Теплофизика и аэромеханика, 2016, том 23, № 1

УДК 532.517.4

Динамика безымпульсного турбулентного следа в сдвиговом потоке линейно стратифицированной среды*

О.Ф. Воропаева, Г.Г. Черных

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

Новосибирский государственный университет

E-mails: vorop@ict.nsc.ru, chernykh@ict.nsc.ru

Построена численная модель и выполнено исследование динамики безымпульсного турбулентного следа в горизонтально однородном сдвиговом потоке линейно стратифицированной среды. Полученные данные демонстрируют трансформацию области турбулентных возмущений и генерируемых следом внутренних волн под воздействием сдвигового потока, а также существенное порождение энергии турбулентности осредненным движением, приводящее к замедлению вырождения турбулентности при больших временах после прохода тела.

Ключевые слова: безымпульсный турбулентный след, внутренние волны, сдвиговое течение, стратифицированная среда, численное моделирование.

Введение

Динамика безымпульсного турбулентного следа в линейно стратифицированной среде изучена достаточно подробно (см. обзоры [1–5]). Построены эффективные численные модели, основанные на полуэмпирических моделях турбулентности второго и третьего порядка, методе крупных вихрей (LES) и методе прямого численного моделирования (DNS). Результаты расчетов хорошо согласуются с результатами лабораторных измерений. Представляет интерес течение в безымпульсном турбулентном следе при наличии линейной устойчивой стратификации среды и горизонтально однородного линейного сдвигового течения. В настоящей работе построена численная модель такого течения для случая ненулевого сдвига скорости в плоскости, ортогональной оси следа, и представлены результаты численных экспериментов. Показано, что турбулентный след и генерируемые им внутренние волны существенно деформируются в направлении фонового сдвигового течения; при этом наблюдается замедление вырождения турбулентности при больших временах после прохода тела.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 10-01-00435, 12-01-00648, 13-01-00246) и Программы государственной поддержки научных школ (НШ 5006.2014.9).

© **Воропаева О.Ф., Черных Г.Г., 2016**

Постановка задачи

Для описания динамики безымпульсного турбулентного следа в горизонтально однородном $\left(U = U_s(y)\right)$ сдвиговом потоке привлекается следующая система осредненных по Рейнольдсу уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{1}{\rho_0}\cdot\frac{\partial\langle p_1\rangle}{\partial x}-\frac{\partial\langle u'^2\rangle}{\partial x}-\frac{\partial\langle u'v'\rangle}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{1}{\rho_0}\cdot\frac{\partial\langle p_1\rangle}{\partial y}-\frac{\partial\langle u'v'\rangle}{\partial x}-\frac{\partial\langle v'^2\rangle}{\partial y}-\frac{g}{\rho_0}\langle\rho_d\rangle, \tag{2}$$

$$\frac{\partial W_d}{\partial t}+U\frac{\partial W_d}{\partial x}+V\frac{\partial W_d}{\partial y}=\frac{\partial\langle u'w'\rangle}{\partial x}+\frac{\partial\langle v'w'\rangle}{\partial y}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\langle\rho_d\rangle}{\partial t}+U\frac{\partial\langle\rho_d\rangle}{\partial x}+V\frac{\partial\langle\rho_d\rangle}{\partial y}+V\frac{d\rho_s}{dy}=-\frac{\partial\langle u'\rho'\rangle}{\partial x}-\frac{\partial\langle v'\rho'\rangle}{\partial y}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0. \tag{5}$$

Введением функции тока γ и завихренности ω, где $\omega=\partial U/\partial y-\partial V/\partial x$, $U=\partial\psi/\partial y$, $V=-\partial\psi/\partial x$, система уравнений (1), (2), (5) сводится к следующей:

$$\frac{\partial\omega_d}{\partial t}+\frac{\partial\psi_d}{\partial y}\frac{\partial\omega_d}{\partial x}+\frac{d\psi_s}{dy}\cdot\frac{\partial\omega_d}{\partial x}-\frac{\partial\psi_d}{\partial x}\cdot\frac{\partial\omega_d}{\partial y}=$$

$$=-\frac{\partial^2\left(\langle u'^2\rangle-\langle v'^2\rangle\right)}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\langle u'v'\rangle}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\langle u'v'\rangle}{\partial x^2}+\frac{g}{\rho_0}\cdot\frac{\partial\langle\rho_d\rangle}{\partial x}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2\psi_d}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_d}{\partial y^2}=\omega_d. \tag{7}$$

В уравнениях (1)–(7) и ниже приняты следующие обозначения: $U=U_1$, $V=U_2$, $W=U_3$, эти величины являются компонентами скорости осредненного движения в направлении осей $x=x_1$, $y=x_2$, $z=x_3$ (для удобства ось z направлена вдоль оси движения тела, ось y — вертикально вверх), а $u'=u_1'$, $v'=u_2'$, $w'=u_3'$ — соответствующие компоненты скорости пульсационного движения; W_0 — продольная компонента скорости набегающего потока, $t=z/W_0$ — время после прохода тела, $U_s=U_s(y)$ — скорость фонового сдвигового течения, $W_d=W_0-W$ — дефект осредненной горизонтальной продольной компоненты скорости; $\omega_d=\omega-\omega_s$, $\psi_d=\psi-\psi_s$ — дефекты завихренности и функции тока соответственно, ω_s и ψ_s — завихренность и функция тока фонового сдвигового течения, $\rho_d=\rho-\rho_s$ — дефект плотности, где $\rho_s=\rho_s(z)=\rho_0(1-az)$ — плотность невозмущенной среды; $\mathbf{g}=(0,-g,0)$ — ускорение силы тяжести, $\langle\ \rangle$ — знак осреднения; штрихами помечены пульсационные составляющие полей скорости и плотности. В уравнениях математической модели отброшены в предположении малости члены с молекулярной вязкостью, производная по переменной z от давления в правой части уравнения (3), а также производные по z от компонент тензора рейнольдсовых напряжений и вектора турбулентных потоков в уравнениях (1)–(4) и дефекта продольной осредненной компоненты скорости W_d в (5). При записи уравнений (6), (7) учтена линейность горизонтально однородного фонового сдвигового течения.

