

УДК 532.5

ДИНАМИЧЕСКИЙ КРАЕВОЙ УГОЛ ПРИ СМАЧИВАНИИ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТЬЮ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА

О. В. Воинов

Институт механики многофазных систем СО РАН, 625000 Тюмень

Рассматривается ползущее движение тонкого слоя нелетучей вязкой жидкости, растекающейся под действием капиллярных сил по поверхности твердого тела, покрытой однородной пленкой малой толщины (микропленкой). Изучается влияние сил Ван-дер-Ваальса в прекурсионной пленке на асимптотику угла наклона свободной границы слоя в области больших толщин, где преобладают капиллярные силы. Получено решение задачи об угле наклона для всего возможного диапазона толщин микропленки. В пределе малых толщин микропленки оно согласуется с известным решением задачи динамики смачивания сухой поверхности при наличии прекурсионной пленки с учетом влияния сил Ван-дер-Ваальса. Исследована роль условия на конце прекурсионной пленки.

1. Основные уравнения. В малой окрестности относительно большой массы жидкости, растекающейся по поверхности твердого тела, течение малого масштаба может быть близко к стационарному. При этом внешний масштаб этой большой массы жидкости можно рассматривать как бесконечный. Будем определять внутреннюю асимптотику свободной границы, необходимую для решения разнообразных внешних задач динамики смачивания. Рассмотрим форму свободной поверхности тонкого слоя вязкой жидкости на плоской поверхности твердого тела при ползущем движении, когда слой с одной стороны переходит в относительно большую массу жидкости, а с другой — в тонкую однородную пленку (микропленку) малой толщины (рис. 1), которая достаточно велика по сравнению с размером молекулы. Движение жидкого слоя в условиях действия сил Ван-дер-Ваальса и капиллярных сил определяется уравнением [1]

$$\sigma \frac{d^3 h}{dx^3} - \frac{A'}{2\pi h^4} \frac{dh}{dx} - \frac{3\mu v}{h^3} (h - h_+) = 0. \quad (1.1)$$

Здесь h — толщина слоя ($|dh/dx| \ll 1$); v — скорость; h_+ — толщина микропленки; σ — коэффициент поверхностного натяжения; μ — динамическая вязкость; A' — постоянная Гамакера [2] (предполагаем, что $A' > 0$). Толщина микропленки не должна превышать 10^{-7} м, чтобы вклад сил Ван-дер-Ваальса в эффективное давление внутри пленки

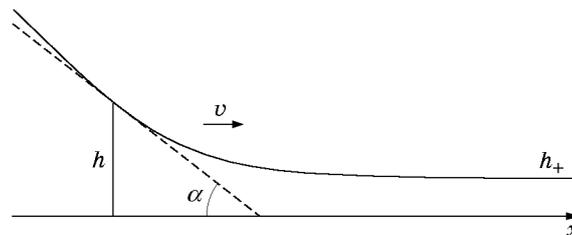


Рис. 1

был равен $-A'/(6\pi h^3)$. Приближение тонкого слоя требует достаточной малости капиллярного числа ($Ca = \mu v/\sigma$).

Необходимо найти неограниченное ($h \rightarrow \infty$) при $x \rightarrow -\infty$ решение уравнения (1.1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\frac{d^2 h}{dx^2} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty, \quad h \rightarrow h_+, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (1.2)$$

Основной интерес представляет форма жидкого слоя в области больших толщин ($h \rightarrow \infty$). В этой области угол α наклона свободной границы (локальный динамический краевой угол) в случае нулевого статического краевого угла следует известной [1, 3] асимптотике

$$\alpha^3 = \left(-\frac{dh}{dx}\right)^3 = 9Ca \left(\ln \frac{h}{h'_m} - \frac{1}{3} \ln \ln \frac{h}{h'_m}\right), \quad \ln \frac{h}{h'_m} \gg 1. \quad (1.3)$$

Задача состоит в определении неизвестного параметра асимптотики h'_m .

Перейдем к безразмерным переменным [1]

$$\zeta = x h_m^{-1} (3Ca)^{1/3}, \quad y = h/h_m, \quad h_m = (A'/(2\pi\sigma))^{1/2} (3Ca)^{-1/3}. \quad (1.4)$$

Задача (1.1), (1.2) примет вид

$$y''' - \frac{y'}{y^4} - \frac{y - y_+}{y^3} = 0, \quad y_+ = \frac{h_+}{h_m}, \quad y'' \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow -\infty, \quad y' \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow +\infty. \quad (1.5)$$

Последнее условие эквивалентно условию $y \rightarrow y_+, \zeta \rightarrow +\infty$.

Асимптотике (1.3) соответствует

$$\left(-\frac{dy}{d\zeta}\right)^3 = 3 \ln \frac{y}{C} - \ln \ln \frac{y}{C} + \dots; \quad (1.6)$$

$$h'_m = C h_m, \quad C = C(y_+). \quad (1.7)$$

Неизвестный безразмерный параметр C может быть найден из решения краевой задачи (1.5). Согласно (1.6) (или (1.3) и (1.7)) этот параметр определяет влияние микропенки на угол наклона свободной границы, медленно меняющийся с увеличением расстояния от твердого тела.

