

УДК 532.59+539.3:534.1

ВОЗДЕЙСТВИЕ ЛОКАЛЬНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПО ВРЕМЕНИ НАГРУЗКИ НА ЛЕДЯНОЙ ПОКРОВ С ТРЕЩИНОЙ

Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru

С использованием метода Винера — Хопфа получено аналитическое решение задачи о колебаниях ледяного покрова с прямолинейной трещиной на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины под действием локальной периодической по времени нагрузки. Ледяной покров моделируется двумя тонкими упругими полубесконечными пластинами постоянной толщины. Толщина пластин может быть различной по разные стороны от трещины. Рассмотрены различные граничные условия на краях пластин. В случае контакта пластин одинаковой толщины получено решение в явном виде. Исследована асимптотика прогиба пластин в дальнем поле. Показано, что при контакте пластин различной толщины в дальнем поле выделяются направления под углом к трещине, в которых преимущественно распространяются волны. В случае контакта пластин одинаковой толщины со свободными краями и свободным наложением возбуждается краевая волноводная мода вдоль трещины. Показано, что с наибольшей амплитудой краевая мода распространяется при контакте пластины с вертикальной стенкой. Приведены примеры расчетов.

Ключевые слова: тонкая упругая плавающая пластина, изгибно-гравитационные волны, краевая мода, преобразование Фурье, метод Винера — Хопфа.

DOI: 10.15372/PMTF20170613

Введение. В северных районах ледяной покров используется для различных целей в качестве плавающей платформы. Для обеспечения безопасности работ на льду необходимо изучать закономерности его поведения при механическом воздействии. Данному вопросу посвящено большое количество исследований. Обзор результатов исследований поведения ледяного покрова при воздействии нагрузки приведен в [1]. В большинстве работ ледяной покров полагается однородным. В действительности ледяной покров неоднороден. В нем имеются трещины, торосы, полыньи, лед может ломаться и льдины могут наползать друг на друга, смерзаться, при этом толщина покрова может меняться. При наличии границ и неоднородностей ледяного покрова необходимо учитывать краевые эффекты, а также взаимодействие волн. В работах [2, 3] показано, что при наличии линейных неоднородностей типа трещин или торосов в однородном ледяном покрове существуют краевые волноводные моды — решения однородной задачи в виде бегущих волн, распространяющихся без затухания вдоль трещины и экспоненциально затухающих в перпендикулярных направлениях. Дифракция изгибно-гравитационных волн на таких неоднородностях изучена достаточно

хорошо [4–11]. В [5] в случае пластин одинаковой толщины со свободными краями решение задачи о дифракции построено в явном виде с помощью разложения по собственным модам. В [11] показано, что при наличии трещины краевая мода существует и для пластин с различной толщиной, однако различие толщин должно быть малым. В ледяном покрове с трещиной краевая мода не может непосредственно возбуждаться набегающими плоскими волнами, так как она не удовлетворяет дисперсионному соотношению для этих волн. Однако она может возбуждаться динамическими нагрузками, действующими на пластину. В работе [12] показано, что амплитуды краевых мод могут увеличиваться при их нелинейном резонансном взаимодействии с набегающими плоскими волнами.

В настоящей работе приведено решение задачи о колебаниях ледяного покрова, состоящего из двух полубесконечных пластин с различными краевыми условиями на стыке, под действием периодической нагрузки. Установлено, что в случае пластин одинаковой толщины со свободными краями и свободным наложением вдоль трещины распространяется краевая мода, причем одна и та же, так как симметричная относительно трещины часть решения одинакова. Различие решений в этих случаях обусловлено антисимметричной частью решения. С наибольшей амплитудой краевая мода распространяется при контакте пластины с вертикальной стенкой.

1. Постановка задачи. Ледяной покров моделируется двумя упругими полубесконечными пластинами постоянной толщины, разделенными прямолинейной трещиной. Пластины могут иметь различную толщину h_1, h_2 . Жидкость полагается идеальной несжимаемой, имеющей глубину H . Рассматриваются колебания пластин и жидкости под действием приложенного в локальной области периодического во времени давления с частотой ω :

$$q(x, y, t) = Q(x, y) e^{-i\omega t}.$$

Задача решается в линейной постановке. Введем декартову систему координат $Oxyz$ с осью Ox , перпендикулярной трещине, осью Oy , направленной вдоль трещины, и осью Oz , направленной вертикально вверх. Пластины занимают области $x > 0$ и $x < 0$.

Потенциал течения жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Колебания пластин описываются уравнениями изгиба тонких упругих пластин

$$D_n \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 w + \rho_0 h_n \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p + U(x) Q e^{-i\omega t},$$

$$p = -\rho(\varphi_t + gw), \quad D_n = E h_n^3 / [12(1 - \nu^2)], \quad n = 1, 2,$$

где $w(x, y)$ — нормальный прогиб пластин или возвышение свободной поверхности; ρ_0, ρ — плотности льда и жидкости; p — гидродинамическое давление; g — ускорение свободного падения; D_1, D_2 — цилиндрические жесткости пластин; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; $U(x)$ — функция Хевисайда; t — время.

Осадка пластин в воду не учитывается. Граничные условия на верхней границе жидкости сносятся на плоскость $z = 0$. На свободной поверхности давление равно нулю: $p = 0$. В предположении, что вся нижняя поверхность пластины контактирует с жидкостью, отрыва не происходит, выполнено кинематическое соотношение

$$w_t = \varphi_z \quad (z = 0),$$

на дне — условие непротекания

$$\varphi_z = 0 \quad (z = -H).$$

Наиболее общие граничные условия для частично сmerzшейся трещины имеют вид [6–10]

$$\begin{aligned} D_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w(+0, y) &= -k_1 [w(+0, y) - w(-0, y)], \\ D_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w(+0, y) &= D_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w(-0, y), \\ D_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w(+0, y) &= k_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} (+0, y) - \frac{\partial w}{\partial x} (-0, y) \right), \\ D_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w(+0, y) &= D_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w(-0, y). \end{aligned}$$

В частных случаях $k_1 = k_2 = 0$ края трещины свободны, при $k_1 = \infty$, $k_2 = 0$ область контакта представляет собой свободный шарнир, что соответствует свободному наложению пластин, при $k_1 = \infty$, $k_2 = \infty$ имеет место жесткое сцепление пластин. На бесконечности ставится условие излучения (условие отсутствия приходящих волн).

Ограничимся изучением случая осесимметричной нагрузки. Предполагается, что давление

$$Q(x, y) = \rho g H f(r_0)$$

зависит только от радиуса $r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}$, где $(x_0, 0)$ — центр локальной области $r_0 < a$, в которой приложено давление; $f(r_0)$ — безразмерная функция. В [13] рассмотрены два вида распределения нагрузки: равномерное $f(r_0) = c$ и параболическое $f(r_0) = 1 - (r_0/a)^2$ (a — радиус области давления). Предполагалось, что в обоих случаях сила, действующая на пластину, одна и та же. Тогда в случае равномерно распределенной нагрузки $c = 1/2$. Показано, что характер распределения нагрузки оказывает незначительное влияние на поведение пластины, если радиус области действующей нагрузки порядка характерной длины $l = (D/(\rho g))^{1/4}$, зависящей от упругих свойств пластины. Поэтому в данной работе будем рассматривать параболическое распределение давления.