Система уравнений (3), (4), (6), (7) незамкнута. Для ее замыкания привлекается математическая модель, включающая в себя уравнения переноса компонент тензора рейнольдсовых напряжений $\langle u_i'u_i'\rangle$ (i = 1, 2, 3), $\langle u'v'\rangle$ (здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование):

$$\frac{\partial\langle u_i'u_j'\rangle}{\partial t}+U\frac{\partial\langle u_i'u_j'\rangle}{\partial x}+V\frac{\partial\langle u_i'u_j'\rangle}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}K_{ex}\frac{\partial\langle u_i'u_j'\rangle}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}K_{ey}\frac{\partial\langle u_i'u_j'\rangle}{\partial y}+$$
$$+P_{ij}+G_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon-c_1\frac{\varepsilon}{e}\left(\langle u_i'u_j'\rangle-\frac{2}{3}\delta_{ij}e\right)-c_2\left(P_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}P\right)-c_2\left(G_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}G\right), \tag{8}$$

$$K_{ex}=c_s\frac{e}{\varepsilon}\langle u'^2\rangle,\ \ K_{ey}=c_s\frac{e}{\varepsilon}\langle v'^2\rangle,\quad e=(\langle u'^2\rangle+\langle v'^2\rangle+\langle w'^2\rangle)/2,$$

$$P_{ij}=-\left\{\langle u_i'u_k'\rangle\frac{\partial U_j}{\partial x_k}+\langle u_j'u_k'\rangle\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right\},\ \ G_{ij}=\frac{1}{\rho_0}\left\{\langle u_i'\rho'\rangle g_j+\langle u_j'\rho'\rangle g_i\right\},$$

$$i,\,j,\,k=1,2,3,\quad 2P=P_{ii},\quad 2G=G_{ii}.$$

Касательные компоненты тензора рейнольдсовых напряжений $\langle u_l'u_3'\rangle$ и компоненты вектора турбулентных потоков скаляра $\langle u_l'\rho'\rangle$ аппроксимируются алгебраическими соотношениями

$$\langle u_3'u_l'\rangle=\frac{(1-c_2)e\langle u_l'^2\rangle+\dfrac{(1-c_2)(1-c_{2T})}{c_{1T}}\cdot\dfrac{g_l}{\rho_0}\cdot\dfrac{e^2}{\varepsilon}\langle u_l'\rho'\rangle}{c_1\varepsilon\left(1+\dfrac{(1-c_2)}{c_1c_{1T}}\cdot\dfrac{g_l}{\rho_0}\dfrac{e^2}{\varepsilon^2}\cdot\dfrac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial x_l}\right)}\cdot\frac{\partial W_d}{\partial x_l}=K_l\frac{\partial W_d}{\partial x_l},$$

$$-\langle u_l'\rho'\rangle=\frac{e\langle u_l'^2\rangle}{c_{1T}\varepsilon\left(1+2\dfrac{1-c_{2T}}{c_{1T}c_T}\cdot\dfrac{g_l}{\rho_0}\cdot\dfrac{e^2}{\varepsilon^2}\cdot\dfrac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial x_l}\right)}\cdot\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial x_l}=K_{\rho l}\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial x_l}, \tag{9}$$

где l = 1, 2; детальное описание этих представлений можно найти, например, в работе [1] и цитируемой там литературе.

Для определения скорости диссипации ε также воспользуемся дифференциальным уравнением переноса

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+U\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+V\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}K_{\varepsilon x}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}K_{\varepsilon y}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}+c_{\varepsilon1}\frac{\varepsilon}{e}(P+G)-c_{\varepsilon2}\frac{\varepsilon^2}{e}, \tag{10}$$

где $K_{\varepsilon x}=K_{ex}/\sigma$, $K_{\varepsilon y}=K_{ey}/\sigma$. В уравнениях (8)–(10) величины c_1, c_2, $c_{\varepsilon1}$, $c_{\varepsilon2}$, c_s, σ, c_{1T}, c_{2T}, c_T — эмпирические постоянные, их значения равны соответственно 2,2, 0,55, 1,45, 1,90, 0,22, 1,3, 3,2, 0,5, 1,25 и являются общепринятыми.

