

УДК 532.51

Исследование волн на поверхности тонкой пленки жидкости, увлекаемой турбулентным газовым потоком: моделирование вне рамок «квазиламинарного» приближения*

О.Ю. Цвелодуб, Д.Г. Архипов, И.С. Вожаков

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

Новосибирский государственный университет

E-mail: tsvel@itp.nsc.ru

Рассматривается задача о совместном течении турбулентного потока газа и вертикально стекающей волновой пленки жидкости. Выполнен расчет касательных и нормальных напряжений на поверхности раздела фаз. Компоненты тензора Рейнольдсовых напряжений определялись в рамках гипотезы Буссинеска. Для случая малых чисел Рейнольдса жидкости задача сводится к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению на отклонение толщины слоя от невозмущенного уровня. Проведено численное исследование эволюции периодических возмущений. Представлено несколько характерных сценариев их развития.

Ключевые слова: тонкая пленка жидкости, турбулентный поток газа, турбулентная вязкость, гипотеза Буссинеска, эволюционное уравнение, периодические возмущения.

Введение

В химической промышленности широко распространены контактные газожидкостные теплообменные аппараты, в которых теплообмен между фазами происходит при их непосредственном соприкосновении. К таким аппаратам относятся градирни, выпарные аппараты, ректификаторы, абсорберы, скрубберы. Многие исследователи полагают, что наиболее интенсивно процесс теплообмена между газом и жидкостью происходит при пленочном течении последней [1, 2]. В последнее время все большую сферу применения (от кондиционирования помещений до атомной энергетики) находят так называемые термотрансформаторы (тепловые насосы), в которых процесс абсорбции пара осуществляется при стекании пленок абсорбента по охлаждаемым поверхностям [3].

Совместное течение тонкой пленки жидкости и турбулентного потока газа встречается и традиционно изучается в составе кольцевого, а также дисперсно-кольцевого режимов двухфазного течения в вертикальных и наклонных каналах [4, 5]. Наиболее существенным для практических приложений результатом экспериментальных и теоретических работ является наблюдаемое и значительное (до 2,5 раз) увеличение массопереноса

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-19-10449).

от поверхности пленки к ее ядру вследствие индуцированной естественно возникающими волнами поперечной конвекции [6]. Этот факт стимулирует непрерывный интерес к проблеме генерации и эволюции волн на поверхности раздела фаз в подобных физических системах (см., например, [7]).

Решение проблемы совместного течения жидкости и газа в полной сопряженной постановке связано со значительными вычислительными трудностями, поэтому зачастую выделяют два этапа моделирования: определение напряжений газа на поверхности пленки и последующий расчет эволюции волн в жидкости. Часто скорость жидкости значительно меньше характерной скорости газа, поэтому при рассмотрении газовой части задачи поверхность раздела полагают жесткой и неподвижной. Кроме того, вследствие малости толщины пленки влияние возмущений границы раздела на скорости в газе можно считать линейным. В силу этого задача вычисления нормальных и касательных напряжений газа на поверхности сводится к рассмотрению влияния на них отдельных пространственных гармоник. На втором этапе изучения совместного течения исследуется динамика нелинейных волн на поверхности пленки жидкости. Возможность разделения задачи на эти этапы обосновывается, в частности, в работе [8]. При таком разделении задача как для газа, так и для жидкой пленки рассматривалась в различных приближениях: от ламинарного течения [9–11] до различных моделей турбулентного течения газа [8, 9, 12–15]. В представленной работе также рассматриваются эти два этапа исследования совместного движения вертикально стекающей пленки жидкости и спутного турбулентного потока газа. В отличие от вышеуказанных работ, в настоящей работе так называемое «квазиламинарное» приближение, в котором турбулентная диссипация учитывается только при построении профиля скорости основного течения, не используется, а возмущения описываются обычными линеаризованными уравнениями Навье–Стокса.

Определение газовых напряжений на поверхности пленки

Для нахождения значений сил, действующих на пленку жидкости со стороны газового потока, рассматривается модельная задача о движении газа в канале с симметрично (относительно плоскости xz) деформированными стенками. Наибольший интерес на практике представляет турбулентное течение газа, поэтому математическое описание системы основывалось на осредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье–Стокса. Исходная система уравнений гидродинамики имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_g}{\partial t} + \frac{\partial(u_g u_g)}{\partial x} + \frac{\partial(u_g v_g)}{\partial y} + \frac{\partial(u_g w_g)}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_g} \frac{\partial p_g}{\partial x} + \nu_g \left(\frac{\partial^2 u_g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_g}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v_g}{\partial t} + \frac{\partial(u_g v_g)}{\partial x} + \frac{\partial(v_g v_g)}{\partial y} + \frac{\partial(v_g w_g)}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_g} \frac{\partial p_g}{\partial y} + \nu_g \left(\frac{\partial^2 v_g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_g}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial w_g}{\partial t} + \frac{\partial(u_g w_g)}{\partial x} + \frac{\partial(v_g w_g)}{\partial y} + \frac{\partial(w_g w_g)}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_g} \frac{\partial p_g}{\partial z} + \nu_g \left(\frac{\partial^2 w_g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_g}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} + \frac{\partial w_g}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь выполнено осреднение по достаточно большому (по отношению к временному масштабу турбулентных пульсаций) промежутку времени. Сжимаемостью газа при данных скоростях можно пренебречь. При этом среднее течение предполагается стационарным:

$$\left[u_g, v_g, w_g, p_g \right](x, y, z, t) = [\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}](x, y, z) + [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}](x, y, z, t). \quad (2)$$

Надстрочная черта в уравнениях соответствует осредненным, а тильда — пульсационным составляющим полей гидродинамических величин. В уравнениях (1), (2) u_g, v_g, w_g — продольная (вдоль оси x), поперечная (y) и трансверсальная (z) компоненты скорости газа, p_g, ρ_g и ν_g — давление, плотность и кинематическая вязкость газа соответственно.

Полученные в результате осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса (RANS, Reynolds Averaged Navier–Stokes) имеют следующий традиционный вид:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0,$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_g} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu_g \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \tilde{u}\tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}\tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}\tilde{w}}{\partial z} \right), \quad (3)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_g} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu_g \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \tilde{u}\tilde{w}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}\tilde{w}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}\tilde{w}}{\partial z} \right).$$

Значения компонент тензора рейнольдсовских напряжений определяются в рамках гипотезы Буссинеска:

$$\tilde{u}\tilde{v} = -\nu_t \nu_g \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right), \quad \tilde{u}\tilde{w} = -\nu_t \nu_g \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right),$$

$$\tilde{v}\tilde{w} = -\nu_t \nu_g \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right), \quad \tilde{u}\tilde{u} - \frac{2}{3} \bar{k}_t = -2\nu_t \nu_g \frac{\partial \bar{u}}{\partial x},$$

$$\tilde{v}\tilde{v} - \frac{2}{3} \bar{k}_t = -2\nu_t \nu_g \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \quad \tilde{w}\tilde{w} - \frac{2}{3} \bar{k}_t = -2\nu_t \nu_g \frac{\partial \bar{w}}{\partial z},$$

где $\bar{k}_t = \frac{\tilde{u}\tilde{u} + \tilde{v}\tilde{v} + \tilde{w}\tilde{w}}{2}$ — средняя кинетическая энергия турбулентности.

