

УДК 533.68

Влияние трансверсальной кривизны поверхности при отрыве потока на тонких цилиндрах

А. Мехмуд, М. Усман

Международный исламский университет, Исламабад, Пакистан

Email: usman725.iiui@gmail.com

Отрыв пограничного слоя в первую очередь обусловлен неблагоприятным градиентом давления. Оказать на пограничный слой такое воздействие, чтобы он остался присоединенным к поверхности, можно различными средствами, например, используя поверхность с трансверсальной кривизной или за счет формы тела. Трансверсальная кривизна поверхности способствует затягиванию отрыва пограничного слоя в заторможенном потоке над тонкими телами при различных конфигурациях последних. В настоящем исследовании рассмотрены тела вращения различной формы, имеющие разные поперечные сечения (по координате x), изменяющиеся по степенному закону. Показано, что положение точки отрыва сильно зависит от параметра кривизны поверхности k и индекса формы тела n , которые по сути управляют отрывом потока. Это означает, что увеличение параметра кривизны поверхности k и индекса формы тела n приводит к увеличению напряжения сдвига на стенке и, следовательно, затягивает отрыв потока. Значительное затягивание отрыва потока наблюдается при наличии цилиндров, имеющих достаточно большую трансверсальную кривизну. В работе рассчитано и представлено в виде таблиц процентное увеличение длины отрыва, соответствующие различным значениям параметра кривизны и индекса формы тела.

Ключевые слова: трансверсальная кривизна поверхности, неавтономное течение, удлиненные цилиндры, отрыв потока, степенной закон.

Введение

Исследование внешнего обтекания тел различных форм с затупленной или заостренной носовой частью требуется для многих практических приложений, таких как обтекание аэрокосмических аппаратов, ракет, автомобилей и высокоскоростных поездов и т.д. Большинство аэрокосмических объектов имеет, как правило, цилиндрический вид, что свидетельствует о значимости цилиндрической формы при изучении аэродинамических явлений. Изучение потока сплошной среды за круглым цилиндром является классической задачей. Как правило, если радиус тела существенно больше толщины пограничного слоя, такие потоки похожи на двумерные течения. Однако в случае, когда толщина пограничного слоя становится сравнимой с радиусом тела, влияние трансверсальной кривизны поверхности оказывается заметным, что весьма существенно влияет на состояние пограничного слоя.

В 1951 году авторы работы [1] рассчитали характеристики поверхностного трения и теплопередачи ламинарного пограничного слоя на цилиндре с фиксированным поперечным сечением, расположенном аксиально в потоке несжимаемой жидкости. Некоторые поправки к решению [1] были сделаны в работе [2] в 1954 году. Следует отметить, что провести вычисления для рассматриваемого в работе [1] неавтономного потока

в то время было довольно трудно. Учет трансверсальной кривизны поверхности значительно усложняет вычислительный процесс. Авторы работы [3] использовали для вычислений интегральный метод Польхгаузена. Они указали, что по сравнению с полиномиальным профилем скорости логарифмический профиль скорости лучше подходит для изучения пристенной области. В совершенствование решений [3] внес вклад автор работы [4]. Здесь для той же задачи было получено решение в виде ряда. Результаты исследований [1] были расширены на большие расстояния по оси от передней кромки в работе [5], где также рассматривался аксиальный несжимаемый поток над цилиндром постоянного сечения. Во всех перечисленных работах авторы изучали неавтономные потоки только с помощью математических средств. Большим препятствием для проведения численного решения и рассмотрения более сложных задач было слабое в то время развитие численных методов и отсутствие высокопроизводительных вычислительных машин. В 1968 году автором работы [6] был рассмотрен неавтономный пограничный слой на круглом цилиндре и численно решено полученное дифференциальное уравнение в частных производных на основе конечно-разностной схемы. Начиная с этого времени довольно активно стали разрабатываться численные методы. Исследования последних трех десятилетий прошлого века, среди которых можно выделить важнейшие труды [7–9], внесли значительный вклад в численные расчеты пограничного слоя. Большая работа авторов [7–9] позволила более точно и весьма удобно выявлять эффекты трансверсальной кривизны (ТВК) поверхности. В настоящее время при высокопроизводительных численных методах и высокой производительности вычислительных машин с такими неавтономными потоками работать достаточно легко.

