

- constant velocities of propagation.— Bull. Seismol. Soc. Amer., 1963, vol. 53, N 5.
6. Коваленко Г. П., Филиппов А. П. О колебаниях упругого полупространства с квадратичной зависимостью параметров Ламэ от глубины.— Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 6.
 7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
 8. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981.
 9. Lamb H. On the propagation of the tremors over the surface of an elastic solid.— Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1904, A203, p. 1.
 10. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977.
 11. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.

УДК 539.314

РЕАЛИЗАЦИЯ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОГО БЕЗМОМЕНТНОГО СОСТОЯНИЯ В ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ

Ю. В. Немировский, Г. И. Старостин

(Новосибирск)

В работе [1] сформулирован ряд постановок задач по реализации безмоментного напряженного состояния в упругих армированных оболочках с произвольной формой срединной поверхности. Данная работа посвящена решению трех из выдвинутых в [1] задач для случая, когда срединная поверхность оболочки является поверхностью вращения с ненулевой гауссовой кривизной. Вопрос о возможности реализации безмоментного состояния в произвольных армированных оболочках нулевой кривизны рассмотрен в [2], частный случай осевой симметрии — в [3].

1. Рассмотрим оболочку вращения с квазиоднородным слоистым строением по толщине. Выберем систему координат, связанную с линиями главных кривизн поверхности оболочки. Если оболочка работает в безмоментном напряженном состоянии, то должны выполняться следующие соотношения [1]:

уравнения равновесия

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \partial(rT_1)/\partial\varphi - T_2R_1 \cos\varphi + R_1\partial T_{12}/\partial\theta &= -rR_1p_1, \\ R_1\partial T_2/\partial\theta + \partial(rT_{12})/\partial\varphi + T_{12}R_1 \cos\varphi &= -rR_1p_2, \\ T_1R_2 + T_2R_1 &= R_1R_2p_3; \end{aligned}$$

соотношения упругости

$$(1.2) \quad \begin{aligned} T_1 &= h(a_{11}\varepsilon_1 + a_{12}\varepsilon_2 + a_{13}\varepsilon_{12}), \quad T_2 = h(a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + a_{23}\varepsilon_{12}), \\ T_{12} &= T_{21} = h(a_{13}\varepsilon_1 + a_{23}\varepsilon_2 + a_{33}\varepsilon_{12}); \end{aligned}$$

геометрические уравнения

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{R_1} \frac{\partial u}{\partial\varphi} + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r} u + \frac{w}{R_2}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{r}{R_1} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{v}{r} \right); \end{aligned}$$

$$(1.4) \quad \kappa_1 = \frac{1}{R_1} \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial\varphi} = 0, \quad \kappa_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r} \hat{v}_1 = 0,$$

$$\tau = -\frac{1}{rR_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi\partial\theta} - \frac{R_1 \cos\varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{rR_1} \frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{r}{R_1R_2} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{v}{r} \right) = 0,$$

$$\hat{v}_1 = -\frac{1}{R_1} \frac{\partial w}{\partial\varphi} + \frac{u}{R_1}, \quad \hat{v}_2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial\theta} + \frac{v}{R_2};$$

уравнения неразрывности деформаций

$$(1.5) \quad \begin{aligned} R_1\partial\varepsilon_{12}/\partial\theta - r\partial\varepsilon_2/\partial\varphi - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)R_1 \cos\varphi &= 0, \\ r\partial\varepsilon_{12}/\partial\varphi + \varepsilon_{12}(R_1 + R_2) \cos\varphi - R_1\partial\varepsilon_1/\partial\theta &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{1}{R_1} \left[r \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \varphi} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) R_1 \cos \varphi - \frac{R_1}{R_2} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \theta} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(R_1 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \theta} - \frac{r}{2} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \varphi} - \varepsilon_{12} R_1 \cos \varphi \right) = 0.$$

На границе оболочки $\varphi = \text{const}$ должны быть заданы [4] обобщенные силы

$$(1.6) \quad T_1 = T_\varphi, \quad T_{12} = T_{\varphi\theta}, \quad T_{\varphi n} = 0, \quad M_\varphi = 0$$