2. Метод решения. Введем безразмерные переменные и параметры

$$x' = \frac{x}{H}, \quad y' = \frac{y}{H}, \quad z' = \frac{z}{H}, \quad \lambda = \omega \left(\frac{H}{g} \right)^{1/2}, \quad \beta_k = \frac{D_k}{\rho g H^4}, \quad \delta_k = \frac{\rho_0 h_k}{\rho H} \lambda^2,$$

$k = 1, 2$. Потенциал течения жидкости и прогиб пластины будем искать в виде

$$\varphi = \sqrt{gH} H \phi(x, y, z) e^{-i\omega t}, \quad w = HW(x, y) e^{-i\omega t}.$$

Тогда для функции ϕ получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 0 \quad (z < 0), \\ \phi_z &= 0 \quad (z = -1), \\ (\beta_1 \Delta_2^2 + 1 - \delta_1) \phi_z - \lambda^2 \phi &= 0 \quad (z = 0, x < 0), \\ (\beta_2 \Delta_2^2 + 1 - \delta_2) \phi_z - \lambda^2 \phi &= -i\lambda f \quad (z = 0, x > 0), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_z(+0, y, 0) &= -\frac{k_1 H^3}{D_2} [\phi_z(+0, y, 0) - \phi_z(-0, y, 0)], \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_z(+0, y, 0) &= \frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_z(-0, y, 0), \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi_z(+0, y, 0) = \frac{k_2 H}{D_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_z(+0, y, 0) - \frac{\partial}{\partial x} \phi_z(-0, y, 0)\right),$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi_z(+0, y, 0) = \frac{\beta_1}{\beta_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi_z(-0, y, 0),$$

где Δ_2 — оператор Лапласа по горизонтальным координатам.

Вводя преобразование Фурье по переменным x и y :

$$\Phi_-(\alpha, s, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} dy \int_{-\infty}^0 \phi(x, y, z) e^{i\alpha x} dx, \quad \Phi_+(\alpha, s, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} dy \int_0^{\infty} \phi(x, y, z) e^{i\alpha x} dx,$$

$$\Phi(\alpha, s, z) = \Phi_-(\alpha, s, z) + \Phi_+(\alpha, s, z),$$

из уравнения Лапласа и условия непротекания получаем

$$\partial^2 \Phi / \partial z^2 - (\alpha^2 + s^2) \Phi = 0 \quad (-1 < z < 0),$$

$$\Phi_z = 0 \quad (z = -1).$$

Следовательно,

$$\Phi(\alpha, s, z) = C(\alpha, s) Z(\alpha, s, z), \tag{2.2}$$

$$Z(\alpha, s, z) = \text{ch}((z+1)\sqrt{\alpha^2 + s^2}) / \text{ch}(\sqrt{\alpha^2 + s^2}).$$

Применим метод Винера — Хопфа и введем функции $G_{k\pm}$, $k = 1, 2$ следующим образом:

$$G_{k-}(\alpha, s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} dy \int_{-\infty}^0 [(\beta_k \Delta_2^2 + 1 - \delta_k) \phi_z - \lambda^2 \phi] e^{i\alpha x} dx,$$

$$G_{k+}(\alpha, s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} dy \int_0^{\infty} [(\beta_k \Delta_2^2 + 1 - \delta_k) \phi_z - \lambda^2 \phi] e^{i\alpha x} dx$$

(функции с индексами “+” (“-”) аналитичны по α в верхней (нижней) полуплоскостях соответственно). Из уравнений (2.1) получаем

$$G_{1-}(\alpha, s) \equiv 0, \quad G_{2+}(\alpha, s) = -i\lambda F(\alpha, s); \tag{2.3}$$

$$F(\alpha, s) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(r_0) e^{i(\alpha x - sy)} dx = 4\pi \frac{e^{i\alpha x_0} J_2(a\sqrt{\alpha^2 + s^2})}{\alpha^2 + s^2},$$

из представления (2.2) находим

$$G_1(\alpha, s) = G_{1-}(\alpha, s) + G_{1+}(\alpha, s) = C(\alpha, s) K_1(\alpha, s),$$

$$G_2(\alpha, s) = G_{2-}(\alpha, s) + G_{2+}(\alpha, s) = C(\alpha, s) K_2(\alpha, s). \tag{2.4}$$

Здесь $K_n(\alpha, s)$ — дисперсионные функции для изгибно-гравитационных волн:

$$K_n(\alpha, s) = [\beta_n(\alpha^2 + s^2)^2 + 1 - \delta_n] \sqrt{\alpha^2 + s^2} \text{th}(\sqrt{\alpha^2 + s^2}) - \lambda^2, \quad n = 1, 2.$$

Известно, что дисперсионное соотношение для изгибно-гравитационных волн

$$K_1(\gamma) \equiv (\beta_1 \gamma^4 + 1 - \delta_1) \gamma \operatorname{th} \gamma - \lambda^2 = 0$$

имеет два действительных корня $\pm \gamma_0$, четыре комплексных корня, которые обозначим $\pm \gamma_{-1}, \pm \gamma_{-2}$, $\gamma_{-2} = -\bar{\gamma}_{-1}$ (черта означает операцию комплексного сопряжения), и счетное множество мнимых корней $\pm \gamma_m$, $m = 1, 2, \dots$. Аналогично второе дисперсионное соотношение

$$K_2(\mu) \equiv (\beta_2 \mu^4 + 1 - \delta_2) \mu \operatorname{th} \mu - \lambda^2 = 0$$

имеет два действительных корня $\pm \mu_0$, четыре комплексных корня $\pm \mu_{-1}, \pm \mu_{-2}$, $\mu_{-2} = -\bar{\mu}_{-1}$ и счетное множество чисто мнимых корней $\pm \mu_m$, $m = 1, 2, \dots$. Тогда корни дисперсионных соотношений $K_n(\alpha, s) = 0$ соответственно равны

$$\chi_m = \sqrt{\gamma_m^2 - s^2}, \quad \alpha_m = \sqrt{\mu_m^2 - s^2}.$$

Далее будем использовать значения корней, лежащие в верхней полуплоскости. Если $|s| < \gamma_0$, то χ_0 — вещественный корень, в противном случае все корни имеют ненулевую мнимую часть. Аналогично, если $|s| < \mu_0$, то α_0 — вещественный корень, в противном случае все корни комплексные.

При $x \rightarrow -\infty$ функция $\Phi_-(\alpha, s, z)$ представляет собой линейную комбинацию функций вида

$$e^{-i(\chi_m x + sy)} \operatorname{ch}(\gamma_m(z+1)) / \operatorname{ch}(\gamma_m).$$

Следовательно, она аналитична по α в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}(\alpha) < \sigma_1$, за исключением возможного вещественного полюса в точке χ_0 ($\sigma_1 = \min |\operatorname{Im}(\chi_m)|$, $m \neq 0$ при $s \leq \gamma_0$, $\sigma_1 = |\chi_0|$ при $s > \gamma_0$). При $x \rightarrow \infty$ функция $\Phi_+(\alpha, s, z)$ представляет собой линейную комбинацию функций вида

$$e^{i(\alpha_m x - sy)} \operatorname{ch}(\mu_m(z+1)) / \operatorname{ch}(\mu_m).$$

Следовательно, она аналитична по α в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}(\alpha) > -\sigma_2$, за исключением возможного вещественного полюса в точке α_0 ($\sigma_2 = \min |\operatorname{Im}(\alpha_m)|$, $m \neq 0$ при $s \leq \mu_0$, $\sigma_2 = |\operatorname{Im}(\alpha_0)|$ при $s > \mu_0$).