Обзор имеющейся литературы показывает, что работ по неавтономным течениям на цилиндрах с учетом ТВК по-прежнему очень мало при том, что имеется множество публикаций, посвященных исследованиям в плоских потоках. Цель настоящей работы — восполнить этот пробел. Авторы рассматривают задачу вычисления затягивания отрыва пограничного слоя с учетом трансверсальной кривизны поверхности. В работе [10] изучался заторможенный набегающий поток типа течения Ховарта. Из-за заторможенности внешнего потенциального потока в пограничном слое Ховарта вниз по течению растет неблагоприятный градиент давления, который в конечном счете вызывает отрыв потока. В течении Ховарта, как сообщалось самим Ховартом [10], отрыв происходит при $x^* = 0,12$. Очевидно, что расстояние до точки отрыва очень короткое и она расположена довольно близко к передней кромке. Возникает естественный вопрос: какую аэродинамическую форму можно выбрать для того, чтобы избежать такого раннего отрыва потока без использования других средств? Ответ на этот вопрос был дан авторами работы [11], где было указано, что наличие трансверсальной кривизны поверхности работает как благоприятный градиент давления в пограничном слое, что существенно способствует затягиванию отрыва пограничного слоя. Таким образом, в качестве аэродинамической формы тела, которая, как ожидается, сможет препятствовать отрыву потока, можно выбрать форму с достаточной кривизной поверхности, такую как цилиндр. Этот факт обуславливает рассмотрение в представленном исследовании цилиндров разных форм и различной трансверсальной кривизны; также подробно изучается роль ТВК в затягивании отрыва пограничного слоя.

1. Уравнения пограничного слоя

Уравнения пограничного слоя для несжимаемого стационарного аксиально-симметричного ламинарного обтекания тонкого тела вращения (см. рис. 1) формулируются (см., например, [11]) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(ru) + \frac{\partial}{\partial y}(rv) = 0, \quad (1)$$

Рис. 1. Схема системы координат.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(r \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2)$$

с учетом соответствующих краевых условий

$$u(x, 0) = 0 = v(x, 0), \quad u(x, \infty) = u_e(x). \quad (3)$$

Введем следующие переменные для приведения уравнений (1)–(3) к более удобному виду:

$$d\xi = \rho \mu u_e (r_0/L)^2 dx, \quad d\eta = \frac{\rho u_e}{\sqrt{2\xi}} (r/L) dy, \quad (4)$$

где $r(x, y) = r_0(x) + u \cos \alpha(x)$, $r_0(x)$ характеризует форму тела. Например, постоянство $r_0(x)$ соответствует круглому цилиндру неизменного сечения, тогда как переменный характер этой величины свидетельствует о переменном сечении цилиндра. Величины ρ , μ и L — соответственно плотность, динамическая вязкость и характерная длина. Пусть компоненты скорости и функция тока соотносятся как

$$\psi_y = (r/L) \rho u, \quad \psi_x = -(r/L) \rho v, \quad \text{где } \psi = \sqrt{2\xi} f(\xi, \eta), \quad (5)$$

Подстановка выражений (4), (5) в уравнение (1) приводит к тому, что оно удовлетворяется тождественно и преобразует уравнение (2) к виду

$$\left[(1+t)^2 f'' \right]' + ff'' + \beta(1-f'^2) = 2\xi \left[ff'_\xi - f''f'_\xi \right], \quad (6)$$

где t — параметр трансверсальной кривизны, определенный как

$$t = -1 + \left[1 + \frac{2L \cos \alpha}{r_0^2} \cdot \frac{\sqrt{2\xi}}{\rho u_e} \eta \right]^{1/2}, \quad (7)$$

и $\beta = (du_e/d\xi) 2\xi/u_e$ характеризует роль члена с градиентом давления. Краевые условия (3), выраженные через функцию тока, имеют вид

$$f(\xi, 0) = 0 = f'(\xi, 0), \quad f'(\xi, \infty) = 1. \quad (8)$$

Выбор внешней скорости $u_e(x)$ указывает на ускоряющийся или замедляющийся характер внешнего потенциального потока. В настоящей работе, чтобы исследовать воздействие ТВК на затягивание отрыва пограничного слоя, рассматривается заторможенный потенциальный поток типа течения Ховарта [10]. При этом форма тонкого цилиндра не фиксируется; вместо этого рассматривается семейство круговых цилиндров, начиная от цилиндра постоянного сечения до цилиндров переменного сечения. Особенности внешней потенциальной скорости $u_e(x)$ и формы тела приведены ниже.