либо соответствующие обобщенные смещения

$$(1.7) \quad u, v, w, \vartheta_1;$$

а на границе $\theta = \text{const}$ — обобщенные силы

$$(1.8) \quad T_2 = T_\theta, \quad T_{21} = T_{\theta\varphi}, \quad T_{\theta n} = 0, \quad M_\theta = 0$$

или обобщенные смещения

$$(1.9) \quad u, v, w, \vartheta_2.$$

В (1.1)—(1.9) T_1, T_2, T_{12} — усилия; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ — компоненты тангенциальной деформации срединной поверхности; κ_1, κ_2, τ — компоненты изгибной деформации; u, v, w — компоненты перемещения; p_1, p_2, p_3 — компоненты внешней поверхностной нагрузки; R_1, R_2 — главные радиусы кривизн; $r = R_2 \sin \varphi$ — текущий радиус; h — толщина оболочки; α_{km} — обобщенные упругие характеристики типичного слоя оболочки; $T_\varphi, T_{\varphi\theta}, T_{\varphi n}, M_\varphi$ — компоненты вектора внешних усилий и изгибающий момент, приложенные на границе $\varphi = \text{const}$; $T_\theta, T_{\theta\varphi}, T_{\theta n}, M_\theta$ — аналогичные величины, заданные на контуре $\theta = \text{const}$; ϑ_1, ϑ_2 — углы поворота нормали к срединной поверхности.

2. Уравнения (1.1)—(1.3) являются уравнениями классической безмоментной теории [5] для рассматриваемой оболочки (головной системой уравнений безмоментной теории [6]). В сочетании же с условиями отсутствия изгибной деформации (1.4) и уравнениями неразрывности (1.5) эти уравнения определяют напряженно-деформированное состояние оболочки вращения с конечной жесткостью на изгиб, работающей в строго безмоментном режиме.

Решение уравнений неразрывности (1.5) дает общий вид поля тангенциальных деформаций поверхности вращения при безызгибном деформировании последней. Для его нахождения исключим в (1.5) функции $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и получим

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \varphi} + \varepsilon_{12} \operatorname{ctg} \varphi \right) = 0.$$

Решив это уравнение и проинтегрировав затем первые два уравнения из (1.5), находим

$$(2.1) \quad \varepsilon_{12} = \xi_1(\theta) \sin^{-1} \varphi + \xi_2(\varphi),$$

$$\varepsilon_1 = \xi_3(\varphi) + \operatorname{ctg} \varphi \int_{\theta_0}^{\theta} \xi_1(\theta) d\theta + \frac{\vartheta}{R_1 \sin \varphi} \frac{d}{d\varphi} (\xi_2 r \sin \varphi),$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{r} \left[\xi_4(\theta) + \int_{\varphi_0}^{\varphi} R_1 \left(\frac{1}{\sin \varphi} \frac{d\xi_1}{d\theta} + \varepsilon_1 \cos \varphi \right) d\varphi \right].$$

Здесь $\xi_1(\theta), \xi_2(\varphi), \xi_3(\varphi), \xi_4(\theta)$ — функции интегрирования; нижние пределы интегрирования φ_0, θ_0 выбираются произвольно.

Отметим некоторые свойства полученного решения, связанные с видом срединной поверхности.

1. В случае, когда срединная поверхность содержит точку, отвечающую гладкой вершине ($\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$), из (2.1) следует, что функции

ε_{12} , ε_1 , ε_2 будут ограничены в этой точке, если принять (при $\varphi_0 = 0, \pi$)

$$(2.2) \quad \xi_1(\theta) = 0, \quad \xi_4(\theta) = 0.$$

Следовательно, при безмоментном деформировании такой оболочки величина сдвиговой деформации ε_{12} не зависит от угла θ , а относительные удлинения ε_1 , ε_2 в общем случае зависят от θ линейно.

2. Если оболочка замкнута в окружном направлении, то из условия периодичности функций ε_{12} , ε_1 , ε_2 по θ получим зависимость

$$(2.3) \quad \xi_2(\varphi) = \frac{1}{r \sin \varphi} \left(c - \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_1(\theta) d\theta \right).$$

где c — произвольная константа; $\xi_1(\theta)$, $\xi_4(\theta)$ — периодические функции.