Исключая из соотношений (2.3), (2.4) $C(\alpha, s)$, выводим уравнение

$$G_{2-}(\alpha, s) - i\lambda F(\alpha, s) = G_{1+}(\alpha, s) K(\alpha, s), \quad K(\alpha, s) = K_2(\alpha, s) / K_1(\alpha, s). \quad (2.5)$$

В соответствии с методом Винера — Хопфа факторизуем функцию $K(\alpha, s)$

$$K(\alpha, s) = K_-(\alpha, s) K_+(\alpha, s)$$

(функции K_- и K_+ аналитичны по α соответственно в нижней и верхней полуплоскостях). Функции $K_{\pm}(\alpha, s)$ определяются формулами

$$K_{\pm}(\alpha, s) = \prod_{j=-2}^{\infty} \frac{(\alpha \pm \alpha_j) \gamma_j}{\mu_j (\alpha \pm \chi_j)}.$$

Разделив левую и правую части уравнения (2.5) на $K_-(\alpha, s)$, получаем

$$\frac{G_{2-}(\alpha, s)}{K_-(\alpha, s)} - i\lambda \frac{F(\alpha, s)}{K_-(\alpha, s)} = G_{1+}(\alpha, s) K_+(\alpha, s).$$

Используя представление [14]

$$\frac{F(\alpha, s)}{K_-(\alpha, s)} = L_-(\alpha, s) + L_+(\alpha, s), \quad L_{\pm}(\alpha, s) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty \mp i\sigma}^{\infty \mp i\sigma} \frac{F(\zeta, s)}{K_-(\zeta, s)(\zeta - \alpha)} d\zeta,$$

где функции L_{\pm} аналитичны по α соответственно в верхней и нижней полуплоскостях; $\sigma < \min(\sigma_1, \sigma_2)$, получаем уравнение

$$G_{2-}(\alpha, s)/K_{-}(\alpha, s) - i\lambda L_{-}(\alpha, s) = G_{1+}(\alpha, s)K_{+}(\alpha, s) + i\lambda L_{+}(\alpha, s),$$

в левой части которого содержится функция, аналитическая в нижней полуплоскости, в правой части — функция, аналитическая в верхней полуплоскости. Следовательно, эти функции представляют аналитическую функцию во всей комплексной плоскости. Согласно теореме Лиувилля данная функция является полиномом, степень которого определяется поведением этой функции на бесконечности по α . Имеем

$$|K_{\pm}(\alpha, s)| = O(1), \quad |L_{\pm}(\alpha, s)| = O(|\alpha|^{-1}), \quad \alpha \rightarrow \infty.$$

Вблизи кромки пластины градиент потенциала имеет интегрируемую особенность $O(r^{-\eta})$ ($\eta < 1$; r — расстояние до кромки пластины). Тогда при $|\alpha| \rightarrow \infty$

$$|G_{k\pm}(\alpha, s)| = O(|\alpha|^{\eta+3}).$$

Следовательно, степень полинома равна трем и

$$G_{1+}(\alpha, s)K_{+}(\alpha, s) + i\lambda L_{+}(\alpha, s) = \sum_{n=0}^3 a_n(s)\alpha^n,$$

где $a_n(s)$ — неизвестные функции, которые определяются из условий на кромках пластин. В результате получаем

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, s, z) &= \frac{(a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 - i\lambda L_{+}(\alpha, s))Z(\alpha, s, z)}{K_{+}(\alpha, s)K_1(\alpha, s)}, \\ \Phi(x, s, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x}(a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 - i\lambda L_{+}(\alpha, s))Z(\alpha, s, z)}{K_{+}(\alpha, s)K_1(\alpha, s)} d\alpha; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, s, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x}(a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 - i\lambda L_{+}(\alpha, s))}{K_{+}(\alpha, s)K_1(\alpha, s)} \times \\ &\quad \times \sqrt{\alpha^2 + s^2} \operatorname{th} \sqrt{\alpha^2 + s^2} d\alpha. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Интегралы вычисляем с помощью теории вычетов. При $x < 0$ имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, s, 0) = i \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{-i\chi_j x}[a_0 + a_1\chi_j + a_2\chi_j^2 + a_3\chi_j^3 - i\lambda L_{+}(\chi_j, s)]\gamma_j \operatorname{th}(\gamma_j)}{K_{+}(\chi_j, s)K_1'(\chi_j, s)}; \quad (2.7)$$

$$L_{-}(\alpha, s) = -4\pi \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{J_2(a\sqrt{\alpha_m^2 + s^2}) e^{i\alpha_m x_0}}{(\alpha_m^2 + s^2)K_-'(\alpha_m, s)(\alpha_m - \alpha)},$$

$$L_{+}(\alpha, s) = 4\pi \frac{J_2(a\sqrt{\alpha^2 + s^2}) e^{i\alpha x_0}}{(\alpha^2 + s^2)K_{-}(\alpha, s)} - L_{-}(\alpha, s), \quad K_-'(\alpha_m, s) = \frac{K_2'(\alpha_m, s)}{K_{+}(\alpha_m, s)K_1(\alpha_m, s)}.$$

Подставляем выражение (2.7) в краевые условия при $x = -0$. Из дисперсионного соотношения находим

$$\gamma_j \operatorname{th}(\gamma_j) = \frac{\lambda^2}{\beta_1 \gamma_j^4 + 1 - \delta_1}.$$

В случае пластин со свободными краями граничные условия на левой пластине записываются в виде

$$\sum_{j=-2}^{\infty} \frac{(\gamma_j^2 - (1 - \nu)s^2)[a_0 + a_1\chi_j + a_2\chi_j^2 + a_3\chi_j^3 - i\lambda L_+(\chi_j, s)]}{K_+(\chi_j, s)K_1'(\chi_j, s)(\beta_1\gamma_j^4 + 1 - \delta_1)} = 0,$$

$$\sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\chi_j(\gamma_j^2 + (1 - \nu)s^2)[a_0 + a_1\chi_j + a_2\chi_j^2 + a_3\chi_j^3 - i\lambda L_+(\chi_j, s)]}{K_+(\chi_j, s)K_1'(\chi_j, s)(\beta_1\gamma_j^4 + 1 - \delta_1)} = 0. \quad (2.8)$$

При $x > 0$ домножим числитель и знаменатель подынтегрального выражения в (2.6) на $K_-(\alpha, s)$. Получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, s, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x}(a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + i\lambda L_-(\alpha, s))K_-(\alpha, s)}{K_2(\alpha, s)} \times$$

$$\times \sqrt{\alpha^2 + s^2} \operatorname{th}(\sqrt{\alpha^2 + s^2}) d\alpha + \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x} F(\alpha, s) \sqrt{\alpha^2 + s^2} \operatorname{th}(\sqrt{\alpha^2 + s^2})}{K_2(\alpha, s)} d\alpha,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, s, 0) = i \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j x} K_+(\alpha_j, s) \mu_j \operatorname{th}(\mu_j)}{K_2'(\alpha_j, s)} [a_0 - a_1\alpha_j + a_2\alpha_j^2 - a_3\alpha_j^3 + i\lambda L_-(\alpha_j, s)] +$$

$$+ \frac{2\lambda}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha(x_0-x)} J_2(a\sqrt{\alpha^2 + s^2}) \operatorname{th}(\sqrt{\alpha^2 + s^2})}{\sqrt{\alpha^2 + s^2} K_2(\alpha, s)} d\alpha.$$

