

УДК 532.528

## ТЕЧЕНИЕ ТИКСОТРОПНОЙ ЖИДКОСТИ НА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО РАСТЯГИВАЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛООБМЕНА

С. А. Шехзад, Т. Хайат<sup>\*,\*\*</sup>, А. Алсаеди<sup>\*\*</sup>

Институт информационных технологий COMSATS, 57000 Сахивал, Пакистан

\* Университет Куэд-и-Азам, 44000 Исламабад, Пакистан

\*\* Университет короля Абдул-Азиза, 21589 Джедда, Саудовская Аравия

E-mails: ali\_qau70@yahoo.com, fmgpak@gmail.com, aalsaedi@hotmail.com

Исследовано течение в пограничном слое тиксотропной жидкости на экспоненциально растягивающейся пластине при наличии теплообмена. Основные дифференциальные уравнения в частных производных сведены к обыкновенному дифференциальному уравнению, решение которого получено с помощью метода гомотопического анализа. Проведено сравнение полученных значений поверхностного трения и числа Нуссельта с известными данными.

**Ключевые слова:** установившееся течение, тиксотропная жидкость, экспоненциальное растяжение, теплообмен.

DOI: 10.15372/PMTF20160411

**Введение.** Интерес к изучению неньютоновских жидкостей обусловлен их применением в различных технологических процессах [1–6]. Использование вязкоупругих неньютоновских жидкостей позволяет значительно уменьшать температуру поверхности, влияя на качество получаемого изделия. Тиксотропная жидкость — это жидкость, вязкость которой уменьшается со временем даже при постоянной скорости сдвига (буровой раствор, косметическая продукция, краски, фармацевтическая продукция, продукты питания, суспензии, смазка, кровь, синовия). При изменении скорости сдвига тиксотропной жидкости имеет место гистерезис. В работе [7] численно исследовано течение Блазиуса тиксотропной жидкости.

Течение в пограничном слое, возникающее вследствие движения поверхности, рассмотрено в [8]. Такие потоки обычно встречаются при экструзии полимеров, непрерывной отливке, покрытии кабелей, вытяжке пластиковых листов, стекловолокна, в бумажной промышленности, при горячей прокатке и т. д. В [9] получено аналитическое решение задачи о течении в пограничном слое вязкой жидкости вследствие линейного растяжения поверхности. Позднее эта задача изучалась с учетом наличия вращения, теплообмена, химической реакции, магнитного поля [10–18]. Следует отметить, что поверхность не всегда растягивается по линейному закону [19]. В работе [20] рассмотрено течение в пограничном слое вязкой жидкости с учетом теплообмена на экспоненциально растягивающейся поверхности. В [21] исследовано влияние вязкой диссипации на смешение, конвекцию в по-

граничном слое вязкой жидкости при экспоненциальном растяжении поверхности. В [22] рассмотрена та же задача с учетом теплового излучения. Работы [23, 24] являются продолжением работы [20], в которой исследовались жидкости второго класса при наличии тепломассообмена. В [25] численно решена задача, сформулированная в работе [22]. В [26] описано влияние магнитного поля на течение в пограничном слое, вызванное экспоненциальным растяжением поверхности при наличии теплообмена. В [27] исследовано течение жидкости третьего класса на экспоненциально растягивающейся поверхности при наличии теплопереноса и проскальзывания. В работе [28] изучено влияние проскальзывания на течение вязкой жидкости на экспоненциально растягивающейся поверхности при наличии химической реакции.

Целью данной работы является исследование течения в пограничном слое тиксотропной жидкости на экспоненциально растягивающейся поверхности при наличии теплообмена с помощью метода гомотопического анализа (МГА) [29–40].

**Формулировка задачи.** Рассматривается двумерное течение несжимаемой тиксотропной жидкости на экспоненциально растягивающейся поверхности с учетом теплообмена в декартовой системе координат (ось  $x$  направлена вдоль пластины, ось  $y$  — перпендикулярно ей). Уравнения пограничного слоя и граничные условия имеют вид [7]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{6R_1}{\rho} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + \frac{4R_2}{\rho} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left( u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \left( u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right], \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

$$y = 0: \quad u = U_w(x) = U_0 e^{x/l}, \quad v = 0, \quad T = T_w = T_\infty + T_0 e^{ax/(2l)}, \\ y \rightarrow \infty: \quad u \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_\infty,$$

где  $u$ ,  $v$  — компоненты скорости в направлениях осей  $x$ ,  $y$  соответственно;  $R_1$ ,  $R_2$  — константы материала пластины (см. [6]);  $\nu = \mu/\rho$  — кинематическая вязкость;  $\mu$  — динамическая вязкость;  $\rho$  — плотность жидкости;  $T$  — температура жидкости;  $\alpha$  — температуропроводность;  $U_0$  — заданная скорость;  $l$  — заданная длина;  $a$ ,  $T_0$  — параметры распределения температуры на растягивающейся поверхности.