Положим, что коэффициент турбулентной вязкости $\nu_t = \nu_t(y)$, а давление $\bar{p}_t = \bar{p} + (2/3)\rho \bar{k}_t$. Кроме того, ограничимся исследованием двумерных (в среднем) течений. Тогда систему уравнений (3) можно переписать в замкнутом относительно полей осредненных гидродинамических величин виде:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0,$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_g} \frac{\partial \bar{p}_t}{\partial x} + \nu_g \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{d\nu_t}{dy} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right]. \quad (4)$$

Поставим естественные кинематические условия прилипания и непротекания на нижней стенке, а также условия симметрии на оси канала:

$$\bar{u} = \bar{v} = 0 \quad \text{при } y = -H/2 + h(x),$$

$$\bar{v} = \partial \bar{u} / \partial y = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad (5)$$

здесь $h(x)$ — деформация стенок канала, а H — его средняя ширина.

При известной зависимости $\nu_t(y)$ система уравнений (4) с граничными условиями (5) представляет собой математически замкнутую постановку задачи. С ее помощью рассмотрим

для начала простое течение в плоском канале, для которого уравнения (4) допускают точное аналитическое решение в квадратурах. Будем искать его в виде

$$\bar{u}(x, y) = \bar{U}_0(y), \quad \bar{v}(x, y) = 0, \quad \bar{p}_t(x, y) = \bar{P}_t(y) - \chi x \equiv \bar{P}_{0t},$$

здесь $\chi = \partial P_0 / \partial x$ — постоянный градиент давления вдоль координаты x .

Принимая во внимание это представление, из (4) находим

$$\frac{d}{dy} \left((1 + \nu_t) \frac{d\bar{U}_0}{dy} \right) = -\frac{\chi}{\mu_g}, \quad (6)$$

$$\bar{P}_t(y) = \text{const},$$

здесь $\mu_g = \rho_g \nu_g$. При исследовании течения в вертикальном канале для учета влияния гравитации вместо χ следует использовать $\chi_{\text{eff}} = \chi + \rho_g g$.

После интегрирования уравнения (6) получим

$$\frac{d\bar{U}_0}{dy} = \frac{T - \chi(y + H/2)}{\mu_g(1 + \nu_t(y))},$$

здесь введено обозначение стационарного трения на стенке — $\mu_g \frac{d\bar{U}_0}{dy} \Big|_{y=-H/2} = T$ и

использован факт ослабления турбулентных пульсаций в непосредственной близости к ее поверхности: $\nu_t(y \rightarrow -H/2) \rightarrow 0$. Введем также обозначение $R \equiv H/2$. С учетом условия симметрии на полуширине канала имеем: $T = \chi R$. Тогда профиль скорости течения определяется интегралом

$$\bar{U}_0(y) = \frac{T}{\mu_g} \int_0^{y+R} \frac{1 - y'/R}{1 + \nu_t(y' - R)} dy'.$$

Введем характерный масштаб скорости и поперечной координаты и запишем найденный профиль скорости в безразмерных переменных:

$$T = \rho_g v^*{}^2, \quad \delta = \nu_g / v^*, \quad \bar{U}_0 = v^* \hat{U}_0, \quad y = \delta \tilde{y} - R,$$

$$\hat{U}_0(\tilde{y}, \delta/R) = \int_0^{\tilde{y}} \frac{1 - \tilde{y}'(\delta/R)}{1 + \hat{\nu}_t(\tilde{y}')} d\tilde{y}', \quad \hat{\nu}_t(\tilde{y}) \equiv \nu_t(y).$$

Отношение δ/R , как правило, достаточно мало, поэтому допустимо также применение универсального, не зависящего от размеров канала турбулентного профиля скорости, описывающего движение газа над плоской стенкой (в канале неограниченной ширины):

$$\hat{U}_0(\tilde{y}) = \int_0^{\tilde{y}} \frac{d\tilde{y}'}{1 + \hat{\nu}_t(\tilde{y}')}.$$

Выбранные масштабы оказываются удобными и при решении исходной задачи. Рассмотрим безразмерный вариант уравнений (4), (5):

$$\hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \tilde{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \hat{p}_t}{\partial \tilde{x}} + (1 + \hat{\nu}_t) \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right) + \frac{d\hat{\nu}_t}{d\tilde{y}} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \right),$$

$$\hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \tilde{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \hat{p}_t}{\partial \tilde{y}} + (1 + \hat{v}_t) \left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right) + 2 \frac{d\hat{v}_t}{d\tilde{y}} \cdot \frac{\partial \hat{v}}{\partial \tilde{y}}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \tilde{y}} = 0,$$

$$\hat{u} = \hat{v} = 0 \text{ при } \tilde{y} = h(\tilde{x}) / \delta \equiv \hat{h}(\tilde{x}),$$

$$\hat{v} = \partial \hat{u} / \partial \tilde{y} = 0 \text{ при } \tilde{y} = R / \delta \equiv \tilde{R},$$

где в качестве характерных значений для продольной координаты выбрано значение δ , а для давления — $\rho_g v^{*2}$. Перейдем теперь к исследованию движения в канале со слабо искривленными стенками: $h_a \equiv \max [\hat{h}(\tilde{x})] < 1$. В этом случае следует полагать возмущения скорости и давления в газе линейными, то есть:

$$\hat{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \hat{U}_0(\tilde{y}) + h_a u_p(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad \hat{v}(\tilde{x}, \tilde{y}) = h_a v_p(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

$$\hat{p}_t(\tilde{x}, \tilde{y}) = \hat{P}_{0t} + h_a p_{tp}(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad \hat{h}(\tilde{x}) = h_a h_p(\tilde{x}),$$

и в уравнениях (6) сохранять лишь слагаемые первой степени по h_a :

$$\begin{aligned} \hat{U}_0 \frac{\partial u_p}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial p_{tp}}{\partial \tilde{x}} + v_p \frac{d\hat{U}_0}{d\tilde{y}} &= (1 + \hat{v}_t) \left(\frac{\partial^2 u_p}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 u_p}{\partial \tilde{y}^2} \right) + \frac{d\hat{v}_t}{d\tilde{y}} \left(\frac{\partial u_p}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial v_p}{\partial \tilde{x}} \right), \\ \hat{U}_0 \frac{\partial v_p}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial p_{tp}}{\partial \tilde{y}} &= (1 + \hat{v}_t) \left(\frac{\partial^2 v_p}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 v_p}{\partial \tilde{y}^2} \right) + 2 \frac{d\hat{v}_t}{d\tilde{y}} \frac{\partial v_p}{\partial \tilde{y}}, \\ \frac{\partial u_p}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial v_p}{\partial \tilde{y}} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Для постановки граничных условий на нижней стенке воспользуемся методом переноса граничных условий на невозмущенный уровень:

$$\hat{u}(\tilde{x}, \hat{h}(\tilde{x})) = \hat{h}(\tilde{x}) \frac{d\hat{U}_0}{d\tilde{y}}(0) + h_a u_p(\tilde{x}, 0), \quad \hat{v}(\tilde{x}, \hat{h}(\tilde{x})) = h_a v_p(\tilde{x}, 0),$$