2. Метод решения. Для решения краевой задачи использованы расчеты задач с начальными условиями на асимптотике при больших h .

Отметим, что согласно (1.6) при заданном значении $z = \ln(y/C) \gg 1$ погрешность определения постоянной C намного выше (в $3z$ раз) погрешности вычисления угла α , поэтому при учете двух слагаемых в асимптотике (1.6) необходимо использовать большие значения $h/h'_m = y/C \sim 10^5 \div 10^6$, чтобы обеспечить приемлемую точность расчета C .

Для того чтобы асимптотику можно было применять при много меньших значениях y/C (порядка $10^3 \div 10^4$), в расчетах необходимо использовать старшие члены разложения $\alpha(z)$ при $z = \ln(h/h'_m) \gg 1$. Это разложение определяется из уравнения

$$y''' = 1/y^2.$$

В [1] имеется строгое обоснование асимптотического решения, поскольку решение этого уравнения сведено к решению следующего уравнения первого порядка:

$$\frac{dY}{du} = \frac{1}{Y} - u,$$

где $Y = u \frac{du}{dS}$; $\frac{dy}{d\zeta} = u(S)$; $S = \ln\left(\frac{C}{y}\right)$; $C = \text{const}$.

Используя переменные

$$\Phi(z) = \frac{1}{3} \left(-\frac{dy}{d\zeta} \right)^3, \quad z = \ln \frac{h}{h'_m}, \quad (2.1)$$

для Φ аналогично [1] запишем

$$\Phi' = 1 + \Phi'' - \Phi'^2/(3\Phi). \quad (2.2)$$

Это уравнение с учетом первого краевого условия (1.5) при $z \gg 1$ решается итерациями аналогично уравнению в [1]. В результате

$$\Phi = z - \frac{1}{3}q + \sum_{n=1}^N (a_{0n}q^n + a_{1n}q^{n-1} + \dots + a_{nn})z^{-n} + \dots, \quad (2.3)$$

$$q = \ln z, \quad N \geq 1.$$

Коэффициенты a_{in} ($i = 0, 1, \dots, n$) в (2.3) найдены для $N = 5$:

$$\Phi = z - \frac{1}{3}q + \frac{q-4}{9z} + \frac{(q-5)^2 + 18}{54z^2} + \frac{2q^3 - 15q^2 + 300q - 1101}{486z^3} + \dots \quad (2.4)$$

Первые три члена (2.4) соответствуют аналогичному решению для $u(z) = -y'$ в [1]. Используя уравнение первого порядка для $Y(u)$, можно записать эквивалентное (2.4) разложение $S(u)$ при $u \rightarrow -\infty$:

$$\ln \left(\frac{C}{y} \right) = \frac{1}{3}u^3 - \ln \frac{|u|}{3^{1/3}} + \frac{4}{3u^3} + \frac{35}{6u^6} + \frac{440}{9u^9} + \frac{7007}{12u^{12}} + \frac{8337 \cdot 16}{15u^{15}} + \dots$$

Асимптотика (2.4) для Φ (2.1) (или последнее разложение) обеспечивает выполнение условия $y'' \rightarrow 0, z \rightarrow \infty$. Второе краевое условие в (1.5) удовлетворялось методом пристрелки при помощи расчетов с начальными условиями при большом y , полученными из (2.4). Для того чтобы обеспечить точность расчета постоянной C порядка 10^{-3} при $z \geq 10$, достаточно учесть четыре слагаемых в (2.4).

3. Влияние толщины h_+ микропенки на параметр h'_m асимптотики угла наклона α . Найдем разложения $C(y_+)$ при малых и больших y_+ . При малом y_+ можно записать

$$C = C_0 + ay_+ + py_+^2 + \dots, \quad y_+ \ll 1, \quad (3.1)$$

где a, p — постоянные. При большом y_+ уравнение (1.5) перепишем в переменных

$$f = y/y_+, \quad \zeta_1 = \zeta/y_+, \quad f^3 f''' - f'(fy_+^2)^{-1} - f + 1 = 0.$$

Здесь $y_+^{-2} \ll 1$, поэтому можно записать

$$C_1 = C/y_+ = b + d/(y_+^2 + g) + O(y_+^{-6}), \quad y_+ \gg 1 \quad (3.2)$$

(b, d, g — постоянные).

На основе численных расчетов задачи (1.5) с учетом (1.6) получены следующие формулы, соответствующие (3.1), (3.2):

$$C = 1,085 + y_+ + 0,29y_+^2, \quad y_+ = h_+/h_m < 1; \quad (3.3)$$

$$C = C_1 y_+, \quad C_1 = 1,891 + 0,57/(y_+^2 + 0,18), \quad y_+ > 1, \quad h'_m = C_1 h_+. \quad (3.4)$$

На рис. 2 представлена расчетная зависимость $C(y_+)$. Графики зависимостей (3.3) и (3.4) совпадают с кривой на рис. 2.