Введем потенциал течения  $\psi$ :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

и выполним преобразование исходных уравнений [23, 27]

$$\psi(x, y) = \sqrt{2\nu l U_0} f(\eta) e^{x/(2l)}, \quad \eta = y \sqrt{\frac{U_0}{2\nu l}} e^{x/(2l)}, \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}.$$

В результате задача принимает вид

$$f''' + f f'' - 2f'^2 - 3K_1(x) f''^2 f''' + K_2(x) (5f' f''^2 f''' + 3f''^4 - f f'' f'''' - f f''^2 f^{iv}) = 0, \\ \theta'' + \text{Pr} f \theta' - a \text{Pr} f' \theta = 0, \\ \eta = 0: \quad f = 0, \quad f' = 1, \quad \theta = 1, \quad \eta \rightarrow \infty: \quad f' = 0, \quad \theta = 0,$$

где  $K_1(x) = -(R_1 U_0^3 / (\mu l)) e^{3x/l}$ ,  $K_2(x) = (R_2 U_0^4 / (\mu \nu)) e^{4x/l}$  — безразмерные параметры тиксотропной жидкости;  $\text{Pr} = \nu/\alpha$  — число Прандтля. При этом уравнение (1) выполняется автоматически. Поскольку  $K_1(x)$  и  $K_2(x)$  зависят от  $x$ , система обыкновенных дифференциальных уравнений не является автомодельной во всей рассматриваемой области. Поэтому будем искать локально-подобное решение задачи.

Коэффициент поверхностного трения  $\text{Re}^{1/2} C_f$  и число Нуссельта  $\text{Nu}$  определяются по формулам

$$\text{Re}^{1/2} C_f = f''(0) - \frac{K_1}{6(f''(0))^3}, \quad \text{Nu} = \frac{x}{T_w - T_\infty} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \theta'(0) \sqrt{\frac{x}{2l}} \sqrt{\text{Re}_x}, \quad (2)$$

где  $\text{Re}_x = U_0 x / \nu$  — локальное число Рейнольдса. Так как  $0 < f''(0) < 1$  [7], то из (2) следует

$$|K_1| > 6(f''(0))^2.$$

**Представление решений.** Введем множество базисных функций в виде

$$\{\eta^k e^{-n\eta}, \quad k \geq 0, \quad n \geq 0\}$$

и представим функции  $f$  и  $\theta$  следующим образом:

$$f_m(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{m,n}^k \eta^k e^{-n\eta}, \quad \theta_m(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{m,n}^k \eta^k e^{-n\eta} \quad (3)$$

( $a_{m,n}^k, b_{m,n}^k$  — коэффициенты). Начальные приближения и вспомогательные линейные операторы выбраны следующим образом:

$$f_0(\eta) = 1 - e^{-\eta}, \quad \theta_0(\eta) = e^{-\eta}, \\ L_f = f''' - f', \quad L_\theta = \theta'' - \theta,$$

$$L_f(C_1 + C_2 e^\eta + C_3 e^{-\eta}) = 0, \quad L_\theta(C_4 e^\eta + C_5 e^{-\eta}) = 0$$

( $C_i$  ( $i = 1 \div 5$ ) — произвольные постоянные).

Задачи о деформации нулевого порядка формулируются в виде

$$(1 - q)L_f[\hat{f}(\eta; q) - f_0(\eta)] = qh_f N_f[\hat{f}(\eta; q)], \\ (1 - q)L_\theta[\hat{\theta}(\eta; q) - \theta_0(\eta)] = qh_\theta N_\theta[\hat{\theta}(\eta; q)], \\ \hat{f}(0; q) = 0, \quad \hat{f}'(0; q) = 1, \quad \hat{\theta}(0; q) = 1, \\ \hat{f}'(\infty; q) = 0, \quad \hat{\theta}(\infty; q) = 0.$$

Здесь  $q$  — параметр вложения;  $h_f, h_\theta$  — ненулевые вспомогательные параметры;  $N_f, N_\theta$  — нелинейные операторы:

$$N_f[\hat{f}(\eta; q)] = \frac{\partial^3 \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta^3} + \hat{f}(\eta, q) \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta^2} - \left( \frac{\partial \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta} \right)^2 + K_1(x) \left( \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta^2} \right)^2 \frac{\partial^3 \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta^3} + \\ + K_2(x) \left[ \frac{\partial \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta} \left( \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta^2} \right)^2 \frac{\partial^3 \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta^3} + \left( \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta^2} \right)^4 - \right. \\ \left. - \hat{f}(\eta, q) \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial^3 \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta^3} \right)^2 - \hat{f}(\eta, q) \left( \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta^2} \right)^2 \frac{\partial^4 \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta^4} \right], \\ N_\theta[\hat{\theta}(\eta; q)] = \frac{\partial^2 \hat{\theta}(\eta, q)}{\partial \eta^2} + \text{Pr} \hat{f}(\eta, q) \frac{\partial \hat{\theta}(\eta, q)}{\partial \eta} - a \text{Pr} \frac{\partial \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta} \hat{\theta}(\eta, q).$$