откуда находим

$$v_p(\tilde{x}, 0) = 0, \quad u_p(\tilde{x}, 0) = -\frac{d\hat{U}_0}{d\tilde{y}} h_p(\tilde{x}).$$

Условия симметрии на оси канала переписутся в виде

$$v_p(\tilde{x}, \tilde{R}) = \frac{\partial u_p}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, \tilde{R}) = 0.$$

Коэффициенты в системе уравнений (8) не зависят от продольной координаты x , поэтому её общее решение представляется в виде суперпозиции гармонических возмущений:

$$[u_p(\tilde{x}, \tilde{y}), v_p(\tilde{x}, \tilde{y}), p_{tp}(\tilde{x}, \tilde{y}), h_p(\tilde{x})] = [u_a(\tilde{y}), v_a(\tilde{y}), p_a(\tilde{y}), 1] e^{i\alpha_g \tilde{x}} + \text{с.с.},$$

здесь с.с. — комплексно-сопряженное дополнение.

Для амплитуд гармоник справедливо:

$$\begin{aligned}
 u_a &= \frac{i}{\alpha_g} \cdot \frac{dv_a}{d\tilde{y}}, \\
 i\alpha_g (\hat{U}_0 u_a + p_a) + \frac{d\hat{U}_0}{d\tilde{y}} v_a &= (1 + \hat{v}_t) \left(\frac{d^2 u_a}{d\tilde{y}^2} - \alpha_g^2 u_a \right) + \frac{d\hat{v}_t}{d\tilde{y}} \left(\frac{du_a}{d\tilde{y}} + i\alpha_g v_a \right), \\
 i\alpha_g \hat{U}_0 v_a + \frac{dp_a}{d\tilde{y}} &= (1 + \hat{v}_t) \left(\frac{d^2 v_a}{d\tilde{y}^2} - \alpha_g^2 v_a \right) + 2 \frac{d\hat{v}_t}{d\tilde{y}} \cdot \frac{dv_a}{d\tilde{y}}, \\
 v_a(0) = 0, \quad u_a(0) = -1, \quad v_a(\tilde{R}) &= \frac{du_a}{d\tilde{y}}(\tilde{R}) = 0.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Продифференцируем первое из уравнений системы (9) по y и исключим из неё поле давления:

$$\begin{aligned}
 \hat{U}_0 \left(\frac{d^2 v_a}{d\tilde{y}^2} - \alpha_g^2 v_a \right) - \frac{d^2 \hat{U}_0}{d\tilde{y}^2} v_a &= -\frac{i}{\alpha_g} \left[(1 + \hat{v}_t) \left(\frac{d^4 v_a}{d\tilde{y}^4} - 2\alpha_g^2 \frac{d^2 v_a}{d\tilde{y}^2} + \alpha_g^4 v_a \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{d\hat{v}_t}{d\tilde{y}} \left(\frac{d^3 v_a}{d\tilde{y}^3} - \alpha_g^2 \frac{dv_a}{d\tilde{y}} \right) + \frac{d^2 \hat{v}_t}{d\tilde{y}^2} \left(\frac{d^2 v_a}{d\tilde{y}^2} + \alpha_g^2 v_a \right) \right], \\
 v_a(0) = 0, \quad \frac{dv_a}{d\tilde{y}}(0) = i\alpha_g, \quad v_a(\tilde{R}) &= \frac{d^2 v_a}{d\tilde{y}^2}(\tilde{R}) = 0.
 \end{aligned}$$

Перепишем полученное уравнение (похожее на уравнение Орра–Зоммерфельда) в виде системы уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}
 \frac{dv_a}{d\tilde{y}} = Q, \quad \frac{dQ}{d\tilde{y}} = \theta + \alpha_g^2 v_a, \quad \frac{d\theta}{d\tilde{y}} = S, \\
 \frac{dS}{d\tilde{y}} = \frac{1}{1 + \hat{v}_t} \left[i\alpha_g \left(\hat{U}_0 \theta - \frac{d^2 \hat{U}_0}{d\tilde{y}^2} v_a \right) - 2 \frac{d\hat{v}_t}{d\tilde{y}} S - \frac{d^2 \hat{v}_t}{d\tilde{y}^2} (\theta + 2\alpha_g^2 v_a) \right] + \alpha_g^2 \theta, \\
 v_a(0) = 0, \quad Q(0) = i\alpha_g, \quad v_a(\tilde{R}) = \theta(\tilde{R}) = 0.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Для решения полученной краевой задачи (10) воспользуемся традиционным методом дифференциальной прогонки. Выразим первую пару введенных величин (v_a, Q) через вторую (θ, S) в виде обобщенной линейной зависимости в каждой точке y :

$$\begin{aligned}
 v_a(\tilde{y}) &= B_{11}(\tilde{y})\theta(\tilde{y}) + B_{12}(\tilde{y})S(\tilde{y}) + U_1(\tilde{y}), \\
 Q(\tilde{y}) &= B_{21}(\tilde{y})\theta(\tilde{y}) + B_{22}(\tilde{y})S(\tilde{y}) + U_2(\tilde{y}).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Продифференцируем эти соотношения и воспользуемся системой уравнений (10) для нахождения функций $B_{ij}(\tilde{y})$ и $U_j(\tilde{y})$:

$$\begin{aligned}
 \frac{dv_a}{d\tilde{y}} = \frac{dB_{11}}{d\tilde{y}}\theta + B_{11}S + B_{12} \left\{ \frac{1}{1 + \hat{v}_t} \left[i\alpha_g \left(\hat{U}_0 \theta - \frac{d^2 \hat{U}_0}{d\tilde{y}^2} (B_{11}\theta + B_{12}S + U_1) \right) - \right. \right. \\
 \left. \left. - 2 \frac{d\hat{v}_t}{d\tilde{y}} S - \frac{d^2 \hat{v}_t}{d\tilde{y}^2} (\theta + 2\alpha_g^2 (B_{11}\theta + B_{12}S + U_1)) \right] + \alpha_g^2 \theta \right\} + \frac{dB_{12}}{d\tilde{y}} S + \frac{dU_1}{d\tilde{y}} = B_{21}\theta + B_{22}S + U_2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{d\tilde{y}} &= \frac{dB_{21}}{d\tilde{y}} \theta + B_{21} S + B_{22} \left\{ \frac{1}{1+\hat{\nu}_t} \left[i\alpha_g \left(\hat{U}_0 \theta - \frac{d^2 \hat{U}_0}{d\tilde{y}^2} (B_{11} \theta + B_{12} S + U_1) \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \frac{d\hat{\nu}_t}{d\tilde{y}} S - \frac{d^2 \hat{\nu}_t}{d\tilde{y}^2} (\theta + 2\alpha_g^2 (B_{11} \theta + B_{12} S + U_1)) \right] + \alpha_g^2 \theta \right\} + \frac{dB_{22}}{d\tilde{y}} S + \frac{dU_2}{d\tilde{y}} = \\ &= \theta + \alpha_g^2 (B_{11} \theta + B_{12} S + U_1). \end{aligned}$$