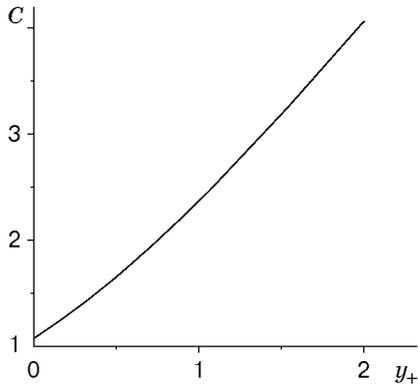


Рис. 2

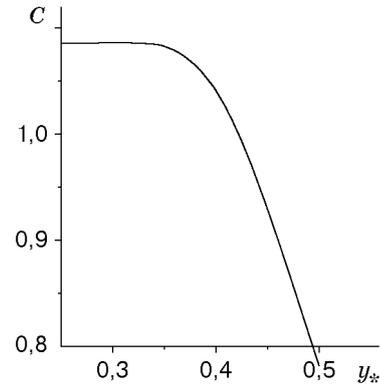


Рис. 3

Угол наклона свободной границы зависит от параметра $h'_m = Ch_m = C_1 h_+$. Роль сил Ван-дер-Ваальса существенна при $h_+ \lesssim h_m$. Важно, что в предельном случае $y_+ \rightarrow 0$ ($h_+ \ll h_m$) решение согласуется с решением задачи смачивания сухой поверхности [1]. Значение $C = 1,085$ близко к значению $C = 1$ [1]. Параметр $h'_m \approx h_m + h_+$ при малых h_+/h_m .

В случае $y_+ \gg 1$ ($h_+ \gg h_m$), когда в динамике пленки преобладают капиллярные силы, а силы Ван-дер-Ваальса не важны, постоянная $C_1 = 1,891$ близка к величине 1,84, найденной в [1].

Полученное решение ограничено достаточно малыми значениями угла наклона ($\alpha \ll 1$), при которых h_m велико по сравнению с размером молекулы [1].

Отметим, что течение в области микропленки ($h \sim h_+$) при $h_+ \ll h_m$ не влияет на решение в области $h \gg h_+$, такое же, как при смачивании сухой поверхности. Следовательно, влияние конца прекурсионной пленки на ее относительно толстую часть отсутствует. Интересно сопоставить этот результат со случаем, когда при полном смачивании имеется минимальная толщина равновесной пленки [4, 5], т. е. пленка резко обрывается при $h \approx h_*$.

Проведены расчеты влияния краевого эффекта с учетом минимальной толщины h_* для случая сухой поверхности. Минимальная толщина h_* определялась по асимптотике решения при $h \rightarrow 0$, когда $|dh/dx| \rightarrow \infty$ в соответствии с уравнением (см., например, [6])

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{3h^2} - \frac{\lambda^2}{h_*^2} + \dots, \quad h \rightarrow 0, \quad \lambda^2 = \frac{A'}{2\pi\sigma}.$$

Зависимость постоянной C , определяющей согласно (1.4), (1.7) постоянную h'_m асимптотики угла наклона границы (1.3), от параметра $y_* = h_*/h_m$ представлена на рис. 3. При $h_* < 0,45h_m$ постоянная C отличается от 1 менее чем на 0,1 ($C > 0,93$), т. е. практически не зависит от минимальной толщины h_* . При этом существует участок прекурсионной пленки $h \approx \text{const}/(x - x_0)$. Если $h_* \sim h_m$, то прекурсионной пленки не существует. Поэтому условие близости постоянной C к единице ($h_* < 0,45h_m$) одновременно является условием существования прекурсионной пленки. Вывод в работе [1] о том, что $C \approx 1$, справедлив, пока имеется прекурсионная пленка, независимо от минимальной толщины h_* . Минимальная толщина h_* (как и толщина микропленки) не влияет на величину динамического краевого угла в течениях с прекурсионной пленкой. Следовательно, модель [1] перехода прекурсионной пленки в пленку, движущуюся под действием капиллярных сил, справедлива независимо от краевого эффекта, т. е. является общей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Воинов О. В.** Об углах наклона границы в движущихся жидких слоях // ПМТФ. 1977. № 2. С. 92–99.
2. **Бараш Ю. С.** Силы Ван-дер-Ваальса. М.: Наука, 1988.
3. **Воинов О. В.** Гидродинамика смачивания // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1976. № 5. С. 76–84.
4. **Жен П. Ж. де.** Смачивание: статика и динамика // Успехи физ. наук. 1987. Т. 151, вып. 4. С. 619–681.
5. **Hervet H., Gennes P. G. de.** The dynamics of wetting of “dry” solid // Comput. Rend. Acad. Sci. Ser. II. 1984. Т. 299, N 9. P. 499–503.
6. **Воинов О. В.** Динамическая теория смачивания твердого тела вязкой жидкостью под действием сил Ван-дер-Ваальса // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 69–85.

*Поступила в редакцию 3/XII 1996 г.,
в окончательном варианте — 26/VIII 1998 г.*