3. В случае, когда срединная поверхность содержит гладкую вершину и замкнута в окружном направлении, из (2.1)–(2.3) находим

$$(2.4) \quad \varepsilon_{12} = 0, \quad \varepsilon_1 = \xi_3(\varphi) = \varepsilon_1(\varphi), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{r} \int_0^\varphi \xi_3 R_1 \cos \varphi d\varphi = \varepsilon_2(\varphi),$$

т. е. в такой оболочке при безызгибном деформировании поле тангенциальных деформаций оказывается осесимметричным, причем деформации ε_1 и ε_2 являются главными.

При выполнении уравнений неразрывности (1.5) перемещения в строго безмоментной оболочке определяются из уравнений (1.3), (1.4) в виде

$$(2.5) \quad u = A \cos \varphi + C \sin \varphi + R_1 \vartheta_1, \quad w = A \sin \varphi, \quad v = \frac{\partial A}{\partial \theta} - R_2 \cos \varphi \int_{\theta_0}^\theta \vartheta_1 d\theta + \eta_3(\varphi),$$

где $A = B + \eta_2(\theta)$; $B = \int_{\varphi_0}^\varphi C d\varphi$; $C = [(J_1 + \eta_1(\varphi)) R_2 + (R_2 - R_1) \vartheta_1] \frac{1}{\sin \varphi}$;

$$\eta_1(\varphi) = \frac{1}{r} \left[c_1 + r_0 J_1(\varphi_0, \theta) + \int_{\varphi_0}^\varphi \varepsilon_1 R_1 \sin \varphi d\varphi \right] - J_1; \quad J_1 = \sin \varphi \int_{\theta_0}^\theta \varepsilon_{12} d\theta;$$

$$\eta_2(\theta) = (c_2 + J_2) \sin \theta + (c_3 + J_3) \cos \theta; \quad \vartheta_1 = (c_4 + J_4) \sin \theta + (c_5 + J_5) \cos \theta;$$

$$\eta_3(\varphi) = r \left[c_6 + \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \theta} + \int_{\theta_0}^\theta \vartheta_1 d\theta \right) \operatorname{ctg} \varphi - \int_{\varphi_0}^\varphi \frac{\varepsilon_{12}}{\sin \varphi} d\varphi \right];$$

$$J_2 = \int_{\theta_0}^\theta \eta \cos \theta d\theta; \quad J_3 = - \int_{\theta_0}^\theta \eta \sin \theta d\theta; \quad \eta = r \varepsilon_2 - (J_1 + \eta_1) R_2 \cos \varphi - \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} - B;$$

$$J_4 = - \sin \varphi \int_{\theta_0}^\theta \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \theta} \cos \theta d\theta; \quad J_5 = \sin \varphi \int_{\theta_0}^\theta \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \theta} \sin \theta d\theta.$$

Здесь c_1, \dots, c_6 — произвольные постоянные. Таким образом, в отличие от классической безмоментной теории [4, 6] для геометрических уравнений оболочки, работающей в строго безмоментном напряженном состоянии, можно получить общее решение в явном виде. Это обстоятельство является следствием возможности построения явного решения для геометрических уравнений общей моментной теории [6].

В случае, когда оболочка имеет гладкую вершину ($\varphi = 0$), замкнута в окружном направлении (купол) и на граничном контуре $\varphi = \varphi_1$ пол-

ностью закреплена от тангенциальных перемещений

$$u(\varphi_1, \theta) = 0, v(\varphi_1, \theta) = 0,$$

из (2.5) получим

$$(2.6) \quad \begin{aligned} u &= \varepsilon_2 r \cos \varphi + \sin \varphi \left(c_1 + \int_{\varphi_1}^{\varphi} \varepsilon_1 R_1 \sin \varphi d\varphi \right), \\ w &= \varepsilon_2 r \sin \varphi - \cos \varphi \left(c_1 + \int_{\varphi_1}^{\varphi} \varepsilon_1 R_1 \sin \varphi d\varphi \right), \\ v &= 0, \hat{v}_1 = 0, c_1 = \varepsilon_2(\varphi_1) R_2(\varphi_1) \cos \varphi_1. \end{aligned}$$

3. Сформулируем и рассмотрим далее три задачи по реализации безмоментного напряженного состояния в армированных оболочках вращения.