Приравнявая в данных равенствах коэффициенты при переменных (θ, S) , получаем задачу Коши для введенных выше функций

$$\begin{aligned} \frac{dB_{11}}{d\tilde{y}} &= B_{21} - B_{12} \left\{ \frac{1}{1+\hat{\nu}_t} \left[i\alpha_g \left(\hat{U}_0 - \frac{d^2 \hat{U}_0}{d\tilde{y}^2} B_{11} \right) - \frac{d^2 \hat{\nu}_t}{d\tilde{y}^2} (1 + 2\alpha_g^2 B_{11}) \right] + \alpha_g^2 \right\}, \\ \frac{dB_{12}}{d\tilde{y}} &= B_{22} - B_{11} + \frac{B_{12}}{1+\hat{\nu}_t} \left[i\alpha_g \frac{d^2 \hat{U}_0}{d\tilde{y}^2} B_{12} + 2 \frac{d\hat{\nu}_t}{d\tilde{y}} + 2\alpha_g^2 \frac{d^2 \hat{\nu}_t}{d\tilde{y}^2} B_{12} \right], \\ \frac{dB_{21}}{d\tilde{y}} &= 1 + \alpha_g^2 B_{11} - B_{22} \left\{ \frac{1}{1+\hat{\nu}_t} \left[i\alpha_g \left(\hat{U}_0 - \frac{d^2 \hat{U}_0}{d\tilde{y}^2} B_{11} \right) - \frac{d^2 \hat{\nu}_t}{d\tilde{y}^2} (1 + 2\alpha_g^2 B_{11}) \right] + \alpha_g^2 \right\}, \\ \frac{dB_{22}}{d\tilde{y}} &= \alpha_g^2 B_{12} - B_{21} + \frac{B_{22}}{1+\hat{\nu}_t} \left[i\alpha_g \frac{d^2 \hat{U}_0}{d\tilde{y}^2} B_{12} + 2 \frac{d\hat{\nu}_t}{d\tilde{y}} + 2\alpha_g^2 \frac{d^2 \hat{\nu}_t}{d\tilde{y}^2} B_{12} \right], \quad (12) \\ \frac{dU_1}{d\tilde{y}} &= U_2 + \left(i\alpha_g \frac{d^2 \hat{U}_0}{d\tilde{y}^2} + 2\alpha_g^2 \frac{d^2 \hat{\nu}_t}{d\tilde{y}^2} \right) \frac{B_{12} U_1}{1+\hat{\nu}_t}, \\ \frac{dU_2}{d\tilde{y}} &= \left(\alpha_g^2 + \frac{B_{22}}{1+\hat{\nu}_t} \left[i\alpha_g \frac{d^2 \hat{U}_0}{d\tilde{y}^2} + 2\alpha_g^2 \frac{d^2 \hat{\nu}_t}{d\tilde{y}^2} \right] \right) U_1, \\ B_{ij}(0) &= 0, \quad U_1(0) = 0, \quad U_2(0) = i\alpha_g, \end{aligned}$$

решая которую находим значения $B_{ij}(\tilde{R})$, $U_i(\tilde{R})$. Теперь, используя условия симметрии $v(\tilde{R}) = \theta(\tilde{R}) = 0$, определяем недостающую пару величин:

$$S(\tilde{R}) = -\frac{U_1(\tilde{R})}{B_{12}(\tilde{R})}, \quad Q(\tilde{R}) = U_2(\tilde{R}) - \frac{B_{22}(\tilde{R})}{B_{12}(\tilde{R})} U_1(\tilde{R}).$$

Решение обратной задачи Коши от \tilde{R} до 0 для исходных дифференциальных уравнений (10) с учетом зависимостей (11)

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tilde{y}} &= S, \quad \frac{dS}{d\tilde{y}} = \frac{1}{1+\hat{\nu}_t} \left[i\alpha_g \left(\hat{U}_0 \theta - \frac{d^2 \hat{U}_0}{d\tilde{y}^2} (B_{11} \theta + B_{12} S + U_1) \right) - 2 \frac{d\hat{\nu}_t}{d\tilde{y}} S - \right. \\ &\quad \left. - \frac{d^2 \hat{\nu}_t}{d\tilde{y}^2} (\theta + 2\alpha_g^2 (B_{11} \theta + B_{12} S + U_1)) \right] + \alpha_g^2 \theta \end{aligned}$$

дает необходимые значения возмущений трения газа на поверхности твердой стенки, обусловленных ее волнистостью — $\tau(\alpha_g)$.

При решении уравнений (12) использовался профиль осредненной скорости течения газа из работы [16]. Он имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{U}_0(\tilde{y}) = & 4,33 \ln(1 + 0,091\tilde{y}) - 0,915 \ln(1 - 0,092\tilde{y} + 0,0108\tilde{y}^2) + \\ & + 5,59 \operatorname{arctg}(0,116\tilde{y} - 0,492) + 2,56. \end{aligned}$$

Результаты расчетов касательных напряжений по этой модели приведены на рис. 1. Здесь представлены значения вещественной (кривая 1) и мнимой (кривая 2) частей амплитуды пульсаций трения на волнистой твердой стенке в зависимости от безразмерного волнового числа стенки $\alpha_g \equiv \delta\alpha$, где $\alpha = 2\pi/\lambda_{\text{ст}}$ — размерное волновое число для соответствующего пространственного периода $\lambda_{\text{ст}}$ волнистой стенки (подробности см. в публикации [17]).