При  $q = 0$  и  $q = 1$  имеем

$$\begin{aligned}\hat{f}(\eta; 0) &= f_0(\eta), & \hat{f}(\eta; 1) &= f(\eta), \\ \hat{\theta}(\eta; 0) &= \theta_0(\eta), & \hat{\theta}(\eta; 1) &= \theta(\eta),\end{aligned}$$

при  $0 < q < 1$  значения функций  $f(\eta, q)$ ,  $\theta(\eta, q)$  изменяются от  $f_0(\eta)$ ,  $\theta_0(\eta)$  до  $f(\eta)$ ,  $\theta(\eta)$ . Используя разложение Тейлора, получаем решения в виде рядов

$$\begin{aligned}f(\eta, q) &= f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta)q^m, & f_m(\eta) &= \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m f(\eta; q)}{\partial \eta^m} \right|_{q=0}, \\ \theta(\eta, q) &= \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(\eta)q^m, & \theta_m(\eta) &= \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \theta(\eta; q)}{\partial \eta^m} \right|_{q=0},\end{aligned}$$

сходимость которых существенно зависит от  $h_f$  и  $h_\theta$ . Вспомогательные параметры  $h_f$  и  $h_\theta$  выбираются таким образом, что при  $q = 1$  полученные ряды сходятся:

$$f(\eta) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta), \quad \theta(\eta) = \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(\eta).$$

Задачи о деформации  $m$ -го порядка имеют вид

$$L_f[f_m(\eta) - \chi_m f_{m-1}(\eta)] = h_f R_f^m(\eta), \quad L_\theta[\theta_m(\eta) - \chi_m \theta_{m-1}(\eta)] = h_\theta R_\theta^m(\eta),$$

$$f_m(0) = f'_m(0) = f'_m(\infty) = 0, \quad \theta_m(0) = \theta_m(\infty) = 0,$$

$$\begin{aligned}R_f^m(\eta) &= f'''_{m-1}(\eta) + \sum_{k=0}^{m-1} [f_{m-1-k} f''_k - 2f'_{m-1-k} f'''_k] - 3K_1(x) \sum_{k=0}^{m-1} f''_{m-1-k} \sum_{l=0}^k f''_{k-l} f'''_l + \\ &+ K_2(x) \sum_{k=0}^{m-1} \left[ f'_{m-1-k} \sum_{l=0}^k 5f'''_{k-l} \sum_{s=0}^l f''_{l-s} f''_s + 3f'_{m-1-k} \sum_{l=0}^k f''_{k-l} \sum_{s=0}^l f''_{l-s} f''_s - \right. \\ &\quad \left. - f_{m-1-k} \sum_{l=0}^k f''_{k-l} \sum_{s=0}^l f'''_{l-s} f'''_s - f_{m-1-k} \sum_{l=0}^k f''_{k-l} \sum_{s=0}^l f''_{l-s} f''''_s \right], \\ R_\theta^m(\eta) &= \theta''_{m-1}(\eta) + \text{Pr} \sum_{k=0}^{m-1} (\theta'_{m-1-k} f_k - a\theta_{m-1-k} f'_k).\end{aligned}$$

Решая эти задачи, получаем

$$f_m(\eta) = f_m^*(\eta) + C_1 + C_2 e^\eta + C_3 e^{-\eta}, \quad \theta_m(\eta) = \theta_m^*(\eta) + C_4 e^\eta + C_5 e^{-\eta},$$

где  $f_m^*$ ,  $\theta_m^*(\eta)$  — частные решения.

**Сходимость решений и обсуждение результатов.** Вспомогательные параметры  $h_f$  и  $h_\theta$  обеспечивают сходимость рядов решений. Для определения допустимых диапазонов значений  $h_f$  и  $h_\theta$  построены  $h$ -кривые 15-го порядка аппроксимации. На рис. 1 показаны  $h$ -кривые для функций  $f''(0)$ ,  $\theta'(0)$ . Видно, что допустимые значения  $h_f$  и  $h_\theta$  находятся в диапазонах  $-1,05 \leq h_f \leq -0,20$  и  $-1,15 \leq h_\theta \leq -0,50$ . Из рис. 1 следует, что ряды (3) сходятся для любого  $\eta$  при  $h_f = -0,7$ ,  $h_\theta = -0,8$ .