Задача 1. Пусть для оболочки вращения заданы: форма срединной поверхности, законы изменения толщины и характера анизотропии, краевые условия типа (1.6)–(1.9). Требуется определить компоненты p_1, p_2, p_3 поверхностной нагрузки, которая вызывает в оболочке безмоментное состояние.

Подставив выражения для $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ из (2.1) в соотношения упругости (1.2) и далее в уравнения равновесия (1.1), получим выражения для искомого компонент поверхностной нагрузки через известные по условию задачи величины и функции $\xi_1(\theta), \xi_2(\varphi), \xi_3(\varphi), \xi_4(\theta)$. Таким образом, решение задачи 1 сводится к нахождению функций $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ из краевых условий. После того, как эти функции будут найдены, усилия определяются по формулам (1.2), а перемещения — по формулам (2.5).

Если за счет функций $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ не удастся удовлетворить всем поставленным краевым условиям, то это означает, что в данной оболочке нельзя реализовать безмоментное состояние путем выбора закона поверхностного нагружения.

В качестве примера рассмотрим решение задачи 1 для замкнутой оболочки вращения с гладкими вершинами при условии, что вдоль меридиана $\theta = \theta_0$ задано значение нормальной составляющей поверхностной нагрузки:

$$(3.1) \quad p_3|_{\theta=\theta_0} = p(\varphi).$$

В силу замкнутости оболочки от всех искомым функций следует требовать периодичности по θ и ограниченности в точках $\varphi = 0, \varphi = \pi$.

В рассматриваемой безмоментной оболочке общий вид поля деформаций определяется соотношениями (2.4). Следовательно, для решения задачи остается определить функцию $\xi_3(\varphi)$ или, что удобнее, функцию ε_2 . Для этого, учитывая (2.4), представим последнее уравнение (1.1) с помощью соотношений упругости (1.2) в виде

$$(3.2) \quad h(D_1 \varepsilon_1 + D_2 \varepsilon_2) = p_3,$$

$$\text{где } D_1 = a_{11} R_1^{-1} + a_{12} R_2^{-1}; \quad D_2 = a_{12} R_1^{-1} + a_{22} R_2^{-1}.$$

Если геометрия срединной поверхности и характер анизотропии материала оболочки таковы, что $D_1 \neq 0$, то из (3.2), учитывая (2.4) и условие (3.1), получим

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= k_1 p_3 - k_2 \varepsilon_2 = k_1^0 p - k_2^0 \varepsilon_2, & k_1 &= (h D_1)^{-1}, \quad k_2 = D_2 D_1^{-1}, \\ k_1^0 &= k_1(\varphi_1, \theta_0), \quad k_2^0 = k_2(\varphi, \theta_0). \end{aligned}$$

Из (2.4) следует также

$$(3.4) \quad d(r\varepsilon_2)/d\varphi = \varepsilon_1 R_1 \cos \varphi.$$

Подставив сюда выражение для ε_1 из (3.3) и проинтегрировав полученное уравнение относительно ε_2 , находим

$$(3.5) \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{r} \exp(-J) \int_0^\varphi p k_1^0 R_1 \cos \varphi \exp J d\varphi, \quad J = \int_0^\varphi \frac{1}{r} k_2^0 R_1 \cos \varphi d\varphi.$$

Если $D_1 = 0$, то $D_2 \neq 0$, так как иначе нарушается условие положительной определенности потенциальной энергии деформации оболочки. В этом случае из (3.1), (3.2) сразу определяем

$$\varepsilon_2 = p_3 (hD_2)^{-1} = p (hD_2)^{-1} |_{\theta=0}.$$

Проиллюстрируем полученные результаты, когда оболочка изотропна и срединная поверхность является замкнутым эллипсоидом вращения. В этом случае соотношения (1.2) при условиях (2.4) имеют вид

$$T_1 = hE(1 - \nu^2)^{-1}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2); \quad T_2 = hE(1 - \nu^2)^{-1}(\nu\varepsilon_1 + \varepsilon_2); \quad T_{12} = 0.$$