Эволюционное модельное уравнение

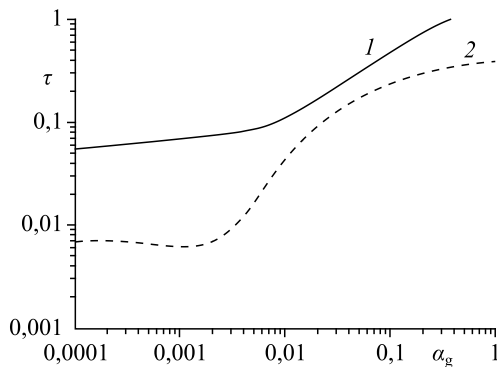
Как было показано в работе [17], в случае малых расходов жидкости ($\text{Re} \sim 1$) для пленки, увлекаемой газом, рассматриваемая задача сводится к одному эволюционному уравнению на толщину пленки:

$$\begin{aligned} h_t + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} h^2 h_x + \text{Re} \tau_0 h h_x + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} \varepsilon \text{Re} W h^3 h_{xxx} + \right. \\ \left. + \frac{2}{15} \frac{\text{Re}^3}{\text{Fr}^2} h^5 h_x (\tau_0 \text{Fr} + h) + \frac{1}{2} \text{Re} h^2 \tau_0 \int k \hat{h}_k \tau(k) e^{ikx} dk \right) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

здесь безразмерными параметрами являются: τ_0 — невозмущенная составляющая касательных напряжений газа на поверхности пленки, $\text{Re} = \rho h_0 u_0 / \mu$ — число Рейнольдса, $W = \sigma / (\rho l_0 u_0^2)$ — число Вебера, $\text{Fr} = u_0^2 / (g h_0)$ — число Фруда, $\varepsilon = h_0 / l_0$ — отношение толщины пленки к характерной длине волны.

При выводе уравнения (13) использовалось приближение малых чисел Рейнольдса ($\text{Re} \sim 1$) и полагалось, что число Вебера велико — $W\varepsilon \sim 1$. Уравнение (13) с точностью до обозначений совпадает с уравнением, полученным в работе [8]. В случае, когда рассматриваются пространственные периодические решения уравнения (13), интегральное слагаемое заменяется соответствующим рядом.

Ограничиваясь рассмотрением возмущений малой, но конечной амплитуды $h = 1 + \varepsilon h_1$, и вводя в рассмотрение медленное ($t_1 = \varepsilon t$) и быстрое ($t_0 = t$) времена из уравнения (13) получаем



$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial t_0} + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} (1 + \text{Fr} \tau_0) \frac{\partial h_1}{\partial x} = 0, \quad (14) \\ \frac{\partial h_1}{\partial t_1} + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} (2 + \text{Fr} \tau_0) h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \\ + \frac{W \text{Re} \varepsilon}{3} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + \frac{2}{15} \frac{\text{Re}^3}{\text{Fr}^2} (1 + \tau_0 \text{Fr}) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \end{aligned}$$

Рис. 1. Зависимости реальной $\tau_r(k)$ (1) и мнимой $\tau_{\text{im}}(k)$ (2) компонент пульсации напряжений от «газового» параметра α_g .

$$+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\tau_0\int\hat{h}_k k^2\tau(k)e^{ikx}dk=0. \quad (15)$$

Из уравнения (14) следует, что на быстрых временах (t_0) возмущения малой, но конечной амплитуды распространяются с постоянной скоростью

$$c_\infty = \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Fr}}(1 + \operatorname{Fr}\tau_0).$$

Уравнение (15) описывает нелинейную эволюцию возмущений на больших временах (t_1).

После проведения замены $h_1 = AH$, $b = \frac{W\operatorname{Re}\varepsilon}{3}$, $A = \frac{2\operatorname{Fr}b}{\operatorname{Re}(2 + \operatorname{Fr}\tau_0)}$, $\varepsilon = \frac{2\operatorname{Re}^2}{5W\operatorname{Fr}^2}(1 + \operatorname{Fr}\tau_0)$,

$t_2 = bt_1$ оно принимает вид [17]

$$\frac{\partial H}{\partial t_2} + 2H\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} + B\int_{-\infty}^{\infty} ik^2\tau(k)\hat{H}(k,t)e^{ikx}dk=0, \quad (16)$$

здесь $B = \operatorname{Re}\tau_0/(2b)$. В дальнейшем индекс у t_2 будем опускать.

Таким образом, в случае малых чисел Рейнольдса задача исследования возмущений на поверхности вертикально стекающей пленки жидкости, увлекаемой потоком газа, сводится к рассмотрению решений одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения. Если пренебречь в (16) нелинейным членом и представить его решение в виде

$$H \sim \exp(ik(x-ct)),$$

то приходим к следующему дисперсионному соотношению:

$$c = i(k - k^3) + Bk\tau(k). \quad (17)$$

Из (17) видно, что c_∞ — предельная скорость бесконечно малых возмущений, у которых волновое число стремится к нулю.

Возмущения неустойчивы, если мнимая часть фазовой скорости c больше нуля. Используя тот факт, что для нейтрального возмущения мнимая часть фазовой скорости $c_i = 0$, для нейтрального волнового числа k_n из (17) получаем

$$1 - k_n^2 + B\tau_{\operatorname{im}}(k_n) = 0. \quad (18)$$

Из (18) можно видеть, что в случае свободно стекающей пленки ($B = 0$) нейтральное волновое число $k_n = 1$. В работах [17–20] при анализе решений уравнения (18) в расчетах использовались Фурье-компоненты касательных напряжений газа $\tau(k) = \tau_r(k) + i\tau_{\operatorname{im}}(k)$, рассчитанные по «квазиламинарным» моделям турбулентности — моделям Бенджамина [21] и переноса границы на невозмущенный уровень. Для настоящей модели зависимости $\tau_{\operatorname{im}}(k)$ и $\tau_r(k)$ приведены на рис. 1. Качественно они аналогичны полученным по другим моделям [17]. В частности, так как $\tau_{\operatorname{im}} > 0$ (см. рис. 1) и в рамках настоящей модели газ оказывает дестабилизирующее воздействие, область неустойчивости расширяется по сравнению со свободной пленкой ($k_n > 1$). Причем она занимает интервал волновых чисел $0 < k < k_n$. Отметим, что в газовой и жидкостной областях рассматриваемой задачи масштабы соответствующих характерных величин выбирались по-разному, поэтому связь между безразмерными волновыми числами определена как (см., например, [17])

$$\alpha_g = k\varepsilon.$$

Будем выбирать параметры невозмущенного течения так, чтобы k_n имело конкретное значение. При этом потребуем, чтобы ему соответствовало вполне определенное значение τ_{im} . Отвечающее этой ситуации значение параметра B определяется из (18):

$$B = (k_n^2 - 1) / \tau_{im}(k_n).$$

На рис. 2 представлена зависимость параметра B от «газового» параметра α_g^{-1} для двух значений k_n (кривая 1 — $k_n = 1,5$; кривая 2 — $k_n = 1,1$). При расчете значений B учитывалось, что $\tau_{im}(\alpha_g) \equiv \tau_{im}(k)$.

Для нахождения периодических по x решений уравнения (16) функция H представляется в виде пространственного ряда Фурье:

$$H(x, t) = \sum_n H_n(t) \exp(iknx). \quad (19)$$

Так как H — вещественная функция, то $\bar{H}_{-n} = H_n$. Черта означает операцию комплексного сопряжения. После подстановки (19) в уравнение (16) получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для Фурье-гармоники $H_n(t)$. Полагая, что все $H_n(t)$ с индексами $|n| \geq N$ равны нулю, приходим к ее конечномерному аналогу. Алгоритм ее решения подробно описан в работах [17–20].