При $t=t_0=z_0/W_0$ задаются следующие начальные условия:

$$e(x,y,t_0)=\Phi_1(r),\quad \varepsilon(x,y,t_0)=\Phi_2(r),\quad W_d(x,y,t_0)=\Phi_3(r),$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad 0 \le r < \infty;$$

$$\psi_d = \omega_d = \langle \rho_d \rangle = \langle u'v' \rangle = 0, \quad \langle u'^2 \rangle = \langle v'^2 \rangle = \langle w'^2 \rangle = (2/3)e.$$

Здесь $\Phi_1(r)$, $\Phi_2(r)$, $\Phi_3(r)$ — колоколообразные функции, согласованные с экспериментальными данными Линя и Пао [6, 7] по динамике безымпульсного турбулентного следа за удлиненным телом вращения. Поскольку рассматривается безымпульсный турбулентный след, то функция $\Phi_3(r)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_d\, dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_d(x, y, t_0) dxdy = 0.$$

Фоновое сдвиговое течение определяют функции

$$U_s = (\alpha W_0/D)y, \quad V = 0, \quad \alpha = \text{const}.$$

При $r \to \infty$ ставились условия невозмущенного потока. При численной реализации эти условия из бесконечности сносились на границы достаточно большого прямоугольника, оптимальные размеры которого определялись в ходе численных экспериментов. Схема течения в плоскости, ортогональной направлению движения тела, представлена на рис. 1.

Переменные задачи обезразмериваются путем применения в качестве масштаба скорости величины W_0, в качестве масштаба длины — величины диаметра тела D, а также посредством обезразмеренного представления осредненного дефекта плотности $\langle \rho_d \rangle^* = \langle \rho_d \rangle / (aD\rho_0)$. Определим характерный параметр устойчиво стратифицированного течения — плотностное число Фруда $\mathrm{F_D}$:

$$\mathrm{F_D} = W_0 T/D, \quad T = 2\pi/\sqrt{ag} = 1/N, \quad a = (-1/\rho_0)(d\rho_s/dy),$$

где T и N — период и частота Вяйсяля–Брента. По аналогии с плотностным числом Фруда удобно ввести величину F_s, имеющую смысл сдвигового аналога числа Фруда:

$$\mathrm{F}_s = W_0 T_s/D, \quad T_s = (dU_s/dy)^{-1} = D/\alpha W_0, \quad U_s^* = y^*/\mathrm{F}_s.$$

Тогда характерный параметр сдвигового течения в устойчиво стратифицированной среде — число Ричардсона Ri — выражается через указанные параметры следующим образом: $\mathrm{Ri} = 4\pi^2 \cdot \mathrm{F}_s^2 / \mathrm{F_D^2}$. При этом для рассматриваемого горизонтально однородного сдвигового течения $\mathrm{F}_s = 1/\alpha$. В результате в обезразмеренных уравнениях вместо

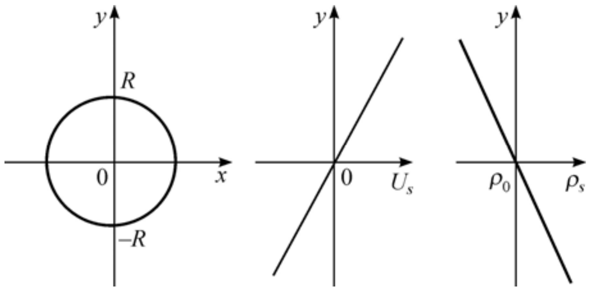

Рис. 1. Схема течения в плоскости, ортогональной направлению движения тела.
R — начальный радиус зоны турбулентного смешения.

величины g появится величина $4\pi^2/\mathrm{F}_\mathrm{D}^2$, одновременно слагаемое $(d\psi_s/dy)\cdot(\partial\omega_d/\partial x)$ в уравнении (7) после обезразмеривания примет вид: $(y^*/\mathrm{F}_s)\cdot(\partial\omega_d^*/\partial x^*)$ (здесь и ниже обезразмеренные переменные помечены знаком *), а роль обезразмеренного времени будет играть величина $z^* = z/D$.

Уравнения математических моделей переписываются в новой системе координат. Введением новых независимых переменных $\xi = \chi_1(x)$, $\eta = \chi_2(y)$, $(x = \varphi_1(\xi),\ y = \varphi_2(\eta))$ осуществляется переход от неравномерной сетки на плоскости (x, y) к равномерной на плоскости (ξ, η), якобиан преобразования $J = \frac{\partial x}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta} = x_\xi \cdot y_\eta$. Шаг сетки по времени выбирался переменным. Неравномерные ортогональные пространственные сетки сгущаются в окрестности максимальных значений энергии турбулентности. Численный алгоритм сводится к последовательному определению на каждом временном слое неизвестных задачи, при этом для упрощения процедуры расчетов вычисленные на новом слое переменные участвуют в определении остальных неизвестных на этом слое. Для решения уравнения (6) привлекается схема предиктор-корректор со схемой расщепления в качестве предиктора и аппроксимацией конвективных слагаемых схемой с направленными разностями. Уравнение Пуассона (7) решается по итерационной схеме стабилизирующей поправки. Численное интегрирование дифференциальных уравнений (3), (4), (8), (10) проводится по схеме расщепления с привлечением центрально-разностных аппроксимаций производных. Конечно-разностные уравнения на каждом дробном шаге решаются поочередно с применением скалярных прогонок. Подробное описание численного алгоритма было представлено в работе [1], где решалась задача о динамике безымпульсного турбулентного следа за телом вращения в отсутствие сдвигового течения и было получено достаточно хорошее согласование с экспериментальными данными Линя и Пао [6, 7] в однородной и линейно стратифицированной средах.