Краевые условия на кромке правой пластины принимают вид

$$\sum_{j=-2}^{\infty} \frac{(\alpha_j^2 + \nu s^2)(a_0 - a_1\alpha_j + a_2\alpha_j^2 - a_3\alpha_j^3 + i\lambda L_-(\alpha_j, s))K_+(\alpha_j, s)}{K_2'(\alpha_j, s)(\beta_2\mu_j^4 + 1 - \delta_2)} =$$

$$= i4\pi\lambda \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j x_0} (\alpha_j^2 + \nu s^2) J_2(a\mu_j)}{\mu_j^2 K_2'(\alpha_j, s)(\beta_2\mu_j^2 + 1 - \delta_2)}, \quad (2.9)$$

$$\sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\alpha_j(\alpha_j^2 + (2 - \nu)s^2)(a_0 - a_1\alpha_j + a_2\alpha_j^2 - a_3\alpha_j^3 + i\lambda L_-(\alpha_j, s))K_+(\alpha_j, s)}{K_2'(\alpha_j, s)(\beta_2\mu_j^4 + 1 - \delta_2)} =$$

$$= -i4\pi\lambda \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j x_0} \alpha_j(\alpha_j^2 + (2 - \nu)s^2) J_2(a\mu_j)}{\mu_j^2 K_2'(\alpha_j, s)(\beta_2\mu_j^4 + 1 - \delta_2)}.$$

Из системы уравнений (2.8), (2.9) определяем коэффициенты $a_n(s)$. В случаях пластин со свободным наложением или частично срезанных система уравнений для определения коэффициентов $a_n(s)$ находится аналогичным образом.

После определения коэффициентов $a_n(s)$ находим прогибы пластин с помощью обратного преобразования Фурье. При $x > 0$ имеем

$$W(x, y) = 2 \int_0^{\infty} \frac{J_0(\zeta r_0) J_2(a\zeta) \operatorname{th} \zeta}{K_2(\zeta)} d\zeta - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isy} S_+(x, s) ds; \quad (2.10)$$

$$S_+(x, s) = \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j x} (a_0 - a_1 \alpha_j + a_2 \alpha_j^2 - a_3 \alpha_j^3 + i\lambda L_-(-\alpha_j, s)) K_+(\alpha_j, s)}{K_2'(\alpha_j, s) (\beta_2 \mu_j^4 + 1 - \delta_2)},$$

при $x < 0$ —

$$W(x, y) = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isy} \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{-i\chi_j x} (a_0 + a_1 \chi_j + a_2 \chi_j^2 + a_3 \chi_j^3 - i\lambda L_+(\chi_j, s))}{K_+(\chi_j, s) K_1'(\chi_j, s) (\beta_1 \gamma_j^4 + 1 - \delta_1)} ds. \quad (2.11)$$

Первый член в формуле (2.10) описывает прогиб пластины для бесконечного ледяного покрова, второй член учитывает влияние трещины и второй пластины. Подынтегральные функции в выражениях (2.10), (2.11) экспоненциально затухают при $|s| \rightarrow \infty$.

Поскольку $\alpha_0 = 0$ при $s = \mu_0$, выражение для $L_-(-\alpha_0, s)$ содержит корневую интегрируемую особенность вида $(\mu_0^2 - s^2)^{-1/2}$. При интегрировании с целью регуляризации выполним замену переменной

$$\begin{aligned} s = \mu_0 \sin \zeta, & \quad -\pi/2 < \zeta < \pi/2, & |s| < \mu_0, & \quad \alpha_0(\zeta) = \mu_0 \cos \zeta, \\ s = \mu_0 \operatorname{ch} \zeta, & \quad 0 < \zeta < \infty, & \mu_0 < s < \infty, & \quad \alpha_0(\zeta) = \mu_0 \operatorname{sh} \zeta. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Найдем асимптотику дальнего поля. Используя асимптотику функций Бесселя при больших аргументах и метод стационарной фазы, второй член в формуле (2.10) при $r_0 \rightarrow \infty$ представим в виде

$$2 \int_0^{\infty} \frac{J_0(\zeta r_0) J_2(a\zeta) \operatorname{th} \zeta}{K_2(\zeta)} d\zeta = i \sqrt{\frac{2\pi}{\mu_0 r_0}} \frac{J_2(a\mu_0) \operatorname{th}(\mu_0) e^{i(\mu_0 r_0 - \pi/4)}}{K_2'(\mu_0)} + o(r_0^{-1/2}).$$

В первом интеграле (2.10) при $r \rightarrow \infty$, $\theta \neq \pi/2$ основной вклад вносит нулевой член суммы на интервале $(-\mu_0, \mu_0)$, так как остальные члены экспоненциально малы. Приводим этот член к виду

$$I_0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{ir\mu_0 \cos(\zeta - \theta)} (a_0 - a_1 \alpha_0 + a_2 \alpha_0^2 - a_3 \alpha_0^3 + i\lambda L_-(-\alpha_0, s)) K_+(\alpha_0, s) \mu_0 \cos \zeta}{K_2'(\alpha_0, s) (\beta_2 \mu_0^4 + 1 - \delta_2)} d\zeta.$$

С использованием метода стационарной фазы получаем

$$\begin{aligned} I_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{\mu_0 r}} e^{i(\mu_0 r - \pi/4)} \frac{\mu_0 K_+(\alpha_0(\theta), s(\theta))}{K_2'(\mu_0) (\beta_2 \mu_0^4 + 1 - \delta_2)} [a_0 - a_1 \alpha_0(\theta) + a_2 \alpha_0^2(\theta) - a_3 \alpha_0^3(\theta) + \\ + i\lambda L_-(-\alpha_0(\theta), s(\theta))] + O(r^{-1}), \\ \alpha_0(\theta) = \mu_0 \cos \theta, \quad s(\theta) = \mu_0 \sin \theta, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \end{aligned}$$

Аналогичным образом находим главный член выражения для прогиба пластины в дальнем поле при $x < 0$

$$W(r, \theta) = -\frac{\lambda\gamma_0}{2\pi K_1'(\gamma_0)K_+(\chi_0(\theta), s(\theta))} \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma_0 r}} e^{i(\gamma_0 r - \pi/4)} [a_0 + a_1\chi_0(\theta) + a_2\chi_0^2(\theta) + \\ + a_3\chi_0^3(\theta) - i\lambda L_+(\chi_0(\theta), s(\theta))] + O(r^{-1}), \\ \chi_0(\theta) = \gamma_0 |\cos \theta|, \quad s(\theta) = \gamma_0 \sin \theta, \quad r \rightarrow \infty.$$

Таким образом, амплитуды прогиба пластин в дальнем поле можно представить в виде

$$|W(r, \theta)| = A(\theta)/\sqrt{r} + O(r^{-1}).$$

Коэффициенты системы (2.8), (2.9) существенно изменяются в окрестностях точек $s = \mu_0$ и $s = \gamma_0$, так как содержат корневые особенности вида $(\mu_0^2 - s^2)^{1/2}$, $(\gamma_0^2 - s^2)^{1/2}$. Соответственно решение системы в окрестностях этих точек также претерпевает резкие изменения. Поэтому в случае пластин различной толщины в дальнем поле выделяются направления под углом к трещине, в которых преимущественно распространяются волны. Угол наклона зависит от соотношения толщин пластин и частоты нагрузки. Если $\gamma_0 < \mu_0$, то $\sin \theta_0 \approx \gamma_0/\mu_0$ и направление преимущественного распространения выделяется в правой пластине, если $\gamma_0 > \mu_0$, то $\sin \theta_0 \approx \mu_0/\gamma_0$ и направление преимущественного распространения волн выделяется в левой пластине. Краевая мода в этом случае отсутствует.