Линейный заторможенный поток

Рассматривается линейный заторможенный внешний поток (типа течения Ховарта [10])

$$u_e(x) = (U_\infty - ax), \quad a > 0, \quad (9)$$

который в безразмерной форме описывается соотношениями

$$\bar{u}_e = (1 - x^*), \quad \bar{u}_e = u_e/U_\infty, \quad x^* = ax/U_\infty, \quad (10)$$

где U_∞ — постоянная потенциальная скорость.

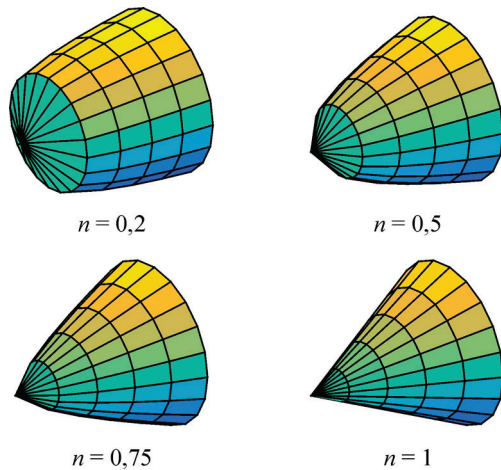


Рис. 2. Примеры некоторых характерных конфигураций тел.

Контур тела

Исследуется семейство параболических контуров, заданных степенной функцией $r_0(x)$, которая в безразмерном виде определяется по формуле

$$r_0(x^*)/L = x^{*n}, \quad 0 \leq n \leq 1, \quad (11)$$

где n означает затупление соответствующего тела (см. рис. 2). При $n \geq 0,7$ носовые части тел являются заостренными, а при $n < 0,7$ — затупленными. Параметр ТВК, определенный в уравнении (7), с учетом

выражений (10) и (11) преобразуется к виду (см., например, [12, 13])

$$(1+t)^2 = 1 + 2k \left(2\bar{\xi} / \bar{u}_e^2 \right)^{1/2} \eta, \quad d\bar{\xi} = \bar{u}_e dx^*, \quad (12)$$

где $k = \sqrt{\nu / U_\infty L}$ — трансверсальная кривизна поверхности цилиндра, ν — кинематическая вязкость жидкости. Малые значения k соответствуют малой кривизне цилиндра, а большие значения k — цилиндрам с большой трансверсальной кривизной. Значение $k = 0$ соответствует решению для плоской пластины без трансверсальной кривизны. При выводе уравнения (12) основное внимание было сосредоточено на трансверсальной кривизне, из-за которой было принято, что $\cos \alpha \approx 1$. К физическим величинам, представляющими основной интерес, относятся касательные напряжения на стенке, толщина вытеснения и толщина потери импульса, которые соответственно определяются как

$$C_f = \tau_w / (\rho u_e^2 / 2), \quad (13)$$

$$\delta^* = \frac{L}{r_0} \cdot \frac{\sqrt{2\xi}}{\rho u_e} \int_0^\infty (1-u) d\eta, \quad (14)$$

$$\Theta^* = \frac{L}{r_0} \cdot \frac{\sqrt{2\xi}}{\rho u_e} \int_0^\infty u(1-u) d\eta. \quad (15)$$

2. Результаты и обсуждение

Из-за используемой потенциальной скорости и степенных функций в уравнениях (9) и (11) поток имеет, по сути, неавтомодельный характер. Для нахождения численного решения была реализована неявная конечно-разностная схема, широко известная как схема Келлера [7–9]. Программный модуль был разработан в среде MATLAB. Для того, чтобы удостовериться в надежности текущей процедуры, программа была протестирована путем вычисления течения Ховарта. Решение для течения Ховарта приведено в табл. 1. Видно, что текущая схема воспроизводит

Таблица 1

Сравнение значений сдвига на стенке $\left[\tau_w \cdot \text{Re}_L^{1/2} / (\rho U_\infty^2) \right]$ для течения Ховарта

x^*	Настоящее решение	Решение Ховарта
0,0125	2,742	2,739
0,0250	1,773	1,772
0,0375	1,310	1,309
0,0500	1,011	1,011
0,0625	0,790	0,790
0,0750	0,612	0,613
0,0875	0,458	0,459
0,1000	0,314	0,315
0,1125	0,163	0,163
0,1200	0,001	0,000