Результаты численных исследований

С целью изучения совместного влияния горизонтально однородного линейного сдвига скорости и линейной устойчивой плотностной стратификации на динамику безымпульсного турбулентного следа выполнены численные эксперименты, соответствующие достаточно широкому диапазону значений сдвигового числа Фруда. Плотностное число Фруда полагалось достаточно большим ($\mathrm{F}_\mathrm{D} = 565$) и соответствующим условиям одного из лабораторных экспериментов [6]. Трансформацию течения при $\alpha = 5\cdot10^{-4}$ ($\mathrm{F}_s = 2\cdot10^3$, Ri = 494,68), $\alpha = 1\cdot10^{-3}$ ($\mathrm{F}_s = 10^3$, Ri = 123,57), $\alpha = 2\cdot10^{-3}$ ($\mathrm{F}_s = 500$, Ri = 30,91), $\alpha = 2{,}5\cdot10^{-3}$ ($\mathrm{F}_s = 400$, Ri = 19,78) иллюстрируют рис. 2–9.

Рисунки 2, 3 показывают динамику области турбулентных возмущений в плоскости, ортогональной направлению движения тела, в зависимости от параметра сдвига α. Представлены данные для трех характерных сечений турбулентного следа, когда время после прохода тела $t = z/W_0 = z/(D\mathrm{F}_\mathrm{D})T$ составляет $t = 1T, 2T, 3T$. Видно, что сдвиговое течение приводит к весьма существенной деформации первоначально круглой области турбулентного смешения в направлении фонового сдвига скорости. Одновременно воздействие стратификации среды проявляется в интенсивном распространении следа в поперечном направлении. Таким образом, имеет место взаимное влияние двух факторов — стратификации и сдвигового течения. При достаточно большом градиенте α скорости сдвигового течения его воздействие на турбулентный след может быть более выраженным,

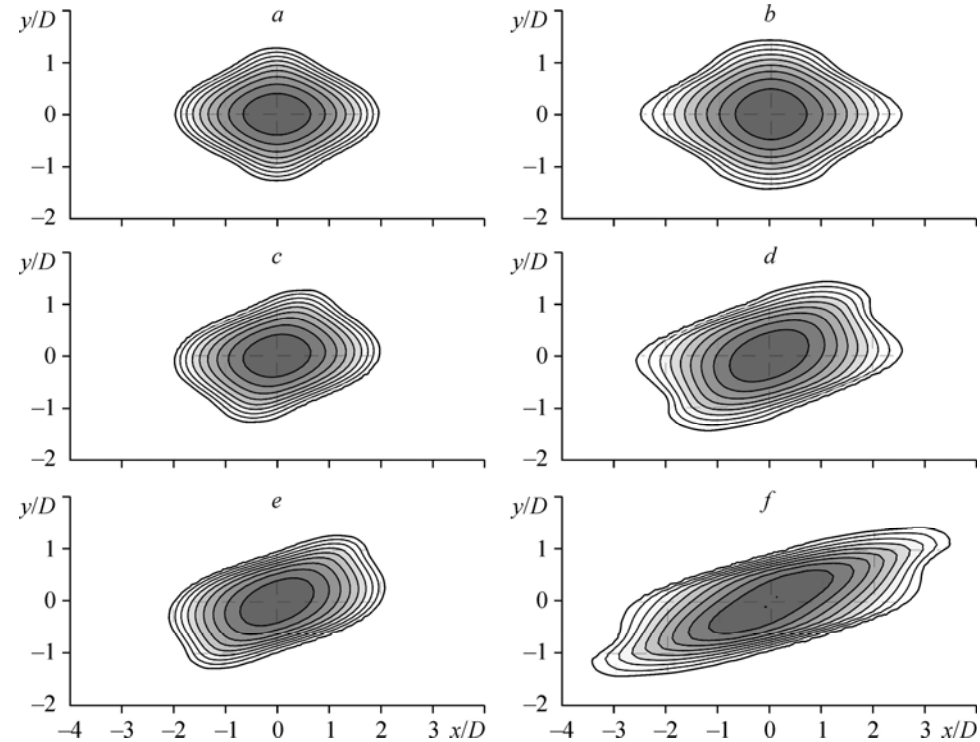

Рис. 2. Изолинии энергии турбулентности $e(t, x, y)/e(t, 0, 0)$ = const в линейно стратифицированной среде в зависимости от сдвига скорости при $t/T = 1$ (слева) и $t/T = 2$ (справа).

a, *b* — бессдвиговое течение, *c*, *d* — Ri = 123,57, *e*, *f* — Ri = 19,78; линии уровня представлены значениями от 1 до 0 с шагом 0,1; наибольшее затенение соответствует максимальным значениям энергии турбулентности.

чем воздействие стратификации. Дополнительно на рис. 3 сопоставляются изолинии энергии турбулентности, соответствующие однородной по плотности и линейно стратифицированной средам при одинаковом значении $\mathrm{F}_s = 1000$ ($\alpha = 1 \cdot 10^{-3}$) и одинаковом расстоянии от тела ($z = 1700D$), эквивалентном в случае линейной стратификации величине $t \approx 3T$. Рисунок 3 показывает, что, согласно расчетам, стратификация может способствовать более умеренной трансформации турбулентного следа под действием фонового сдвигового течения.