3. Решение в случае пластин одинаковой толщины. В случае если пластины имеют одинаковую толщину, $K_1(\alpha, s) = K_2(\alpha, s)$, $K(\alpha, s) \equiv 1$, $K_{\pm}(\alpha, s) \equiv 1$, $L_-(\alpha, s) \equiv 0$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, s, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x} (a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 - i\lambda F(\alpha, s))}{K_2(\alpha, s)} \sqrt{\alpha^2 + s^2} \operatorname{th} \sqrt{\alpha^2 + s^2} d\alpha.$$

При $x < x_0$ имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, s, 0) = i\lambda^2 \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j |x|} (a_0 \mp a_1\alpha_j + a_2\alpha_j^2 \mp a_3\alpha_j^3) - i\lambda e^{-i\alpha_j x} F(\alpha_j, s)}{K_2'(\alpha_j, s)(\beta_2\mu_j^4 + 1 - \delta_2)},$$

где знаки “−”, “+” соответствуют случаям $x > 0$, $x < 0$. Для трещины со свободными краями из граничных условий на кромках следует

$$\sum_{j=-2}^{\infty} \frac{(\alpha_j^2 + \nu s^2)(a_0 \mp a_1\alpha_j + a_2\alpha_j^2 \mp a_3\alpha_j^3 - i\lambda F(\alpha_j, s))}{K_2'(\alpha_j, s)(\beta_2\mu_j^4 + 1 - \delta_2)} = 0, \\ \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{(\alpha_j^2 + (2 - \nu)s^2)(\pm i\alpha_j(a_0 \mp a_1\alpha_j + a_2\alpha_j^2 \mp a_3\alpha_j^3) - \lambda\alpha_j F(\alpha_j, s))}{K_2'(\alpha_j, s)(\beta_2\mu_j^4 + 1 - \delta_2)} = 0, \quad (3.1)$$

где знак “+” соответствует краевым условиям на левой пластине, знак “−” — условиям на правой пластине.

Складывая и вычитая попарно первое и второе, третье и четвертое уравнения (3.1), получаем

$$\sum_{j=-2}^{\infty} \frac{(\alpha_j^2 + \nu s^2)(a_0 + a_2\alpha_j^2 - i\lambda F(\alpha_j, s))}{K_2'(\alpha_j, s)(\beta_2\mu_j^4 + 1 - \delta_2)} = 0, \\ \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{(\alpha_j^2 + \nu s^2)(a_1\alpha_j + a_3\alpha_j^3)}{K_2'(\alpha_j, s)(\beta_2\mu_j^4 + 1 - \delta_2)} = 0,$$

$$\sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\alpha_j(\alpha_j^2 + (2-\nu)s^2)(a_1\alpha_j + a_3\alpha_j^3 - i\lambda F(\alpha_j, s))}{K_2'(\alpha_j, s)(\beta_2\mu_j^4 + 1 - \delta_2)} = 0, \quad (3.2)$$

$$\sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\alpha_j(\alpha_j^2 + (2-\nu)s^2)(a_0 + a_2\alpha_j^2)}{K_2'(\alpha_j, s)(\beta_2\mu_j^4 + 1 - \delta_2)} = 0.$$

Используя теорию вычетов, выражение в левой части второго уравнения системы (3.2) преобразуем через вычеты в точках, соответствующих корням полинома, стоящего в знаменателе:

$$\sum_{j=-2}^{\infty} \frac{(\alpha_j^2 + \nu s^2)(a_1\alpha_j + a_3\alpha_j^3)}{K_2'(\alpha_j, s)(\beta_2\mu_j^4 + 1 - \delta_2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\alpha^2 + s^2)(a_1\alpha + a_3\alpha^3)d\alpha}{K_2(\alpha, s)(\beta_2(\alpha^2 + s^2)^2 + 1 - \delta_2)} -$$

$$- \sum_{k=1}^2 \frac{(\eta_k^2 + s^2)(a_1\eta_k + a_3\eta_k^3)}{K_2(\eta_k)4\beta_2\eta_k(\eta_k^2 + s^2)} = - \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{(\alpha_j^2 + \nu s^2)(-a_1\alpha_j - a_3\alpha_j^3)}{K_2'(-\alpha_j, s)(\beta_2\mu_j^4 + 1 - \delta_2)} +$$

$$+ \frac{1}{4\beta_2\lambda^2} \sum_{k=1}^4 \frac{(\eta_k^2 + s^2)(a_1\eta_k + a_3\eta_k^3)}{\eta_k(\eta_k^2 + s^2)}, \quad \eta_k = \pm \left(\pm i \left(\frac{1 - \delta_2}{\beta_2} \right)^{1/2} - s^2 \right)^{1/2}.$$

Отсюда находим

$$\sum_{j=-2}^{\infty} \frac{(\alpha_j^2 + \nu s^2)(a_1\alpha_j + a_3\alpha_j^3)}{K_2'(\alpha_j, s)(\beta_2\mu_j^4 + 1 - \delta_2)} = \frac{1}{4\beta_2\lambda^2} \sum_{k=1}^2 \frac{(\eta_k^2 + s^2)(a_1 + a_3\eta_k^2)}{(\eta_k^2 + s^2)} = 0. \quad (3.3)$$

Подставляя значения корней η_k в соотношение (3.3) и проводя преобразования, получаем

$$a_1(s) = (2 - \nu)s^2 a_3(s). \quad (3.4)$$

Из третьего уравнения системы (3.2) следует

$$a_3(s) \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\alpha_j^2(\alpha_j^2 + (2-\nu)s^2)^2}{K_2'(\alpha_j, s)(\beta_2\mu_j^4 + 1 - \delta_2)} = i4\pi\lambda \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\alpha_j(\alpha_j^2 + (2-\nu)s^2) e^{i\alpha_j x_0} J_2(a\mu_j)}{\mu_j^2 K_2'(\alpha_j, s)(\beta_2\mu_j^4 + 1 - \delta_2)}.$$

Аналогичным образом преобразуя выражение в левой части последнего уравнения системы (3.2), получаем

$$\sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\alpha_j(\alpha_j^2 + (2-\nu)s^2)(a_0 + a_2\alpha_j^2)}{K_2'(\alpha_j, s)(\beta_2\mu_j^4 + 1 - \delta_2)} = \frac{1}{4\beta\lambda^2} \sum_{k=1}^2 \frac{(\eta_k^2 + (2-\nu)s^2)(a_0 + a_2\eta_k^2)}{\eta_k^2 + s^2} = 0.$$

Подставляя значения η_k и проводя преобразования, находим

$$a_0(s) = \nu s^2 a_2(s). \quad (3.5)$$

Из первого уравнения системы (3.2) следует

$$a_2(s)\Delta(s) = i4\pi\lambda \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{(\alpha_j^2 + \nu s^2) e^{i\alpha_j x_0} J_2(a\mu_j)}{\mu_j^2 K_2'(\alpha_j, s)(\beta_2\mu_j^4 + 1 - \delta_2)}, \quad (3.6)$$

$$\Delta(s) = \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{(\alpha_j^2 + \nu s^2)^2}{K_2'(\alpha_j, s)(\beta_2\mu_j^4 + 1 - \delta_2)}.$$

Таким образом, коэффициенты $a_n(s)$ найдены в явном виде.

