. P.** On the representation of elastic displacement fields in terms of three harmonic functions // J. Elast. 1979. V. 9, N 3. P. 325–333.

21. **Tran-Cong T.** On the completeness of the Papkovich — Neuber solution // Quart. Appl. Math. 1989. V. 47, N 4. P. 645–659.

22. **Yan G. P., Wang M. Z.** Somigliana formula and the completeness of Papkovich — Neuber and Boussinesq — Galerkin solutions in elasticity // Mech. Res. Commun. 1988. V. 15, N 2. P. 73–77.

23. **Chandrasekharaiah D. S.** A complete solution in elastodynamics // Acta Mech. 1990. V. 84, N 1-4. P. 185–190.

24. **Wang W., Wang M. Z.** Constructivity and completeness of the general solutions in elastodynamics // Acta Mech. 1992. V. 91, N 3–4. P. 209–214.

25. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

26. **Остросаблин Н. И., Сенашов С. И.** Общие решения и симметрии уравнений линейной теории упругости // Докл. АН СССР. 1992. Т. 322, № 3. С. 513–515.

27. **Остросаблин Н. И.** Общие решения и приведение системы уравнений линейной теории упругости к диагональному виду // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 5. С. 112–122.

28. **Zhang Hong-qing, Yang Guang.** Constructions of the general solution for a system of partial differential equations with variable coefficient // Appl. Math. and Mech.: Engl. Ed. 1991. V. 12, N 2. P. 149–153.

29. **Миллер У., мл.** Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981.

Поступила в редакцию 22/IV 1994 г.,
в окончательном варианте — 12/X 1994 г.