Таблица 2

Значения коэффициента поверхностного трения при $k = 0,5$ и различных n

x^*	$\tau_w \text{Re}_L^{1/2} / (\rho U_\infty^2)$				
	$n = 0,0$	$n = 0,2$	$n = 0,5$	$n = 0,75$	$n = 1,0$
0,0050	4,8869	6,2828	9,9385	17,7823	33,5677
0,0100	3,4482	4,4751	6,9209	11,4437	21,5369
0,0500	1,3455	1,8379	2,7211	3,8574	5,7555
0,1000	0,6887	1,0441	1,5942	2,1809	3,0072
0,1500	0,2889	0,6105	1,0297	1,4198	1,9101
0,1750	0,0806	0,4395	0,8248	1,1591	1,5589
0,1800	0,0042	0,4070	0,7876	1,1128	1,4978
0,2000		0,2784	0,6483	0,9426	1,2774
0,2300		0,0535	0,4600	0,7221	1,0015
0,2334		0,0038	0,4397	0,6991	0,9734
0,2500			0,3419	0,5917	0,8441
0,2900			0,0865	0,3537	0,5724
0,2978			0,0009	0,3087	0,5241
0,3000				0,2959	0,5107
0,3200				0,1758	0,3918
0,3400				0,0160	0,2750
0,3408				0,0034	0,2703
0,3500					0,2151
0,3600					0,1517
0,3700					0,0788
0,3750					0,0316
0,3772					0,0014

решение Ховарта довольно точно. Эта проверка обеспечивает уверенность в предлагаемой схеме решения и дает возможность для ее использования при решении рассматриваемой задачи.

Численные значения коэффициента поверхностного трения, вычисленного в разных положениях по x^* при различных значениях индекса формы тела n и фиксированном k ($k = 0,5$), перечислены в табл. 2. Получено, что отрыв происходит при $x^* = 0,1800$ ($n = 0$), $0,2334$ ($n = 0,2$), $0,2978$ ($n = 0,5$) и $0,3408$ ($n = 0,75$), что соответственно почти на 50, 95, 148 и 184 % больше значения, полученного при решении для плоской пластины, то есть значения Ховарта 0,12. Такое значительное затягивание отрыва потока объясняется ненулевыми значениями параметров кривизны k и формы тела n . Напомним, что решение для плоской пластины может быть восстановлено при $k = 0$. Данные, представленные в табл. 2, отражены на рис. 3 посредством изображения профиля скорости в разных продольных положениях и при различных значениях n . Очевидно, что кривые скорости стремятся принять S-образную форму при приближении к точке отрыва. В точках $x^* = 0,1800$, $0,2334$ и $0,2978$ профили скорости принимают S-образную форму и демонстрируют наличие на них точки перегиба. Из рисунка видно, что более тонким телам соответствует уменьшение толщины пограничного слоя, что свидетельствует о возможности управления отрывом пограничного слоя путем использования большей кривизны поверхности. К основополагающим факторам,

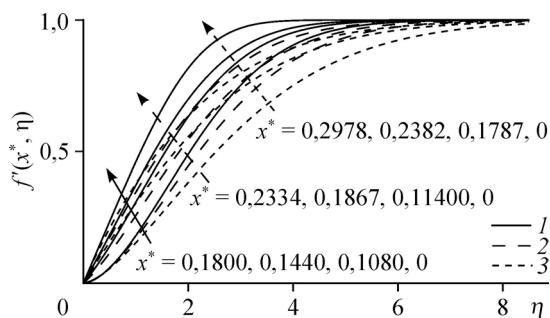


Рис. 3. Профиль скорости при $k = 0,5$.
 $n = 0$ (1), $0,2$ (2), $0,5$ (3).

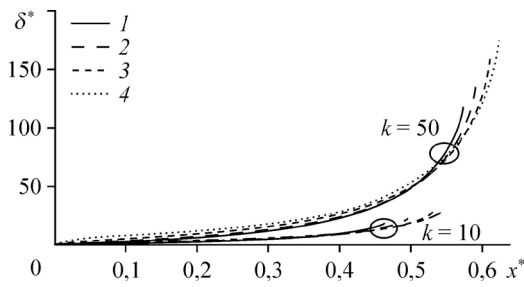


Рис. 4. Влияние ТВК и значений индекса формы тела на толщину вытеснения.
 $n = 0$ (1), 0,2 (2), 0,5 (3), 0,75 (4).