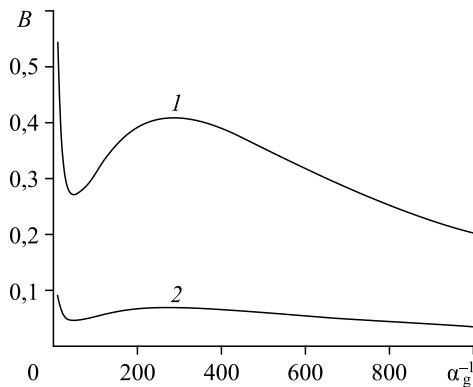
При исследовании эволюции периодических возмущений в качестве условия нормировки будем полагать, что среднее отклонение толщины от невозмущенного уровня равно нулю. В точках с нейтральными волновыми числами k_n от тривиального решения $H = 0$ отщепляются линейные периодические стационарно-бегущие решения. Как видно из (17), их фазовая скорость и частота определяются соответственно как

$$c_0 = Bk_n \tau_r(k_n), \quad \omega_0 = k_n c_0 = Bk_n^2 \tau_r(k_n).$$

В работе [18] было показано, что в окрестности нейтрального волнового числа k_n стационарно-бегущие решения малой, но конечной амплитуды имеют вид

$$H = A \exp[i(kx - \omega t)] + A^2 A_{H2} \exp[2i(kx - \omega t)] + \text{с.с.}, \quad (20)$$

здесь A — модуль амплитуды первой гармоники, $k = k_n + A_k A^2$, $\omega = \omega_0 + A_\omega A^2$, с.с. — комплексно-сопряженное выражение. Выражение для фазовой скорости с точностью до A^2 имеет вид



$$c \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{\omega_0 + A_\omega A^2}{k_n + A_k A^2} = c_0 + \frac{A^2}{k_n} (A_\omega - c_0 A_k). \quad (21)$$

Коэффициенты A_{H2} , A_k , A_ω зависят только от первых двух Фурье-гармоник пульсаций

Рис. 2. Зависимость параметра B от «газового» параметра α_g^{-1} . $k_n = 1,5$ (1), $1,1$ (2).

напряжений трения газа $\tau(k_n)$, $d\tau(k)/dk|_{k_n}$, $\tau(2k_n)$ на границе раздела газ–пленка и от параметра B . В отличие от [18], приведем здесь их явный вид:

$$A_{H2} \equiv A_{H2r} + iA_{H2im}, \quad A_{H2r} = \frac{B(\tau_r(k_n) - 2\tau_r(2k_n))}{k_n A_{00}},$$

$$A_{H2im} = \frac{2(B\tau_{im}(2k_n) + 1 - 4k_n^2)}{k_n A_{00}}, \quad (22)$$

$$A_{00} = B^2 (\tau_r(k_n) - 2\tau_r(2k_n))^2 + 4(B\tau_{im}(2k_n) + 1 - 4k_n^2)^2,$$

$$A_k = \frac{2A_{H2im}}{k_n(2k_n - B\tau'_{im}(k_n))}, \quad A_\omega = 2k_n A_{H2r} + Bk_n(2\tau_r(k_n) + \tau'_r(k_n))A_k,$$

здесь $\tau'_j(k_n) = \frac{d\tau_j(k)}{dk}|_{k_n}$, $j = r, im$.

Как показали расчеты, для данной модели имеет место мягкий тип ветвления — поправки к волновому числу и частоте отрицательны при всех значениях параметра B и решение (20)–(22) ответвляется в область линейной неустойчивости. В качестве примера на рис. 3 и 4 приведены соответственно зависимости коэффициентов A_k , A_ω от параметра B при $k_n = 1,5$.

Решения с волновыми числами, лежащими вне окрестности нейтрального волнового числа k_n , строились численно. Представленные ниже результаты показывают, как они меняются при продвижении вглубь области линейной неустойчивости. Для всех приводимых далее результатов при обрывании ряда (19) достаточно было выбирать N в пределах $5 \div 20$.

Наиболее проста и понятна эволюция возмущений в той области волновых чисел, где существует только одно стационарно-бегущее семейство решений. В этом случае изменение начальных условий влияет только на переходный этап, но в конечном итоге все возмущения эволюционируют к соответствующему стационарно-бегущему решению.

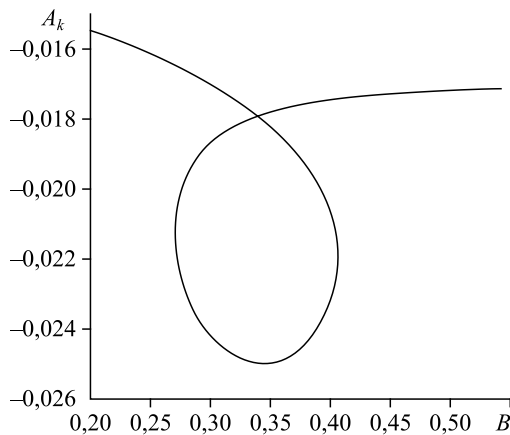


Рис. 3. Зависимость коэффициента A_k от параметра B .
 $k_n = 1,5$.

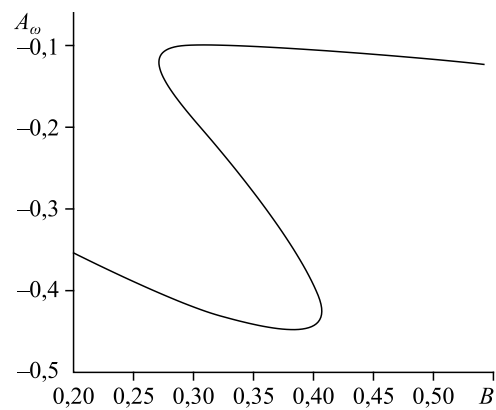


Рис. 4. Зависимость коэффициента A_ω от параметра B .
 $k_n = 1,5$.

Особенно просто выглядит решение, если его волновое число достаточно близко к нейтральному волновому числу ($k > (0,7 \div 0,9)k_n$). При таких волновых числах после короткого переходного процесса решение быстро выходит на стационарно-бегущее, у которого первая гармоника доминирует над всеми остальными. Это обусловлено тем, что только она лежит в области неустойчивости. Остальные гармоники имеют большие декременты затухания, так как расположены достаточно далеко от границы этой области. В результате нелинейные эффекты приводят к установлению между гармониками такого баланса, при котором их модули незначительны по сравнению с модулем первой гармоники. Поэтому установившийся стационарно-бегущий режим представляет собой практически чистую синусоиду, и в силу этого профили поверхности пленки для таких решений здесь не представлены.