Хорошо известно (см., например, [1, 3] и цитированную там литературу), что вырождение турбулентного следа в стратифицированной среде сопровождается активной генерацией внутренних волн. При этом соответствующее конвективное течение в плоскости, ортогональной направлению движения тела, характеризуется порождением вихрей противоположной направленности вблизи вертикальной оси и их последующим перемещением к горизонтальной оси. Внутренние волны,

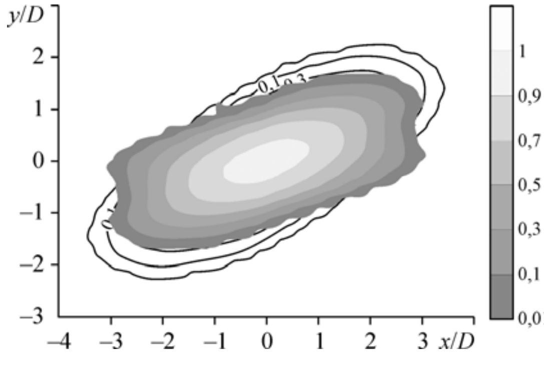

Рис. 3. Изолинии энергии турбулентности $e(t, x, y)/e(t, 0, 0)$ = const при $\alpha = 1 \cdot 10^{-3}$ на расстоянии $z = 1700D$ от тела.

Сплошные линии — однородная по плотности среда ($g = 0$), окрашенная область — линейно стратифицированная среда при $\mathrm{F_D} = 565$.

генерируемые безымпульсным турбулентным следом в линейно стратифицированной среде под воздействием фонового сдвигового потока, представлены на рис. 4–6.

На рис. 4 отображена общая картина течения в следе в линейно стратифицированной среде в отсутствие сдвига скорости ($\alpha = 0$) и при наличии фонового сдвига скорости ($\alpha = 1\cdot 10^{-3}$). В центре расчетной области изолиниями энергии турбулентности показана зона турбулентных возмущений; в окружающем ее спутном потоке изолинии дефекта функции тока иллюстрируют конвективное движение. Здесь же представлено двумерное поле скорости, вычисленное по дефекту функции тока ψ_d. Отчетливо видна трансформация области турбулентного смешения и линий $\psi_d = \text{const}$ в сдвиговом потоке. При этом наиболее интенсивные конвективные движения наблюдаются в окрестности оси x, захватывая и зону турбулентности. Отметим, что со временем линии тока с заданным интервалом значений занимают все большую область, число конвективных вихрей растет, а интенсивность каждого из них падает.

Характерную для разных значений параметра сдвига α фазовую картину внутренних волн демонстрируют изолинии дефекта плотности, они показаны на рис. 5, 6. Здесь линии постоянной фазы $\partial\langle\rho_d\rangle^*/\partial x^* = 0$ — границы между светлыми и затененными областями – отвечают гребням и впадинам внутренних волн. Видно, что существенному искажению сдвиговым потоком подвергается не только область турбулентного следа и картина конвективных вихрей, но и фазовая картина внутренних волн. Можно отметить (рис. 4−6), что на умеренном удалении от тела, соответствующем одному периоду Вяйсяля−Брента, при всех рассмотренных значениях α воздействие сдвигового течения сводится к «повороту» фазовой картины, нарушающему осевую симметрию (относительно вертикальной оси y) внутренних волн. Однако с ростом расстояния от тела при достаточно больших значениях α, соответствующих достаточно малым значениям Ri, наблюдается не только поворот, но и более интенсивное оттеснение внутренних волн

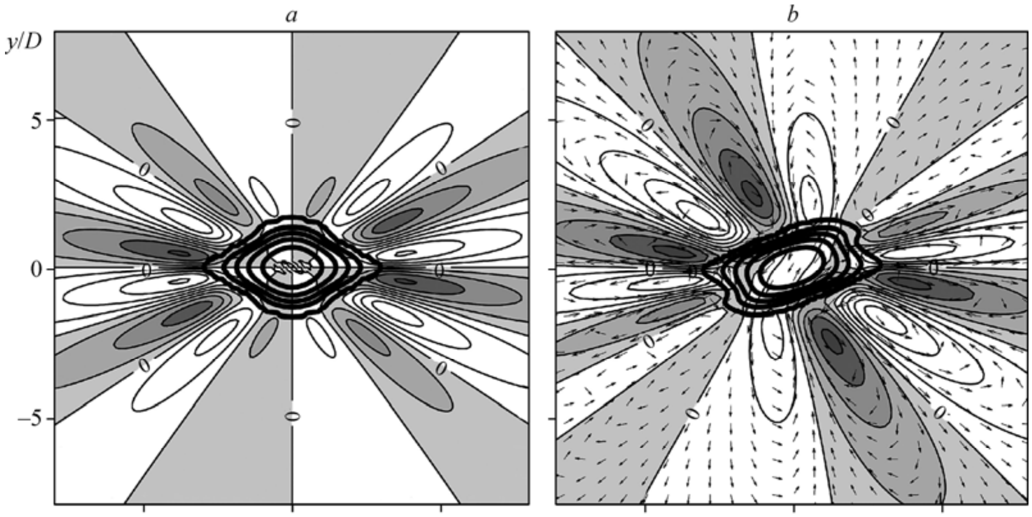

Рис. 4. Общая картина течения в следе в отсутствие сдвига скорости (*a*) и при наличии фонового сдвига скорости при $\alpha = 10^{-3}$ (*b*).