Исследуем влияние различных параметров на скорость и температуру. На рис. 2, 3 показано влияние параметров  $K_1$ ,  $K_2$  на скорость  $f'$ . Видно, что с увеличением  $K_1$  значения  $f'$  уменьшаются, а с увеличением  $K_2$  — увеличиваются. Аналогичная зависимость

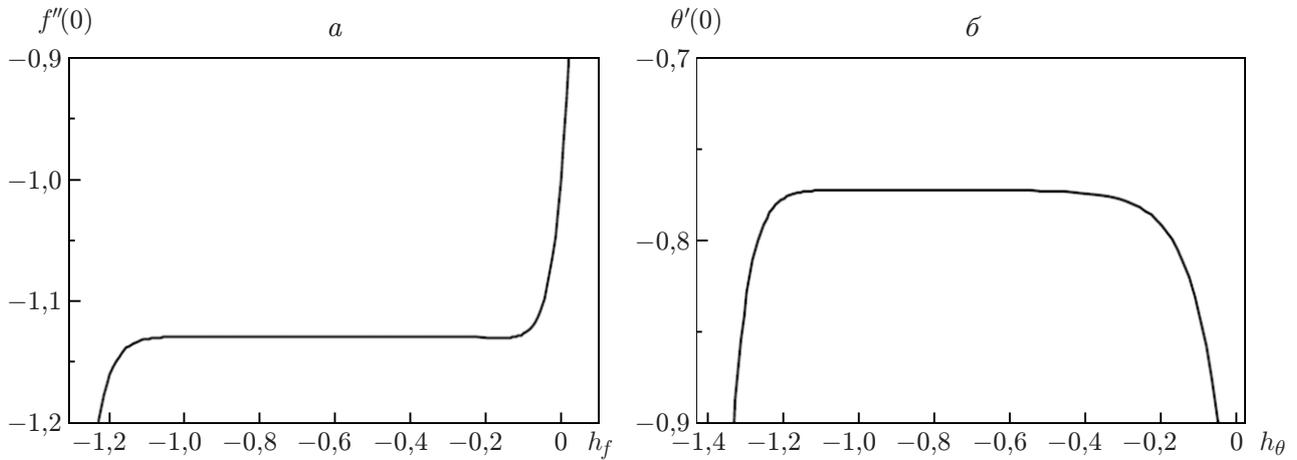


Рис. 1.  $h$ -кривые для функций  $f''(0)$  (а) и  $\theta'(0)$  (б) при  $K_1 = 0,3$ ,  $K_2 = 0,2$ ,  $Pr = 1,0$ ,  $a = 0,5$  и порядке аппроксимации решения, равном 17

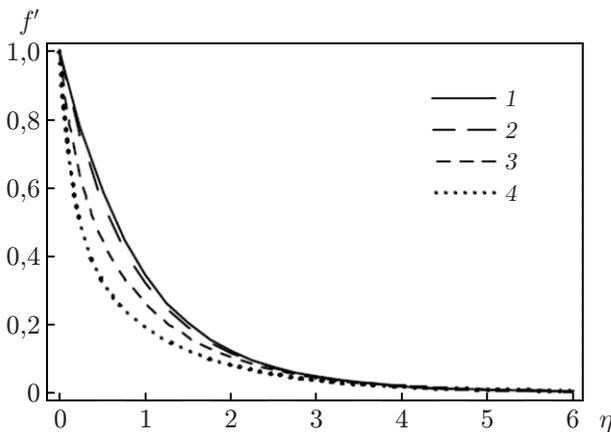


Рис. 2

Рис. 2. Профиль скорости  $f'(\eta)$  при  $K_2 = 0,2$  и различных значениях параметра материала  $K_1$ :

1 —  $K_1 = 0$ , 2 —  $K_1 = 0,3$ , 3 —  $K_1 = 0,7$ , 4 —  $K_1 = 1,0$

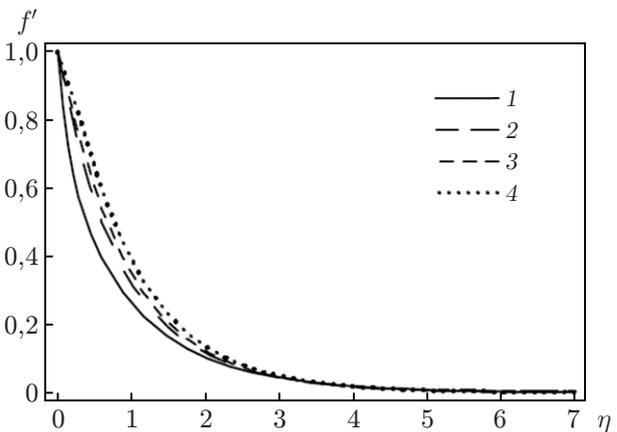


Рис. 3

Рис. 3. Профиль скорости  $f'(\eta)$  при  $K_1 = 0,3$  и различных значениях параметра материала  $K_2$ :