Подставив эти выражения в уравнения равновесия (1.1) и учитывая (2.4), получим

$$(3.6) \quad p_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[- \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial h}{\partial \varphi} + \frac{1 - \nu}{R_2} h \operatorname{ctg} \varphi \right) \varepsilon_1 + \left(\frac{1 - \nu}{R_2} h \operatorname{ctg} \varphi - \frac{\nu}{R_1} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right) \varepsilon_2 - \frac{h}{R_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \varphi} + \nu \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \varphi} \right) \right],$$

$$p_2 = - \frac{E(\nu\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{(1 - \nu^2)r} \frac{\partial h}{\partial \theta}, \quad p_3 = \frac{hE}{1 - \nu^2} \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) \varepsilon_1 + \left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \varepsilon_2 \right].$$

Пусть толщина оболочки изменяется по закону

$$(3.7) \quad H = 1 + H_* \sin^2 \theta \sin^2 \varphi,$$

где $H = h/h_0$; $H_* = (h_1 - h_0)/h_0$; $h_0 = h(0, \theta)$; $h_1 = h(\pi/2, \pi/2)$.
Примем также, что

$$(3.8) \quad p(\varphi) = p = \text{const.}$$

Для радиусов кривизны имеем [4]

$$(3.9) \quad R_1 = R(1 + \gamma \sin^2 \varphi)^{-3/2}, \quad R_2 = R(1 + \gamma \sin^2 \varphi)^{-1/2}, \quad R = a_2^2 a_1^{-1},$$

$$\gamma = \varepsilon^2 - 1, \quad \varepsilon = a_2 a_1^{-1},$$

где a_1, a_2 — полуоси эллипсоида (полуось a_1 расположена на оси вращения). Так как для изотропного эллипсоида

$$D_1 = (E/(1 - \nu^2))(1/R_1 + \nu/R_2) > 0,$$

то его деформация определяется соотношениями (3.3), (3.4), в которых

$$(3.10) \quad k_1^0 = ((1 - \nu^2)/h_0 E)(1/R_1 + \nu/R_2)^{-1}, \quad k_2^0 = k_2 = (\nu/R_1 + 1/R_2) \times \\ \times (1/R_1 + \nu/R_2)^{-1}.$$

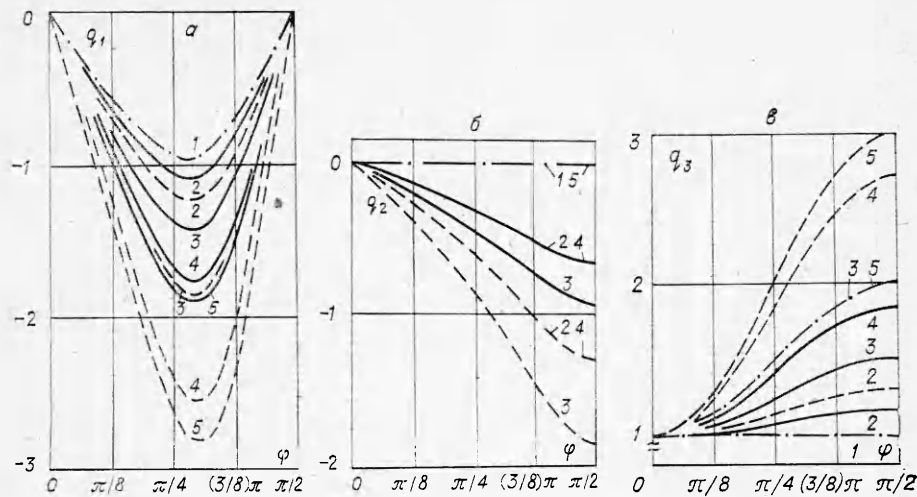
На фиг. 1, $a - e$ показаны зависимости безразмерных величин $q_i = p_i/p$, $q_2 = p_2/p$, $q_3 = p_3/p$ от φ, θ , подсчитанные по формулам (3.3), (3.5)–(3.10) при $\nu = 0,3$, $\varepsilon = 0,25$, $\theta_0 = 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Из (3.6)–(3.9) следует, что при остальных значениях φ, θ величины q_1, q_2, q_3 определяются согласно равенствам