Рассмотрим случай краевых условий для свободного шарнира (свободного наложения пластин):

$$\begin{aligned} w(-0, y) &= w(+0, y), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w(-0, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w(+0, y), \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w(-0, y) &= 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w(+0, y) = 0. \end{aligned}$$

Из краевых условий для коэффициентов $a_n(s)$ получаем систему

$$\begin{aligned} \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\alpha_j (a_1 + a_3 \alpha_j^2)}{K_2'(\alpha_j, s) (\beta_2 \mu_j^4 + 1 - \delta_2)} &= 0, \quad \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\alpha_j (\alpha_j^2 + (2 - \nu) s^2) (a_0 + a_2 \alpha_j^2)}{K_2'(\alpha_j, s) (\beta_2 \mu_j^4 + 1 - \delta_2)} = 0, \\ \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{(\alpha_j^2 + \nu s^2) (a_0 + a_2 \alpha_j^2 - i \lambda F(\alpha_j, s))}{K_2'(\alpha_j, s) (\beta_2 \mu_j^4 + 1 - \delta_2)} &= 0, \quad \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\alpha_j (\alpha_j^2 + \nu s^2) (a_1 + a_3 \alpha_j^2)}{K_2'(\alpha_j, s) (\beta_2 \mu_j^4 + 1 - \delta_2)} = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Последнее уравнение в системе (3.7) такое же, как в системе (3.2). Из этого уравнения следует соотношение (3.4), подставляя которое в первое уравнение находим $a_1(s) = a_3(s) = 0$. Уравнения для коэффициентов $a_0(s)$, $a_2(s)$ такие же, как в случае пластин со свободными краями, поэтому для них справедливы соотношения (3.5), (3.6).

В случае пластин с частично срезанными краями для коэффициентов $a_n(s)$ получаем соотношения (3.4), (3.5) и

$$\begin{aligned} a_2 \left(\Delta(s) + i \frac{2k_2 H}{D_2} \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\alpha_j (\alpha_j^2 + \nu s^2)}{K_2'(\alpha_j, s) (\beta_2 \mu_j^4 + 1 - \delta_2)} \right) &= i 4 \pi \lambda \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{(\alpha_j^2 + \nu s^2) e^{i \alpha_j x_0} J_2(a \mu_j)}{\mu_j^2 K_2'(\alpha_j, s) (\beta_2 \mu_j^4 + 1 - \delta_2)}, \\ a_3 \left(\sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\alpha_j^2 (\alpha_j^2 + (2 - \nu) s^2)^2}{K_2'(\alpha_j, s) (\beta_2 \mu_j^4 + 1 - \delta_2)} + i \frac{2k_1 H^3}{D_2} \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\alpha_j (\alpha_j^2 + (2 - \nu) s^2)}{K_2'(\alpha_j, s) (\beta_2 \mu_j^4 + 1 - \delta_2)} \right) &= \\ &= i 4 \pi \lambda \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\alpha_j (\alpha_j^2 + (2 - \nu) s^2) e^{i \alpha_j x_0} J_2(a \mu_j)}{\mu_j^2 K_2'(\alpha_j, s) (\beta_2 \mu_j^4 + 1 - \delta_2)}. \end{aligned}$$

Прогиб пластин определяется выражением

$$\begin{aligned} W(x, y) &= -\frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isy} ds \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{e^{i \alpha_j |x|} (a_2 (\alpha_j^2 + \nu s^2) \mp a_3 \alpha_j (\alpha_j^2 + (2 - \nu) s^2))}{K_2'(\alpha_j, s) (\beta_2 \mu_j^4 + 1 - \delta_2)} + \\ &+ 2 \int_0^{\infty} \frac{J_0(\rho r_0) J_2(a \rho) \operatorname{th} \rho}{K_2(\rho)} d\rho, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где знаки “−”, “+” соответствуют случаям $x > 0$, $x < 0$. Подынтегральная функция в первом интеграле экспоненциально затухает при $|s| \rightarrow \infty$.

Коэффициенты $a_0(s)$, $a_2(s)$ определяют симметричную часть решения, учитывающую влияние трещины, $a_1(s)$, $a_3(s)$ — антисимметричную. В работах [2, 3, 5, 13] показано, что симметричная часть решения задачи о дифракции изгибно-гравитационных волн на прямолинейной трещине имеет краевую моду. Результаты расчетов показывают, что существует значение параметра $s = s_0 > \mu_0$, экстремально близкое к значению корня μ_0 ,

при котором $\Delta(s_0) = 0$. Таким образом, в случаях пластин со свободными краями и свободным наложением функции $a_0(s)$, $a_2(s)$ имеют полюс. Вычет подынтегральной функции при $s = s_0$ определяет амплитуду краевой моды, которая распространяется без затухания вдоль кромок пластин и экспоненциально затухает в перпендикулярном направлении.

Для того чтобы избежать корневой особенности при $s = \mu_0$, при интегрировании выполняется замена переменной (2.12). Тогда подынтегральная функция имеет единственную особенность — полюс $\zeta = \zeta_0$ при $|s| > \mu_0$.

В случае если плавающая упругая пластина со свободным краем контактирует с вертикальной стенкой, решение нетрудно получить с помощью метода отражения. В силу симметрии $a_1(s) = a_3(s) = 0$. Для коэффициентов $a_0(s)$, $a_2(s)$ получаем соотношения (3.5), (3.6), при этом в (3.5) правая часть увеличивается в два раза. В формуле (3.8) в последнем интеграле функция $J_0(\rho r_0)$ заменяется на $J_0(\rho r_0) + J_0(\rho r_1)$, где $r_1 = \sqrt{(x + x_0)^2 + y^2}$.

4. Результаты численных расчетов. Численные расчеты для ледяного покрова с прямолинейной трещиной проводились при следующих входных параметрах: $E = 6$ ГПа, $\rho = 1025$ кг/м³, $\rho_0 = 922,5$ кг/м³, $\nu = 0,3$, $a = 25$ м, $x_0 = 50$ м. Первая серия расчетов выполнялась при $H = 10$ м, нагруженная пластина имела толщину $h_2 = 1$ м, толщина второй пластины менялась в диапазоне $h_1 = 0,5 \div 2,0$ м. Сравнение результатов расчетов, полученных в данной работе при малой глубине жидкости и малых частотах, и результатов работы [13], полученных в приближении мелкой воды, показало, что они хорошо согласуются.

Вторая серия расчетов проводилась при следующих входных параметрах: $H = 100$ м, толщина нагруженной пластины $h_2 = 2$ м, толщина второй пластины менялась в диапазоне $h_1 = 1 \div 3$ м. Менялась также частота действующей нагрузки. Далее приводятся результаты расчетов для амплитуд безразмерного прогиба пластин. На рис. 1 в полярной системе координат приведены главные члены асимптотик в дальнем поле амплитуд колебаний пластин различной толщины со свободными краями при различных значениях частот (диаграммы направленности). При малых частотах направление, в котором преимущественно распространяются волны, выделяется в пластине большей толщины, при увеличении частоты — в тонкой пластине. Диаграммы направленности для пластин со свободным наложением и для пластин со свободными краями аналогичны.

На рис. 2 представлены изолинии амплитуд прогиба пластин толщиной $h_1 = 1$ м, $h_2 = 2$ м со свободными краями при частотах $\omega = 0,5; 1,0$ с⁻¹. На рис. 3 при тех же частотах приведены изолинии амплитуд прогиба для пластин толщиной $h_1 = 3$ м, $h_2 = 2$ м со свободными краями. Изолинии для пластин со свободным наложением и со свободными краями подобны, лишь в первом случае вблизи трещины изолинии смыкаются, так как прогибы пластин равны. Рис. 2, 3 показывают, каким образом формируются направления, по которым преимущественно распространяются волны при различных частотах и толщинах пластин.