1 —  $K_2 = 0$ , 2 —  $K_2 = 0,2$ , 3 —  $K_2 = 0,4$ , 4 —  $K_2 = 0,6$

имеет место для толщины пограничного слоя. На рис. 4, 5 показано влияние параметров материала  $K_1$  и  $K_2$  на температуру. Результаты сравнения рис. 2 и 4 показывают, что параметр материала  $K_1$  оказывает противоположное влияние на скорость и температуру. На рис. 5 видно, что с ростом  $K_2$  температура уменьшается. На рис. 6 показано влияние числа Прандтля на температуру. Видно, что с увеличением  $Pr$  температура, а следовательно, и толщина теплового пограничного слоя уменьшаются. Из определения числа Прандтля следует, что большие числа Прандтля соответствуют меньшей теплопроводности жидкости. Соответственно при увеличении числа Прандтля толщина теплового пограничного слоя уменьшается.

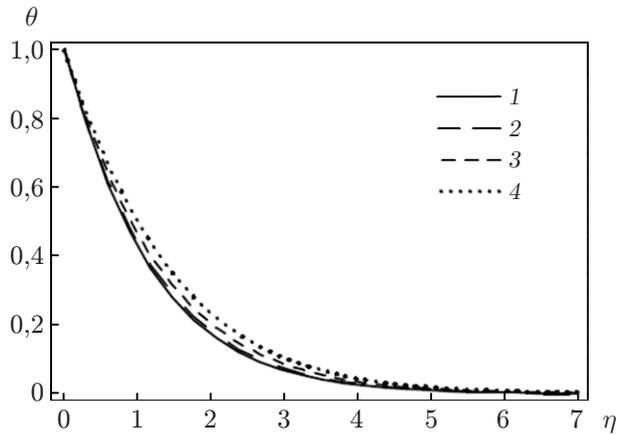


Рис. 4

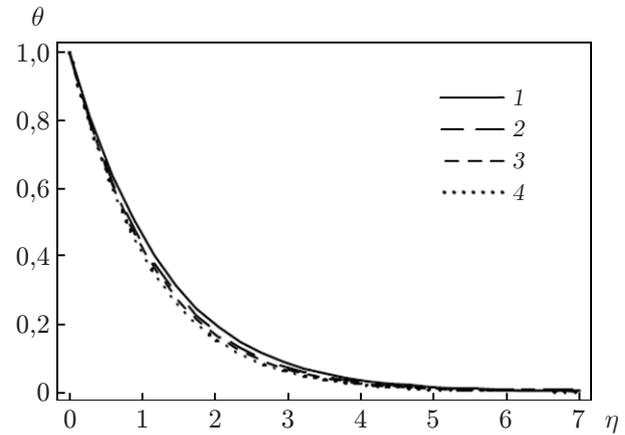


Рис. 5

Рис. 4. Профиль температуры  $\theta(\eta)$  при  $K_2 = 0,2$ ,  $Pr = 1,0$ ,  $a = 0,5$  и различных значениях параметра материала  $K_1$ :

1 —  $K_1 = 0$ , 2 —  $K_1 = 0,3$ , 3 —  $K_1 = 0,7$ , 4 —  $K_1 = 1,0$

Рис. 5. Профиль температуры  $\theta(\eta)$  при  $K_1 = 0,3$ ,  $Pr = 1,0$ ,  $a = 0,5$  и различных значениях параметра материала  $K_2$ :

1 —  $K_2 = 0$ , 2 —  $K_2 = 0,2$ , 3 —  $K_2 = 0,4$ , 4 —  $K_2 = 0,6$

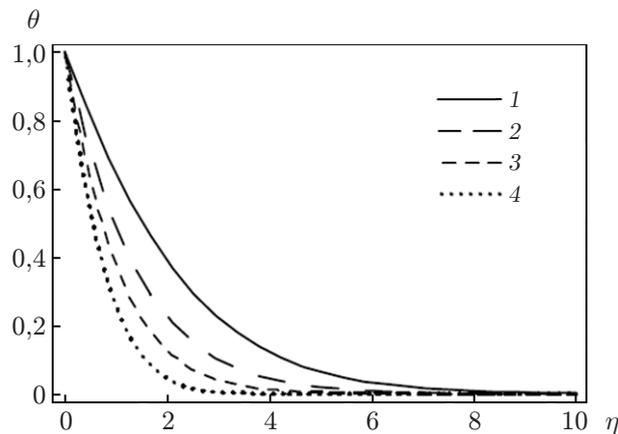


Рис. 6. Профиль температуры  $\theta(\eta)$  при  $K_1 = 0,3$ ,  $K_2 = 0,2$ ,  $a = 0,5$  и различных значениях числа Прандтля  $Pr$ :