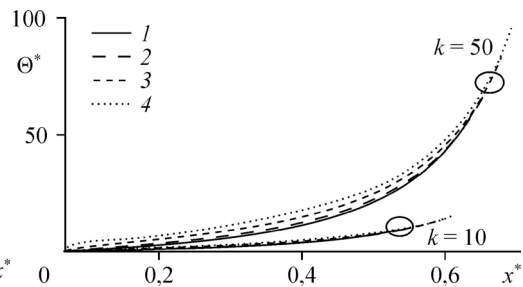


Рис. 5. Изменение толщины потери импульса при ТВК и переменном индексе формы тела.
 Обозначения см. на рис. 4.

являющимся следствием наличия ТВК, относится то, что поток в пограничном слое обладает большей энергией на телах с большей ТВК. Эти факты находят подтверждение на рис. 4 и 5, где нанесены соответственно графики толщин вытеснения и потери импульса. Для тел с большей ТВК соответствующие толщины вытеснения и потери импульса также увеличивается. Более того, они возрастают с увеличением индекса формы тела n . Причиной этого является то, что при увеличении значения n притупление тела уменьшается, следовательно, получаются более обтекаемые тела с острым носиком ($n \rightarrow 1$), что в итоге способствует затягиванию отрыва потока. Полученные данные указывают на то, что оба параметра (k и n) играют важную роль в управлении отрывом пограничного слоя. Учитывая представленные результаты, следует предположить, что расстояние до линии отрыва может быть дополнительно увеличено за счет увеличения значений k . Соответствующие данные приведены в табл. 3, из которой видно, что отрыв затягивается до $x^* = 0,6630$ (при $k = 100$ и $n = 1$), что почти на 453 % выше значения Ховарта. Этот факт подтверждают замечания авторов работы [11] относительно полезной роли трансверсальной кривизны поверхности в затягивании отрыва пограничного слоя. Подобный эффект ТВК при благоприятных и неблагоприятных градиентах давления также отмечен в работе [14]. Ее результаты продемонстрировали увеличение поверхностного трения при ТВК в обеих ситуациях. Результаты, представленные в табл. 3, изображены на рис. 6, где показаны зависимости коэффициента поверхностного трения от x^* при различных значениях k и n . Видно, что на всех построенных кривых коэффициент поверхностного трения уменьшается с возрастанием x^* и пересекает ось x^* в соответствующих точках отрыва потока. На рис. 6 влияние n также показано для малых и больших значений параметра ТВК. Расстояние до отрыва возрастает с увеличением n . Например, для $k = 0,25$

Таблица 3

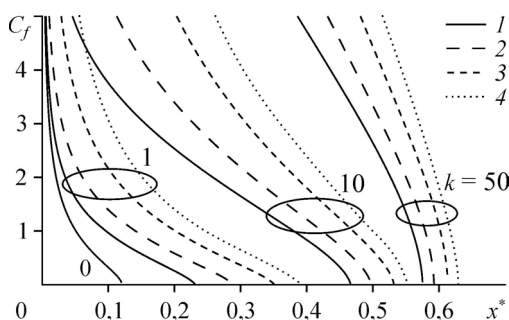
Точки отрыва, соответствующие различным k и n

k	n						
	0,0	0,1	0,2	0,5	0,7	0,75	1,0
0,00	0,1200	0,1200	0,1200	0,1200	0,1200	0,1200	0,1200
0,25	0,1308	0,1742	0,1968	0,2566	0,2908	0,2988	0,3352
0,50	0,1800	0,2082	0,2334	0,2978	0,3328	0,3408	0,3772
0,75	0,2070	0,2368	0,2634	0,3276	0,3622	0,3700	0,4052
1,00	0,2312	0,2618	0,2882	0,3508	0,3844	0,3918	0,4256
5,00	0,4010	0,4240	0,4420	0,4832	0,5060	0,5112	0,5344
10,00	0,4664	0,4826	0,4974	0,5318	0,5490	0,5532	0,5724
50,00	0,5754	0,5844	0,5926	0,6134	0,6246	0,6272	0,6404
100,00	0,6090	0,6162	0,6228	0,6396	0,6494	0,6518	0,6630

Рис. 6. Влияние ТВК и значения индекса формы тела на затягивание отрыва. Обозначения см. на рис. 4.