Жирные линии — изолинии энергии турбулентности $e(t, x, y)/e(t, 0, 0) = \text{const}$ (значения уровней изменяются от 0 до 1 с шагом 0,2), сплошные тонкие кривые — линии $\psi_d^* = \psi_d/(DW_0) = \text{const}$ (значения уровней изменяются от $-2{,}5\cdot 10^{-4}$ до $2{,}5\cdot 10^{-4}$ с шагом $5\cdot 10^{-5}$); затененные участки — области отрицательных значений функции ψ_d, светлые участки — области, где $\psi_d \geq 0$); стрелками показано двумерное поле скорости, вычисленное по дефекту функции тока ψ_d; $\text{F}_\text{D} = 565$, $t/T = 2$.

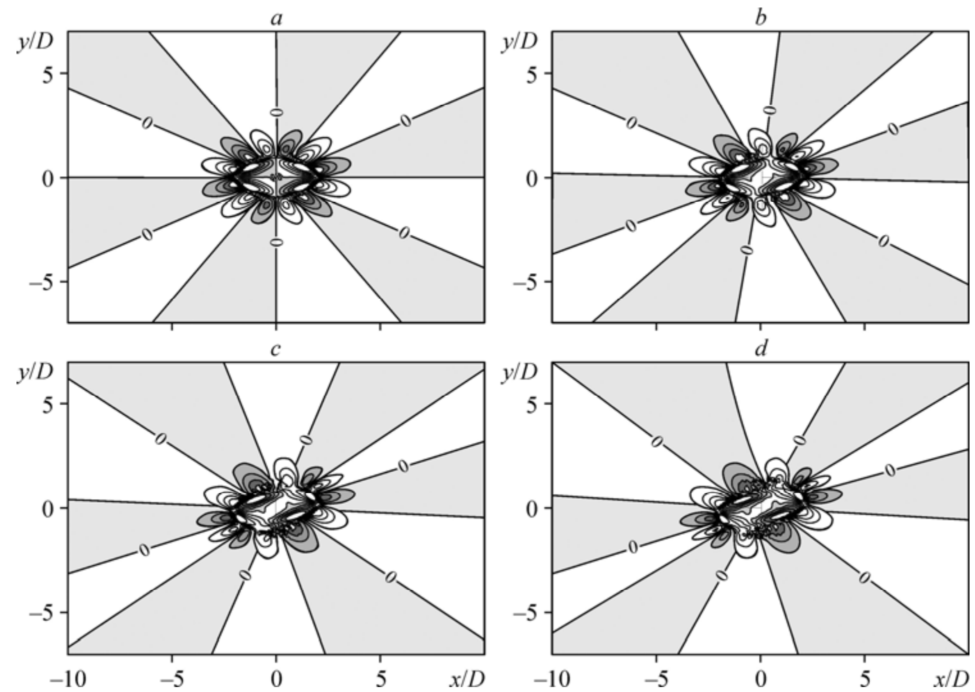

Рис. 5. Изолинии $\partial\langle\rho_d\rangle^*/\partial x^* = \text{const}$ при $\text{F}_\text{D} = 565$ и $t/T = 1$.

a — бессдвиговое течение, *b* — Ri = 123,57, *c* — Ri = 30,91, *d* — Ri = 19,78;
изолинии $e/e_0 = \text{const}$ представлены значениями уровней от 1 до 0,1 с шагом 0,1,
изолинии $\partial\langle\rho_d\rangle^*/\partial x^* = \text{const}$ представлены значениями уровней от –0,08 до 0,08 с шагом 0,02,
затенением отмечены области отрицательных значений функции.

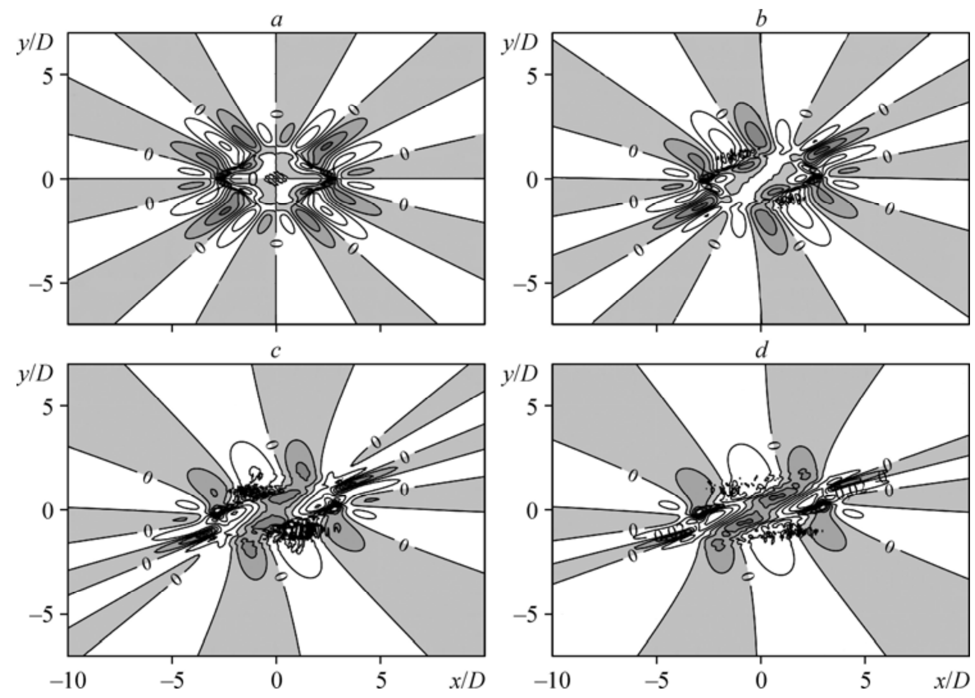

Рис. 6. Изолинии $\partial\langle\rho_d\rangle^*/\partial x^* = \text{const}$ при $\text{F}_\text{D} = 565$ и $t/T = 2$.

a — бессдвиговое течение, *b* — Ri = 123,57, *c* — Ri = 30,91; *d* — Ri = 19,78; значения уровней те же, что на рис. 5.