На рис. 4 показаны изолинии амплитуд прогиба пластин одинаковой толщины $h_1 = h_2 = 2$ м со свободными краями при частоте $\omega = 0,5$ с⁻¹. На рис. 5 приведены изолинии амплитуд прогиба таких же пластин со свободными краями и со свободным наложением при частоте $\omega = 1$ с⁻¹. В случае свободного наложения пластин краевая мода проявляется сильнее, так как антисимметричная часть решения, учитывающая влияние трещины, обращается в нуль. Несимметрия решения вызвана вторым членом в правой части формулы (3.7). На рис. 6 показаны изолинии амплитуд прогиба пластины толщиной 2 м со свободным краем, контактирующей с вертикальной стенкой, при $\omega = 0,5; 1,0$ с⁻¹. В этом случае краевая мода распространяется с наибольшей амплитудой.

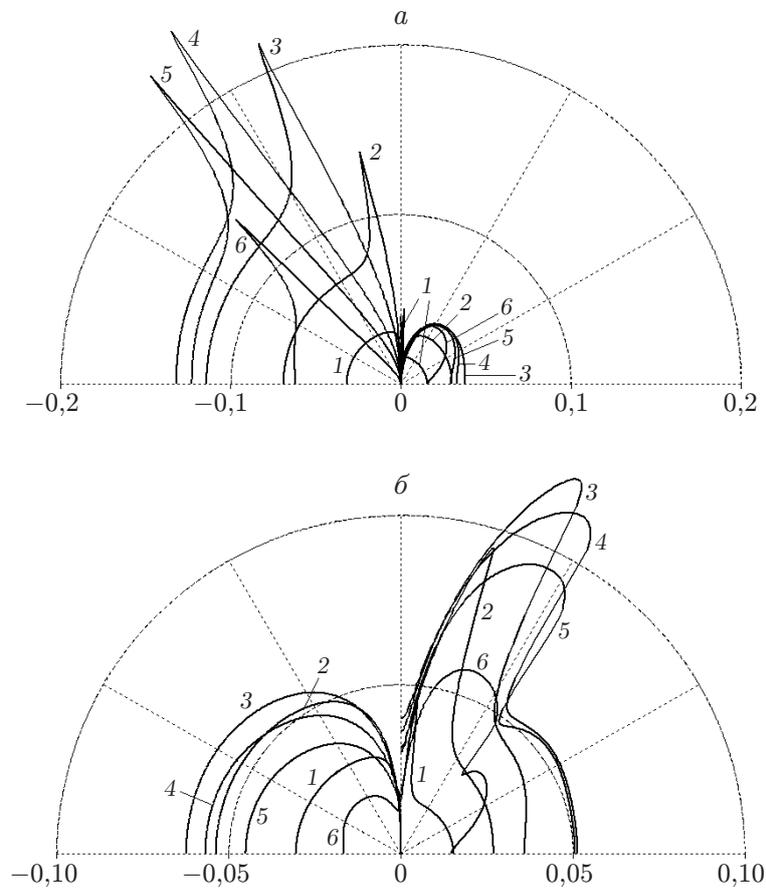


Рис. 1. Главные члены асимптотик в дальнем поле (функция $A(\theta)$) амплитуд прогиба пластин различной толщины со свободными краями при различных значениях частоты:

a — $h_1 = 1$ м, $h_2 = 2$ м, b — $h_1 = 3$ м, $h_2 = 2$ м; 1 — $\omega = 0,3$ с $^{-1}$, 2 — $\omega = 0,4$ с $^{-1}$, 3 — $\omega = 0,5$ с $^{-1}$, 4 — $\omega = 0,6$ с $^{-1}$, 5 — $\omega = 0,7$ с $^{-1}$, 6 — $\omega = 1,0$ с $^{-1}$

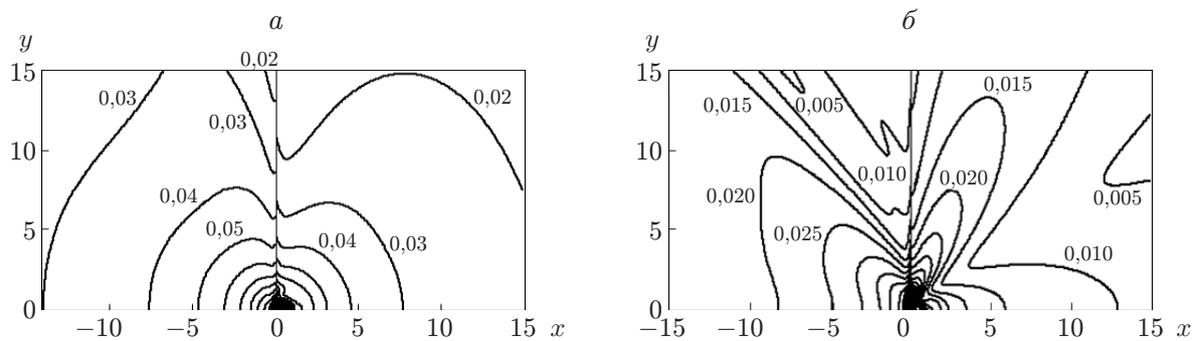


Рис. 2. Изолинии амплитуд прогиба пластин толщиной $h_1 = 1$ м ($x < 0$), $h_2 = 2$ м ($x > 0$) со свободными краями:

a — при частоте $\omega = 0,5$ с $^{-1}$ с шагом 0,01 (на левой пластине — от 0,02 до 0,15, на правой пластине — от 0,02 до 0,22), b — при частоте $\omega = 1,0$ с $^{-1}$ с шагом 0,005 (на левой и правой пластинах — от 0,005 до 0,140)

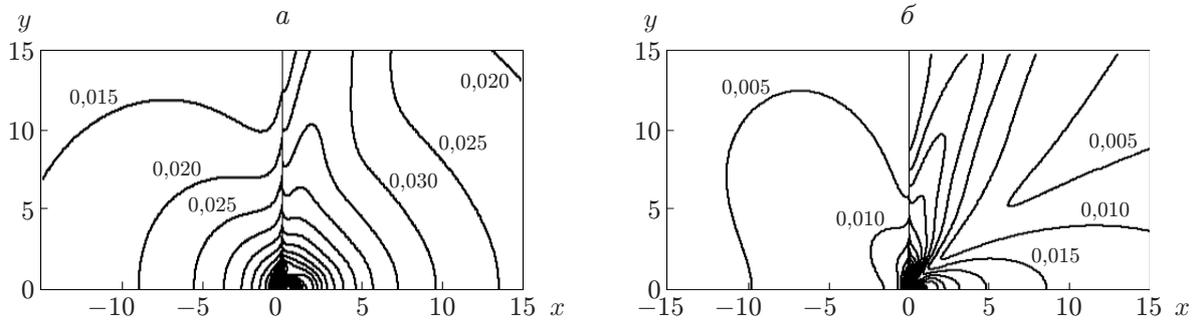


Рис. 3. Изолинии амплитуд прогиба пластин толщиной $h_1 = 3$ м ($x < 0$), $h_2 = 2$ м ($x > 0$) со свободными краями:

a — при частоте $\omega = 0,5$ с⁻¹ с шагом 0,005 (на левой пластине — от 0,015 до 0,110, на правой пластине — от 0,02 до 0,23), *б* — при частоте $\omega = 1,0$ с⁻¹ с шагом 0,005 (на левой пластине — от 0,005 до 0,045, на правой пластине — от 0,005 до 0,140)