1 —  $Pr = 0,2$ , 2 —  $Pr = 0,8$ , 3 —  $Pr = 1,3$ , 4 —  $Pr = 2,0$

Таблица 1

Сходимость решения при аппроксимациях различного порядка  
( $K_1 = 0,3$ ,  $K_2 = 0,2$ ,  $Pr = 1,0$ ,  $a = 0,5$ ,  $h_f = -0,7$ ,  $h_\theta = -0,8$ )

Порядок приближения	$-f''(0)$	$-\theta'(0)$
1	1,152 833	0,866 667
10	1,128 183	0,773 315
15	1,128 178	0,772 787
20	1,128 178	0,772 723
25	1,128 178	0,772 715
30	1,128 178	0,772 715
35	1,128 178	0,772 715

Таблица 2

Значения параметра  $h$  при  $K_1 = K_2 = 0$  и различных значениях  $a$  и  $Pr$

Pr	$h$				
	$a = -1,5$	$a = -0,5$	$a = 0$	$a = 1,0$	$a = 3,0$
0,5	-3/2	-3/2	-3/2	-3/2	-3/2
1,0	-3/2	-3/2	-3/2	-3/2	-3/2
3,0	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2
5,0	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2
8,0	-1/5	-1/5	-1/5	-1/5	-1/5
10,0	-1/10	-1/10	-1/10	-1/10	-1/10

В табл. 1 приведены результаты решения, полученные с помощью МГА при аппроксимациях различного порядка. В табл. 2 представлены значения  $h$  при различных значениях параметров  $a$ ,  $Pr$ . В табл. 3 приведены результаты численного и аналитического расчета значений  $-\theta'(0)$  при  $K_1 = K_2 = 0$ . Заметим, что эти результаты хорошо согласуются. В табл. 4 приведены значения коэффициента поверхностного трения. Из табл. 4 следует, что параметры материала  $K_1$  и  $K_2$  оказывают противоположное влияние на коэффициент поверхностного трения. В табл. 5 представлены значения скорости теплообмена на стенке  $-\theta'(0)$  при различных значениях  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $Pr$ ,  $a$ . Из табл. 5 следует, что с увеличением  $K_2$ ,  $Pr$ ,  $a$  значения  $-\theta'(0)$  увеличиваются, а с увеличением  $K_1$  — уменьшаются.

**Заключение.** В работе исследовано стационарное течение тиксотропной жидкости на экспоненциально растягивающейся поверхности при наличии теплообмена. Разработана двумерная математическая модель течения тиксотропной жидкости, возникающего при экспоненциальном растяжении поверхности. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

Параметры материала  $K_1$  и  $K_2$  оказывают противоположное влияние на скорость  $f'$  и толщину пограничного слоя. С увеличением числа Прандтля  $Pr$  температура и толщина теплового пограничного слоя уменьшаются. С увеличением параметра температуры  $a$  температура  $\theta(\eta)$  уменьшается, а с увеличением параметра материала  $K_1$  — увеличивается.

При увеличении параметра  $K_1$  значения коэффициента поверхностного трения увеличиваются, а при увеличении параметра  $K_2$  — уменьшаются.

Таблица 3

Значения  $-\theta'(0)$  при  $K_1 = K_2 = 0$  и различных значениях  $\Gamma$ ,  $a$

$\Gamma$	$-\theta'(0)$											
	$a = -1,5$		$a = -0,5$		$a = 0$		$a = 1,0$		$a = 3,0$			
	Численное решение [11]	Аналитическое решение (МГА)										
0,5	0,204 049	0,204 043	0,175 815	0,175 827	0,330 493	0,330 494	0,594 338	0,594 311	1,008 405	1,008 442		
1,0	0,377 413	0,377 411	0,299 876	0,299 678	0,549 643	0,549 649	0,954 782	0,954 797	1,560 294	1,560 251		
3,0	0,923 857	0,923 844	0,634 113	0,634 155	1,122 188	1,122 154	1,869 075	1,869 033	2,938 535	2,938 563		
5,0	1,353 240	1,353 323	0,870 431	0,870 427	1,521 243	1,521 243	2,500 135	2,500 451	3,886 555	3,886 829		
8,0	1,888 500	1,888 413	1,150 321	1,150 594	1,991 847	1,991 631	3,242 129	3,242 322	5,000 465	5,000 973		
10,0	2,200 000	2,221 973	1,308 613	1,308 864	2,257 429	2,257 872	3,660 379	3,660 422	5,628 198	5,628 347		

Таблица 4

Значения коэффициента поверхностного трения  $C_f Re^{1/2}$  при различных значениях  $K_1$  и  $K_2$

$K_1$	$K_2$	$-C_f Re^{1/2}$
0	0,2	0,994 90
0,1	0,2	1,010 67
0,2	0,2	1,030 36
0,3	0,2	1,056 38
0,1	0	1,561 55
0,1	0,2	1,010 67
0,1	0,3	0,942 89
0,1	0,4	0,895 04