Из проведенных расчетов выбрано несколько типичных примеров, иллюстрирующих некоторые характерные сценарии развития начальных возмущений. В этих примерах параметр $B = 0,39$, нейтральное волновое число $k_n = 1,5$. Почти для всех представленных ниже результатов в начальный момент времени ненулевыми задавались только первая и вторая гармоники:

$$H_{1r} = 0,1, \quad H_{1im} = 0, \quad H_{2r} = 0,05, \quad H_{2im} = 0. \quad (23)$$

Пример развития возмущения с волновым числом $k = 0,7$ представлен на рис. 5 и 6. На рис. 5 показана зависимость модулей первых трех Фурье-гармоник от времени. Видно, что после короткого переходного этапа решение эволюционирует к стационарно-бегущему волновому режиму, вторая и третья гармоники которого соизмеримы с первой гармоникой. В результате стационарно-бегущая волна имеет существенно несинусоидальный вид, что демонстрирует рис. 6. Здесь показаны профили волны для трех различных моментов времени. По оси абсцисс отложены две длины волны — 2λ ($\lambda = 2\pi/k$). В этом примере в области линейной неустойчивости лежат первая и вторая гармоники, причем вторая гармоника расположена в окрестности нейтрального волнового числа. Поэтому ее предельные значения в основном определяются нелинейным воздействием первой гармоники.

Пример радикального изменения эволюции периодической волны при волновом числе $k = 0,5$ показан на рис. 7–10. В этом случае и вторая гармоника лежит в области линейной неустойчивости достаточно далеко от нейтрального волнового числа. В результате по сравнению с первым примером поведение решения существенно усложняется.

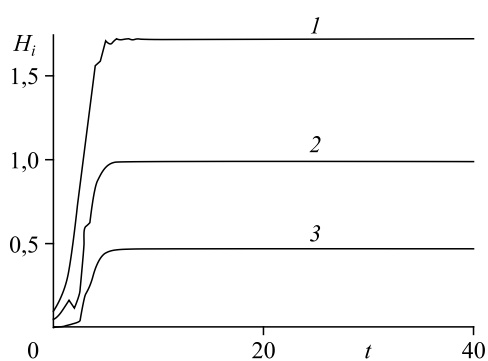


Рис. 5. Зависимости модулей первой H_1 (1), второй H_2 (2) и третьей H_3 (3) Фурье-гармоник от времени при $k = 0,7$.

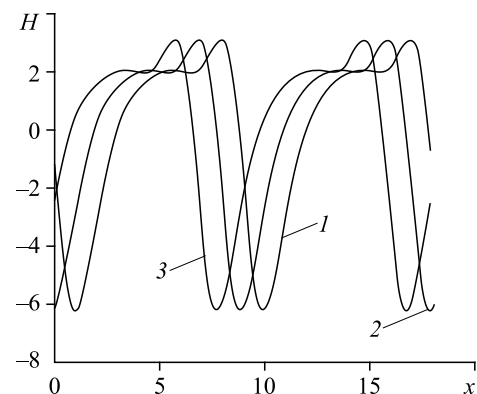


Рис. 6. Профили поверхности при $k = 0,7$ в различные моменты времени. $t = 50$ (1), 100 (2), 150 (3).

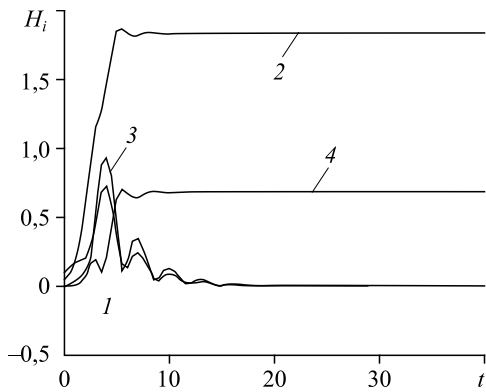


Рис. 7. Зависимости модулей первой H_1 (1), второй H_2 (2), третьей H_3 (3) и четвертой H_4 (4) Фурье-гармоник от времени при $k = 0,5$.

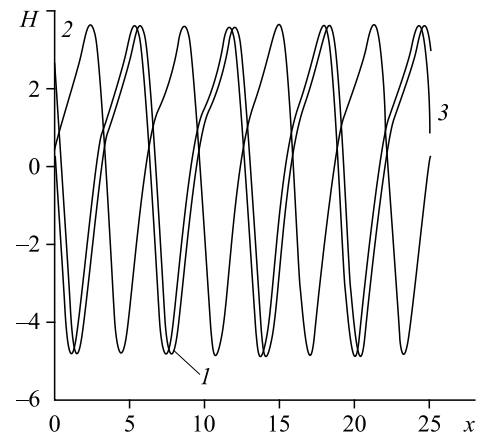


Рис. 8. Профили поверхности при $k = 0,5$ в различные моменты времени. $t = 100$ (1), 200 (2), 300 (3).

Так, при начальных условиях (23) модули всех нечетных гармоник после короткого переходного процесса становятся равными нулю. Этот момент показан на рис. 7: через время $t = 18$ модули первой и третьей гармоник становятся нулевыми, а второй и четвертой — выходят на постоянные значения. В результате решение эволюционировало к стационарно-бегущему режиму с волновым числом $k_{\text{new}} = 2k = 1$. Его профиль представлен на рис. 8. Здесь пространственный интервал также составляет две длины волны начального возмущения — 2λ ($\lambda = 2\pi/k$). Однако так как волновое число предельного режима стало в два раза больше (k_{new}), то можно видеть, что на этом промежутке укладываются четыре длины волны предельного профиля. В отличие от предыдущего примера ($k = 0,7$) изменение начальных условий в этом случае существенным образом влияет на развитие возмущения. Так, на рис. 9, 10 представлен пример эволюции с начальными условиями $H_{1r} = 0,2$, $H_{1im} = 0$, $H_{2r} = 0,0$, $H_{2im} = 0,05$.

Зависимость модулей первых трех Фурье-гармоник во времени показана на рис. 9. Здесь после достаточно долгого переходного процесса решение, как и в первом примере, выходит на стационарно-бегущий волновой режим с тем же самым волновым числом, что и начальное возмущение. Сам переходный процесс достаточно интересен. На его

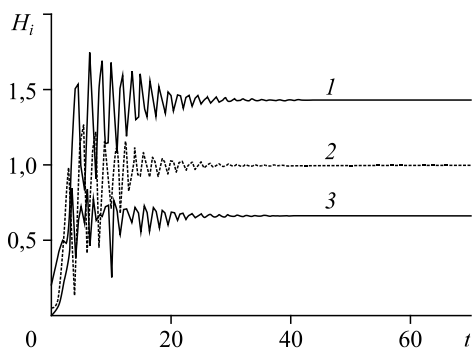


Рис. 9. Зависимости модулей первой H_1 (1), второй H_2 (2) и третьей H_3 (3) Фурье-гармоник от времени при $k = 0,5$.