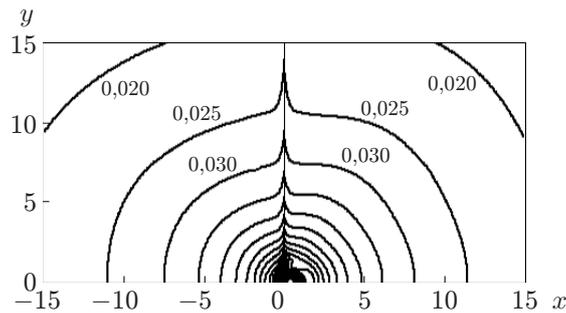


Рис. 4. Изолинии амплитуд прогиба пластин толщиной $h_1 = h_2 = 2$ м со свободными краями при частоте $\omega = 0,5$ с⁻¹ с шагом 0,01 (на левой пластине — от 0,02 до 0,14, на правой пластине — от 0,020 до 0,215)

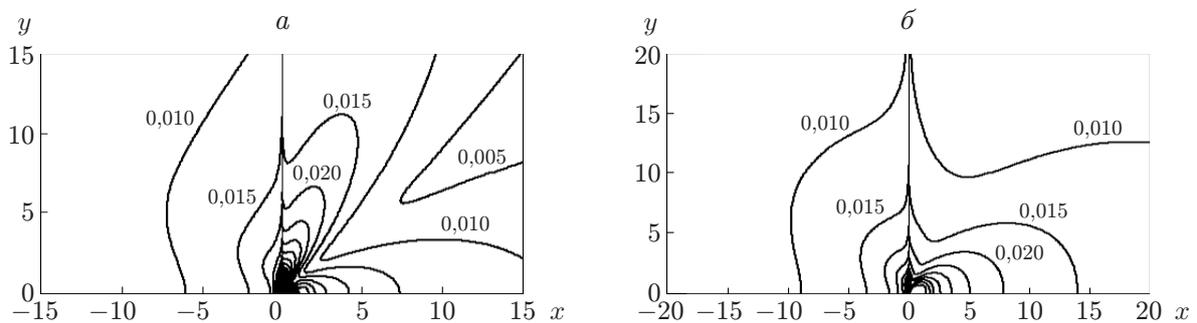


Рис. 5. Изолинии амплитуд прогиба пластин толщиной $h_1 = h_2 = 2$ м при частоте $\omega = 1,0$ с⁻¹ с шагом 0,005:

a — пластины со свободными краями (на левой пластине — от 0,01 до 0,07, на правой пластине — от 0,005 до 0,145), *б* — пластины со свободным наложением (на левой пластине — от 0,010 до 0,115, на правой пластине — от 0,005 до 0,115)

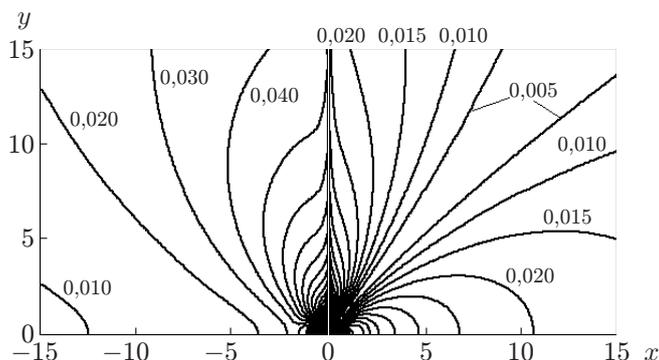


Рис. 6. Изолинии амплитуд прогиба пластины толщиной 2 м со свободным краем вблизи вертикальной стенки:

слева — при частоте $\omega = 0,5 \text{ с}^{-1}$ с шагом 0,01 (от 0,01 до 0,23), *справа* — при частоте $\omega = 1,0 \text{ с}^{-1}$ с шагом 0,005 (от 0,005 до 0,120)

Заключение. Построено аналитическое решение задачи о воздействии осесимметричного периодического по времени давления, приложенного в локальной области, на ледяной покров с прямолинейной трещиной. В случае пластин одинаковой толщины решение получено в явном виде. Найдена асимптотика распространения волн в дальнем поле. Показано, что при контакте пластин различной толщины выделяются направления под углом к трещине, по которым преимущественно распространяются волны в дальнем поле. Угол наклона определяется отношением волновых чисел распространяющихся мод. Направления преимущественного распространения волн расположены в основном в пластине меньшей толщины. При малых частотах направление преимущественного распространения волн выделяется в пластине большей толщины. В случае пластин одинаковой толщины вдоль трещины распространяется краевая мода. С наибольшей амплитудой краевая мода распространяется при контакте пластины со свободным краем и твердой вертикальной стенки.

Автор выражает благодарность И. В. Стуровой за внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ткачева Л. А. Поведение полубесконечного ледяного покрова при периодическом динамическом воздействии // ПМТФ. 2017. Т. 58, № 4. С. 82–94.
2. Марченко А. В., Семенов А. Ю. Краевые волны в мелкой жидкости под упругой пластиной с трещиной // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1994. № 4. С. 185–189.
3. Гольдштейн Р. В., Марченко А. В., Семенов А. Ю. Краевые волны в жидкости под упругой пластиной с трещиной // Докл. АН. 1994. Т. 339, № 3. С. 331–334.
4. Марченко А. В. Собственные колебания гряды торосов в упругом ледяном покрове, плавающем на поверхности бесконечно глубокой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 6. С. 99–105.
5. Evans D. V., Porter R. Wave scattering by narrow cracks in ice sheets floating on water of finite depth // J. Fluid Mech. 2003. V. 484. P. 143–165.
6. Xia D., Kim J. W., Ertekin R. C. On the hydroelastic behavior of two-dimensional articulated plates // Marine Structures. 2000. V. 13. P. 261–278.
7. Chung H., Linton C. M. Reflection and transmission of waves across a gap between two semi-infinite elastic plates on water // Quart. J. Appl. Math. 2005. V. 58, N 1. P. 1–15.

8. **Karmakar D., Sahoo T.** Scattering of waves by articulated floating elastic plates in water of finite depth // *Marine Structures*. 2005. V. 18. P. 451–471.
9. **Waughan G. L., Williams T. D., Squire V. A.** Perfect transmission and asymptotic solutions for reflection of ice-coupled waves by inhomogeneities // *Wave Motion*. 2007. V. 44. P. 371–384.
10. **Chung H., Fox C.** A direct relationship between bending waves and transition conditions of floating plates // *Wave Motion*. 2009. V. 46. P. 468–479.
11. **Williams T. D., Porter R.** The effect of submergence on the scattering by the interface between two semi-infinite sheets // *J. Fluids Structures*. 2009. V. 25. P. 777–793.
12. **Марченко А. В.** Parametric excitation of flexural-gravity edge waves in the fluid beneath an elastic ice sheet with a crack // *Europ. J. Mech. B. Fluids*. 1999. V. 18, N 3. P. 511–525.
13. **Ткачева Л. А.** Колебания ледяного покрова под действием локальной периодической по времени нагрузки // *Механика и процессы управления*. Т. 1. Материалы 45-го Всерос. симп., посвящ. 70-летию Победы, Миасс, 22–24 дек. 2015 г. М.: Изд-во РАН, 2015. С. 102–113.
14. **Нобл Б.** Метод Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

*Поступила в редакцию 3/VIII 2016 г.,
в окончательном варианте — 5/IX 2016 г.*