Таблица 5

Значения  $-\theta'(0)$  при различных значениях  $K_1, K_2, Pr, a$

$K_1$	$K_2$	$Pr$	$a$	$-\theta'(0)$
0	0,2	1,0	0,5	0,792 47
0,4	0,2	1,0	0,5	0,762 70
0,6	0,2	1,0	0,5	0,706 13
0,3	0,1	1,0	0,5	0,748 61
0,3	0,3	1,0	0,5	0,786 10
0,3	0,5	1,0	0,5	0,835 39
0,3	0,5	0,4	0,5	0,425 83
0,3	0,5	0,8	0,5	0,663 94
0,3	0,5	1,5	0,5	1,006 40
0,3	0,5	1,5	0	0,555 57
0,3	0,5	1,5	0,7	0,852 03
0,3	0,5	1,5	1,5	1,103 59

С увеличением параметра материала  $K_1$  значения локального числа Нуссельта  $-\theta'(0)$  и скорости передачи тепла на стенке уменьшаются. Параметры  $K_1$  и  $K_2$  оказывают противоположное влияние на число Нуссельта.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Wang S., Tan W. C.** Stability analysis of Soret-driven double-diffusive convection of Maxwell fluid in a porous medium // Intern. J. Heat Fluid Flow. 2011. V. 32. P. 88–94.
2. **Pakdemirli M., Hayat T., Yürüsoy M., et al.** Perturbation analysis of a modified second grade fluid over a porous plate // Nonlinear Anal.: Real World Appl. 2011. V. 12. P. 1774–1785.
3. **Jamil M., Fetecau C.** Some exact solutions for rotating flows of a generalized Burgers' fluid in cylindrical domains // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2010. V. 165. P. 1700–1712.
4. **Hayat T., Shehzad S. A., Qasim M., Obaidat S.** Steady flow of Maxwell fluid with convective boundary conditions // Z. Naturforsch. Ser. A. 2011. Bd 66a. S. 417–422.
5. **Rashidi M. M., Pour S. A. M., Abbasbandy S.** Analytic approximate solutions for heat transfer of a micropolar fluid through a porous medium with radiation // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2011. V. 16. P. 1874–1889.
6. **Mahmoud M. A. A., Megahed A. M.** Effects of viscous dissipation and heat generation (absorption) in a thermal boundary layer of a non-Newtonian fluid over a continuously moving permeable flat plate // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2009. V. 50, N 5. P. 819–825.
7. **Sadeqi S., Khabazi N., Sadeghy K.** Blasius flow of thixotropic fluids: A numerical study // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2011. V. 16. P. 711–721.
8. **Sakiadis B. C.** Boundary layer behavior on continuous solid surfaces. 1. Boundary layer equations for two dimensional and axisymmetric flow // AIChE. J. 1961. V. 7. P. 26–28.
9. **Crane L. J.** Flow past a stretching plate // Z. angew. Math. Phys. 1970. Bd 21. S. 645–647.
10. **Rahman G. M. A.** Thermal-diffusion and MHD for Soret and Dufour's effects on Hiemenz flow and mass transfer of fluid flow through porous medium onto a stretching surface // Physica B. 2010. V. 405. P. 2560–2569.
11. **Fang T., Zhang J., Yao S.** A new family of unsteady boundary layers over a stretching surface // Appl. Math. Comput. 2010. V. 217. P. 3747–3755.