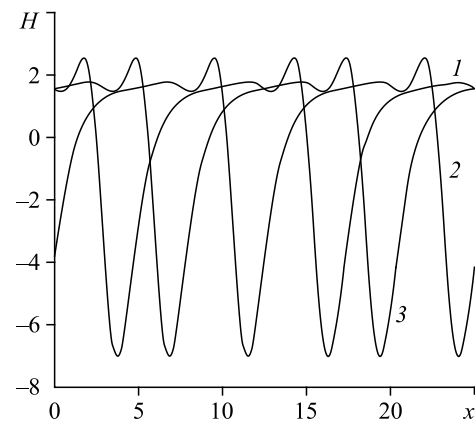


Рис. 10. Профили поверхности при $k = 0,5$ в различные моменты времени. $t = 100$ (1), 200 (2), 300 (3).

первом этапе (при $t < 5$) все три гармоники нарастают, а затем в их поведении наблюдается сильная корреляция — первая и вторая гармоники меняются в противофазе, а третья — в фазе. Осцилляции модулей гармоник практически исчезают после $t > 40$. Профили соответствующего стационарно-бегущего волнового режима представлены на рис. 10. Подобные корреляции между гармониками были отмечены в модельных расчетах волновых режимов в свободно стекающей пленке при малых и умеренных расходах жидкости [22]. Качественно такое поведение возмущений было объяснено в работе [23] с помощью маломодовой модели.

Заключение

С использованием рассчитанных по модели Буссинеска возмущений напряжений газа на границе раздела (вне ограничений традиционного квазиламинарного подхода) рассмотрены нелинейные волны на поверхности пленки жидкости, вертикально стекающей под действием силы тяжести и спутного газового потока. В случае малых чисел Рейнольдса задача сводится к модельному нелинейному интегро-дифференциальному уравнению на отклонение толщины слоя от невозмущенного уровня. Изучены решения этого модельного уравнения. Проанализирован характер ветвления волновых режимов от невозмущенного течения, аналитически найдены слабонелинейные стационарно-бегущие решения, волновые числа которых находятся в окрестности нейтральных волновых чисел. Показано, что имеет место мягкий тип ветвления. Численно рассмотрена эволюция периодических возмущений, волновые числа которых лежат достаточно глубоко в области неустойчивости невозмущенного течения. Представлено несколько характерных сценариев развития таких возмущений.

Список литературы

1. Гордилов А.А., Беренгартен М.Г., Пушнов А.С. Особенности пленочного течения жидкости по гофрированной поверхности регулярных насадок с перфорацией // Теоретические основы химической технологии. 2016. Т. 50, № 3. С. 334–343.
2. Алексеенко С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г. Волновое течение пленок жидкостей. Новосибирск: Наука, 1992. 256 с.
3. Накоряков В.Е., Григорьева Н.И. Неизотермическая абсорбция в термотрансформаторах. Новосибирск: Наука, 2010. 114 с.
4. Алексеенко С.В., Маркович Д.М., Харламов С.М., Черданцев А.В. Экспериментальное исследование линейной устойчивости стекающей пленки жидкости в присутствии турбулентного газового потока // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 4. С. 119–129.
5. Wolf A., Jayanti S., Hewitt G.F. Flow development in vertical annular flow // Chem. Engng. Sci. 2001. Vol. 56. P. 3221–3235.
6. Park C.D., Nosoko T., Gima S., Ro S.T. Wave-augmented mass transfer in a liquid film falling inside a vertical tube // Int. J. of Heat and Mass Trans. 2004. Vol. 47. P. 2587–2598.
7. Aktershev S.P., Alekseenko S.V. Interfacial instabilities in an annular two-phase flow // Russ. J. of Engng. Thermophysics. 1996. Vol. 6, No. 4. P. 307–320.
8. Tseluiko D., Kalliadasis S. Nonlinear waves in counter-current gas–liquid film flow // J. Fluid Mech. 2011. Vol. 673. P. 19–59.
9. Frank A.M. Numerical simulation of gas driven waves in a liquid film // Phys. Fluids. 2008. Vol. 20, No. 12. P. 122102.
10. Sisoev G.M., Matar O.K., Lawrence C.J. Wave regimes in two-layer microchannel flow // Chem. Engng. Sci. 2009. Vol. 64. P. 3094–3102.
11. Dietze G.F., Ruyer-Quil C.C. Wavy liquid films in interaction with a confined laminar gas flow // J. Fluid Mech. 2013. Vol. 722. P. 348–393.
12. Демѣхин Е.А. Нелинейные волны в пленке жидкости, увлекаемой турбулентным газовым потоком // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 2. С. 37–42.
13. Цвелодуб О.Ю., Архипов Д.Г. Моделирование нелинейных волн на поверхности тонкой пленки жидкости, движущейся под действием турбулентного потока газа // Прикл. механика и техн. физика. 2017. Т. 58, № 4. С. 56–67.
14. Trifonov Y.Y. Counter-current gas–liquid wavy film flow between the vertical plates analyzed using the Navier–Stokes equations // AIChE J. 2010. Vol. 56. P. 1975–1987.

15. **Vellingiri R., Tseluiko D., Savva N., Kalliadasis S.** Dynamics of a liquid film sheared by a co-flowing turbulent gas // Int. J. of Multiphase Flow. 2013. Vol. 56. P. 93–104.
16. **Geshev P.I.** A linear model of close-to-wall turbulent transfer // Russ. J. Engng. Thermophys. 1993. Vol. 3, No. 1. P. 49–89.
17. **Вожаков И.С., Архипов Д.Г., Цвелодуб О.Ю.** Моделирование нелинейных волн на поверхности тонкой пленки жидкости, увлекаемой турбулентным потоком газа // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22, № 2. С. 201–212.
18. **Tselodub O.Yu.** Simulating nonlinear steady-state traveling waves on the falling liquid film entrained by a gas flow // J. Physics: Conf. Series. 2016. Vol. 754. P. 032020.
19. **Tselodub O.Yu., Bocharov A.A.** Modeling nonlinear wave regimes in a falling liquid film entrained by a gas flow // Chaos, Solitons and Fractals. 2017. Vol. 104. P. 580–587.
20. **Tselodub O.Yu., Bocharov A.A.** Simulating solitary waves on a flowing down liquid film entrained by a gas stream // European J. of Mechanics. B- Fluids. 2018. Vol. 72. P. 449–455.
21. **Benjamin T.B.** Shearing flow over a wavy boundary // J. Fluid Mechanics. 1959. Vol. 6. P. 161–205.
22. **Vozhakov I.S., Arkhipov D.G., Tselodub O.Yu.** Studying evolution of periodic wave regimes on a falling down liquid film // J. of Physics: Conf. Series. 2017. Vol. 899, No. 3. P. 032025
23. **Vozhakov I.S., Arkhipov D.G., Tselodub O.Yu.** Nonstationary periodic wave regimes on a falling liquid film // J. of Physics: Conf. Series. 2018. Vol. 1105, No. 1. P. 012069-1–012069-6.

*Статья поступила в редакцию 3 сентября 2020 г.,
после доработки — 25 сентября 2020 г.,
принята к публикации 7 октября 2020 г.*