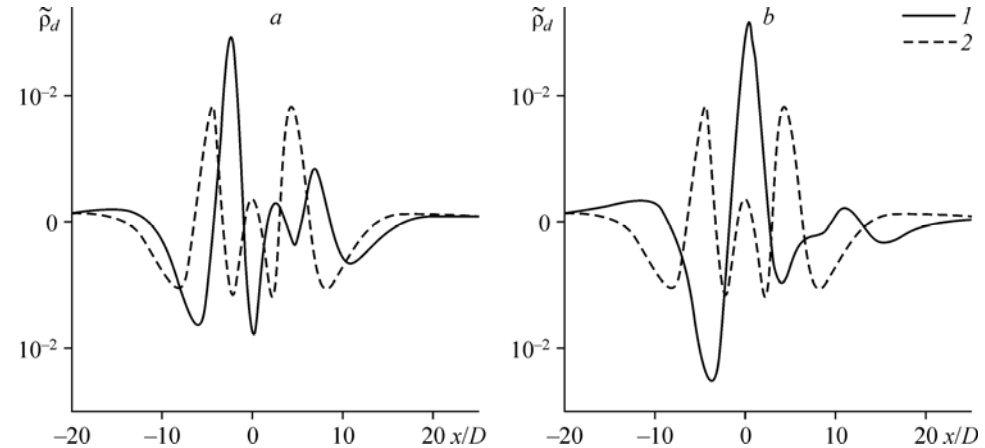

Рис. 7. Изменение дефекта плотности $\tilde{\rho}_d(x^*) = \langle \rho_d(2, x^*, 4)\rangle^*$ в характерном сечении плоскостью $y^* = 4$ в зависимости от сдвига скорости.
1 — сдвиговое течение: $\alpha = 1\cdot 10^{-3}$ (*a*), $2{,}5\cdot 10^{-3}$ (*b*), *2* — $\alpha = 0$.

к горизонтальной оси. Этот процесс может характеризоваться «поглощением» внутренних волн при существенном росте их амплитуды в окрестности области турбулентных возмущений, так что рост количества гребней и впадин внутренних волн может со временем прекратиться. Этот факт достаточно наглядно иллюстрирует рис. 7, где на достаточно большом удалении от тела в направлении маршевой переменной случаю сдвигового течения при $\alpha = 2{,}5\cdot 10^{-3}$ соответствует меньшее число гребней и впадин внутренних волн, чем при $\alpha = 1\cdot 10^{-3}$ или $\alpha = 0$. Заметим, что суммарная энергия внутренних волн при сокращении гребней и впадин внутренних волн остается весьма близкой к случаю бессдвигового течения (см. рис. 8). Следует отметить также, что модельная задача о динамике ламинарного локального возмущения поля плотности в сдвиговом потоке линейно стратифицированной среды подробно рассматривалась в работах [8, 9], рассчитанная там волновая картина течения качественно согласуется с полученной в настоящей работе.

Изменение суммарных энергий турбулентности $E_t^* = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^* \cdot dx^* \cdot dy^*$ и внутренних волн $P_t^* = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{U_d^{*2} + V^{*2}}{2} + \frac{4\pi^2}{\mathrm{F_D^2}}\cdot\frac{\langle\rho_d\rangle^{*2}}{2}\right)dx^* dy^*$ в зависимости от времени после прохода тела t представлено на рис. 8 для значений Ri = 494,68, 123,57 и 19,78 при фиксированном $\mathrm{F_D} = 565$ (здесь принято

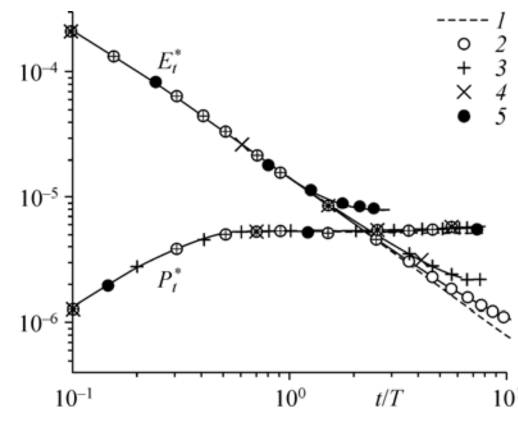

Рис. 8. Изменение во времени суммарных энергий турбулентности E_t^* и внутренних волн P_t^* в зависимости от сдвига скорости.
1 — бессдвиговое течение; *2* — $\alpha = 5\cdot 10^{-4}$; *3* — $\alpha = 1\cdot 10^{-3}$, сетка 1; *4* — $\alpha = 1\cdot 10^{-3}$, сетка 2; *5* — $\alpha = 2{,}5\cdot 10^{-3}$.