12. **Ahmad A., Asghar S.** Flow of a second grade fluid over a sheet stretching with arbitrary velocities subject to a transverse magnetic field // *Appl. Math. Lett.* 2011. V. 24. P. 1905–1909.
13. **Yao B., Chen J.** Series solution to the Falkner — Skan equation with stretching boundary // *Appl. Math. Comput.* 2009. V. 208. P. 156–164.
14. **Joneidi A. A., Domairry G., Babaelahi M.** Analytical treatment of MHD free convective flow and mass transfer over a stretching sheet with chemical reaction // *J. Taiwan Inst. Chem. Engng.* 2010. V. 41. P. 35–43.
15. **Muhaimina, Kandasamy R., Hashim I.** Effect of chemical reaction, heat and mass transfer on nonlinear boundary layer past a porous shrinking sheet in the presence of suction // *Nuclear Engng Design.* 2010. V. 240. P. 933–939.
16. **Hayat T., Qasim M., Abbas Z.** Radiation and mass transfer effects on the magnetohydrodynamic unsteady flow induced by a stretching sheet // *Z. Naturforsch. Ser. A.* 2010. Bd 64. S. 231–239.
17. **Hayat T., Shehzad S. A., Qasim M.** Mixed convection flow of a micropolar fluid with radiation and chemical reaction // *Intern. J. Numer. Methods Fluids.* 2011. V. 67. P. 2375–2387.
18. **Kasmani R. Md., Muhaimin I., Kandasamy R.** Laminar boundary layer flow of a nanofluid along a wedge in the presence of suction/injection // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2013. V. 54, N 3. P. 377–384.
19. **Gupta P. S., Gupta A. S.** Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction and blowing // *Canad. J. Chem. Engng.* 1977. V. 55. P. 744–746.
20. **Elbashbeshy E. M. A.** Heat transfer over an exponentially stretching continuous surface with suction // *Arch. Mech.* 2001. V. 53. P. 643–651.
21. **Partha M. K., Murthy P. V. S. N., Rajasekhar G. P.** Effects of viscous dissipation on the mixed convection heat transfer from an exponentially stretching surface // *Heat Mass Transfer.* 2005. V. 41. P. 360–366.
22. **Sajid M., Hayat T.** Influence of thermal radiation on the boundary layer flow due to an exponentially stretching sheet // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer.* 2008. V. 35. P. 347–356.
23. **Khan S. K.** Boundary layer viscoelastic fluid flow over an exponentially stretching sheet // *Intern. J. Appl. Mech. Engng.* 2006. V. 11. P. 321–335.
24. **Khan S. K., Sanjayanand E.** Viscoelastic boundary layer flow and heat transfer over an exponential stretching sheet // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2005. V. 48. P. 1534–1542.
25. **Bidin B., Nazar R.** Numerical solution of the boundary layer flow over an exponentially stretching sheet with thermal radiation // *Europ. J. Sci. Res.* 2009. V. 33. P. 710–717.
26. **Pal D.** Mixed convection heat transfer in the boundary layers on an exponentially stretching surface with magnetic field // *Appl. Math. Comput.* 2010. V. 217. P. 2356–2369.
27. **Sahoo B., Poncet S.** Flow and heat transfer of a third grade fluid past an exponentially stretching sheet with partial slip boundary condition // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2011. V. 54. P. 5010–5019.
28. **Mukhopadhyay S., Golam Arif M., Wazed Ali M.** Effects of partial slip on chemically reactive solute transfer in the boundary layer flow over an exponentially stretching sheet with suction/blowing // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2013. V. 54, N 6. P. 928–936.
29. **Liao S. J.** Beyond perturbation: Introduction to homotopy analysis method. Boca Raton: Chapman and Hall: CRC Press, 2003.
30. **Rashidi M. M., Pour S. A. M.** Analytic approximate solutions for unsteady boundary-layer flow and heat transfer due to a stretching sheet by homotopy analysis method // *Nonlinear Anal. Model. Control.* 2010. V. 15. P. 83–95.

31. **Kandasamy R., Muhaimin I.** Homotopy analysis method for thermophoretic particle deposition effect on magnetohydrodynamic mixed convective heat and mass transfer past a porous wedge in the presence of suction // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2010. V. 51, N 2. P. 249–260.
32. **Tabaei H., Moghimi M. A., Kimiaefar A., Moghimi M. A.** Homotopy analysis and differential quadrature solution of the problem of free-convective magnetohydrodynamic flow over a stretching sheet with the Hall effect and mass transfer taken into account // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2011. V. 52, N 4. P. 624–636.
33. **Ziabakhsh Z., Domairry G., Bararnia H., Babazadeh H.** Analytical solution of flow and diffusion of chemically reactive species over a nonlinearly stretching sheet immersed in a porous medium // J. Taiwan Inst. Chem. Engng. 2010. V. 41. P. 22–28.
34. **Turkyilmazoglu M.** Solution of the Thomas — Fermi equation with a convergent approach // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2012. V. 17. P. 4097–4103.
35. **Abbasbandy S., Shirzadi A.** Homotopy analysis method for a nonlinear chemistry problem // Studies Nonlinear Sci. 2010. V. 1. P. 127–132.
36. **Shehzad S. A., Alsaedi A., Hayat T.** Hydromagnetic steady flow of Maxwell fluid over a bidirectional stretching surface with prescribed surface temperature and prescribed surface heat flux // Plos One. 2013. V. 8. e68139.
37. **Hayat T., Waqas M., Shehzad S. A., Alsaedi A.** Mixed convection radiative flow of Maxwell fluid near a stagnation point with convective condition // J. Mech. 2013. V. 29. P. 403–409.
38. **Alsaedi F. E., Shehzad S. A., Hayat T., Monaqueel S. J.** Soret and Dufour effects on the unsteady mixed convection flow over a stretching surface // J. Mech. 2013. V. 29. P. 623–632.
39. **Moradi A., Ahmadikia H., Hayat T., Alsaedi A.** On mixed convection radiation interaction about an inclined plate through a porous medium // Intern. J. Thermal Sci. 2013. V. 64. P. 129–136.
40. **Sadri S., Babaelahi M.** Analysis of laminar boundary layer flow over a flat plate with injection or suction // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2013. V. 54, N 1. P. 59–67.

*Поступила в редакцию 6/III 2014 г.,  
в окончательном варианте — 24/IV 2014 г.*

---