расстояние до отрыва увеличивается при наличии круглого цилиндра с фиксированным сечением почти до 170 %, когда n варьируется от 0 до 1, что показывает, что конические конфигурации больше подходят для предотвращения/затягивания отрыва потока.

Влияние n снижается при более высоких значениях k . Например, при $k=100$ наблюдается всего около 9 % увеличения при тех же изменениях n (см. табл. 3). Это означает, что параметр n является существенным для тел с меньшей ТВК, а для тел с большой ТВК он менее значим.



Заключение

Исследован неавтономный вязкий поток, возникающий при заторможенном течении жидкости над длинными тонкими цилиндрами постоянного или переменного сечения. Обнаружено, что наличие трансверсальной кривизны поверхности и соответствующее значение индекса формы тела могут значительно затягивать отрыв потока по сравнению с плоским течением. Получено почти 453-процентное увеличение расстояния до отрыва для тела конической формы при параметре кривизны k , равном 100. Эти результаты также подтверждают, что трансверсальная кривизна поверхности способствует затягиванию отрыва пограничного слоя. Анализ результатов показал, что использование тел конической формы является более предпочтительным при решении подобных задач, так как для таких конфигураций отрыв затягивается довольно существенно по сравнению с телами затупленной формы или цилиндрами с фиксированным поперечным сечением. Индекс формы тела оказывает более существенное влияние на расстояние до отрыва при меньших значениях k и всегда оказывается менее важным, когда трансверсальная кривизна монотонно увеличивается.

Список литературы

1. Seban R.A., Bond R. Skin-friction and heat transfer characteristics of a laminar boundary layer on a cylinder in axial incompressible flow // J. Aero. Sci. 1951. Vol. 18, No. 10. P. 671–675.
2. Kelly H.R. A note on the laminar boundary layer on a circular cylinder in axial incompressible flow // J. Aero. Sci. 1954. Vol. 21, No. 9. P. 634–639.
3. Glauret M.B., Lighthill M.J. The axisymmetric boundary layer on a long thin cylinder // Proc. Roy. Soc. London A. 1955. Vol. 230, Iss. 1181. P. 188–203.
4. Curle S.N. Calculation of the axisymmetric boundary layer on long thin cylinder // Proc. Roy. Soc. London A. 1980. Vol. 372, Iss. 1751. P. 555–564.
5. Stewartson K. The asymptotic boundary layer on a circular cylinder in axial cylinder in compressible flow // Quart. Appl. Math. 1955. Vol. 13, No. 2. P. 113–122.
6. Jaffe N.A. The transverse curvature effect on the incompressible laminar boundary layer for longitudinal flow over a cylinder // ZAMP. 1968. Vol. 19, Iss. 4. P. 564–574.
7. Keller H.B., Cebeci T. Accurate numerical methods for boundary-layer flows I. Two dimensional laminar flows // Proc. II Int. Conf. On Numerical Methods in Fluid Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1971. P. 92–100.
8. Cebeci T., Smith A.M.O. Analysis of turbulent boundary layers. N.Y.: Academic Press Inc, 1974. 404 p.

9. **Cebeci T., Bradshaw P.** Momentum transfer in boundary layers. Washington: Hemisphere Publishing Company, 1977. 391 p.
10. **Howarth L.** On the solution of the laminar boundary layer equations // Proc. Roy. Soc. London A. 1938. Vol. 164, Iss. 919. P. 547–579.
11. **Probstein R.F., Elliot D.** The transverse curvature effect in compressible axially symmetric laminar boundary-layer flow // J. Aero. Sci. 23. 1956. Vol. 24, No. 3. P. 208–224.
12. **Себеци Т., На Т.И., Мосинкис Г.** Ламинарный пограничный слой на тонких параболамидах // Ракетная техника. 1969. Т. 7, № 7. С. 193–194.
13. **Mehmood A.** Viscous flows: stretching and shrinking of surfaces. Cham: Springer, 2017. 193 p.
14. **Cooper R.D., Tulin M.P.** The laminar flow about slender cylinders in axial motion, including the effect of pressure gradients and unsteady motions // David W. Taylor Model Basin Report 838, Washington, D.C., 1953.

*Статья поступила в редакцию 27 февраля 2017 г.,
после переработки — 9 января 2018 г.*