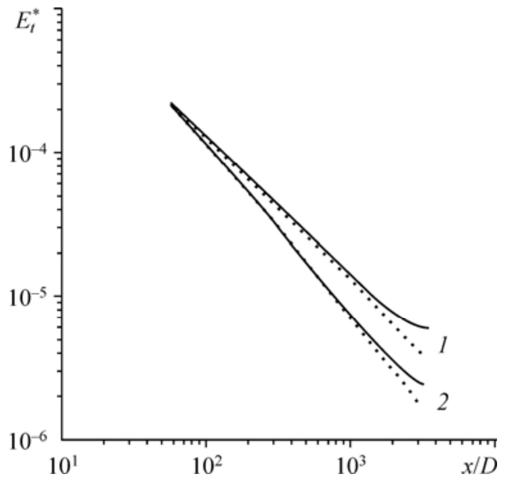

Рис. 9. Изменение суммарной энергии турбулентности E_t^* в зависимости от расстояния от тела.

Линии: *1* — однородная среда, $g = 0$, *2* — стратифицированная среда, $\mathrm{F_D} = 565$; пунктирные линии — бессдвиговое течение, сплошные — сдвиговое течение при $\alpha = 10^{-3}$.

обозначение $U_d = U - U_s$). Наличие порождения энергии турбулентности за счет сдвигового течения приводит к тому, что с ростом времени величина E_t перестает убывать. С ростом F_s (и, соответственно, числа Ричардсона) участок вырождения суммарной энергии турбулентности, на котором эта величина совпадает с энергией при отсутствии сдвига, увеличивается. Суммарная энергия внутренних волн P_t слабо зависит от величины F_s на всем рассмотренном интервале времени после прохода тела. Последнее объясняется, по-видимому тем, что стадия формирования волновых движений охватывает относительно небольшие времена вырождения $(t/T \le 1)$, когда воздействие сдвига проявляется слабо. Дополнительно на рис. 9 сопоставляются значения суммарной энергии турбулентности E_t^*, полученные в случае однородной по плотности и линейно стратифицированной сред. Эти данные демонстрируют более быстрое вырождение энергии турбулентности в устойчиво стратифицированной среде (в бессдвиговом случае получены законы вырождения $E_t \sim x^{-1}$ при $g = 0$ и $E_t \sim x^{-1,23}$ — при $\mathrm{F_D} = 565$), а также аналогию в эволюции турбулентности в следах под влиянием сдвига скорости в этих двух средах.

Отметим, что все расчеты проводились на последовательности конечно-разностных сеток, на которых была получена сходимость в себе последовательности численных решений. Для исключения негативного влияния граничных условий расчеты выполнялись на последовательности расчетных областей разного размера с применением ряда конечно-разностных сеток, две из которых на основании анализа численных данных были приняты в качестве основных: первая сетка включала 1000×1000 узлов, вторая сетка — 1600×1600 узлов с одинаковым размером шагов $h_x = h_y = 0{,}1D$. Таким образом, отмеченный выше эффект подкачки энергии турбулентности на больших удалениях от тела в сдвиговом потоке не зависит от параметров используемой конечно-разностной сетки.

Заключение

Выполнено численное моделирование динамики безымпульсного турбулентного следа под воздействием горизонтально однородного поперечного линейного сдвига скорости. В рамках численных экспериментов показано, что воздействие сдвигового потока приводит к деформированию турбулентного следа и генерируемых им внутренних волн. Выявлено существенное порождение энергии турбулентности осредненным движением, что приводит к замедлению вырождения турбулентности при больших временах “жизни” следа в поперечном сдвиговом потоке.

Список литературы

1. **Chernykh G.G., Voropayeva O.F.** Numerical modeling of momentumless turbulent wake dynamics in a linearly stratified medium // Computers and Fluids. 1999. Vol. 28, No. 3. P. 281–306.
2. **Meunier P., Spedding G.R.** Stratified propelled wakes // J. Fluid Mech. 2006. Vol. 552. P. 229–256.
3. **Chernykh G.G., Voropaeva O.F.** Internal waves generated by a momentumless turbulent wake in linearly stratified media // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1999. Vol. 14, No. 4. P. 311–326.
4. **Brucker K.A., Sarkar S.** A comparative study of self-propelled and towed wakes in stratified fluid // J. Fluid Mech. 2010. Vol. 652. P. 373–404.
5. **Воропаева О.Ф., Дружинин О.А., Черных Г.Г.** Численные модели динамики безымпульсного турбулентного следа в линейно стратифицированной среде // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18., № 5. С. 41–57.
6. **Lin J.T., Pao Y.H.** Wakes in stratified fluids // Annu. Rev. Fluid Mech. 1979. Vol. 11. P. 317–336.
7. **Hassid S.** Collapse of turbulent wakes in stably stratified media // J. Hydronautics. 1980. Vol. 14, No. 1. P. 25–32.
8. **Зудин А.Н., Черных Г.Г.** Примеры расчета нестационарных стратифицированных течений с применением эйлерово-лагранжевой системы координат. Новосибирск, 1985. (Препринт / АН СССР. Сиб. отд., Ин-т теорет. и прикл. механики. № 9–85). 50 с.
9. **Chernykh G.G., Zudin A.N.** Dynamics of local density perturbation in a shear flow of a linearly stratified medium // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2003. Vol. 18, No. 2. P. 117–133.

Статья поступила в редакцию 2 декабря 2014 г.,
после доработки — 29 января 2015 г.