$$q_1(\varphi, \theta) = -q_1(\pi - \varphi, \theta) = q_1(\varphi, -\theta) = q_1(\varphi, \pi - \theta),$$

$$q_2(\varphi, \theta) = q_2(\pi - \varphi, \theta) = -q_2(\varphi, -\theta) = -q_2(\varphi, \pi - \theta),$$

$$q_3(\varphi, \theta) = q_3(\pi - \varphi, \theta) = q_3(\varphi, -\theta) = q_3(\varphi, \pi - \theta).$$

Сплошные и штриховые кривые на фиг. 1, $a - e$ соответствуют значениям



Ф и г. 1

$H_* = 1, 2$; кривые $\bar{2}-\bar{5}$ отвечают значениям $\theta = \pi/8, \pi/4, (3/8)\pi, \pi/2$. Кривая $\bar{1}$ соответствует случаю $\theta = 0$ (при любом H_*).

При $H_* = 0$ эллипсоид имеет постоянную толщину. Тогда из (3.6), (3.7) при условии (3.8) следует, что $q_1 = q_1(\varphi)$, $q_2 = 0$, $q_3 = 1$. Зависимость $q_1(\varphi)$ при $\varepsilon = 0,25$ изображена штрихпунктирной кривой на фиг. 1, а. Для сферы ($\varepsilon = 1$) из (3.3)–(3.7) получим $q_1 = q_2 = 0$, $q_3 = 1$.

4. Для описания упругих свойств материала оболочки применим модель армированного слоя [7]. В этом случае коэффициенты в (1.2) имеют вид

$$(4.1) \quad a_{ii} = \frac{aE}{1-\nu^2} + \sum_{n=1}^N \omega_n E_n l_{1n}^4, \quad a_{33} = \sum_{n=1}^N \omega_n E_n l_{3n}^3 l_{jn},$$

$$a_{12} = \frac{aE\nu}{1-\nu^2} + \sum_{n=1}^N \omega_n E_n l_{1n}^2 l_{2n}^2, \quad a_{33} = \frac{aE}{2(1+\nu)} + \sum_{n=1}^N \omega_n E_n l_{1n}^2 l_{2n}^2,$$

$$l_{1n} = \cos \psi_n, \quad l_{2n} = \sin \psi_n, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j,$$

где N — число однонаправленных семейств нитей (арматуры) в характерном слое; n — номер семейства; ω_n — относительное объемное содержание нитей этого семейства; E_n — модуль Юнга нитей; ψ_n — угол между направлением нитей семейства и меридианом; E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала связующего; a — относительное объемное содержание связующего в слое.

Задача 2. Заданы: форма срединной поверхности, закон внешнего поверхностного нагружения, жесткости $G_k = \omega_k E_k (aE)^{-1}$ (предварительное армирование, $k = 3, \dots, N$), углы $\psi_n(\varphi, \theta)$ ($n = 1, \dots, N$), краевые условия вида (1.6)–(1.9). На отдельных участках или линиях срединной поверхности заданы значения h, G_1, G_2 . Требуется найти законы изменения толщины h и жесткостей G_1, G_2 (дополнительное армирование), при которых в оболочке реализуется безмоментное напряженное состояние.

При решении задачи 2 будем считать, что в каждом конкретном случае известно общее решение уравнений равновесия (1.4). (Вопрос о построении интегралов этих уравнений достаточно полно исследован в безмоментной теории [4–6].) Тогда, представив соотношения упругости (1.2) с помощью зависимостей (4.1) в виде

$$(4.2) \quad G_1 e_1 l_{11}^2 + G_2 e_2 l_{12}^2 - T_1 (aEh)^{-1} = -a'_{11} \varepsilon_1 - a'_{12} \varepsilon_2 - a'_{13} \varepsilon_3,$$

$$G_1 e_1 l_{21}^2 + G_2 e_2 l_{22}^2 - T_2 (aEh)^{-1} = -a'_{12} \varepsilon_1 - a'_{22} \varepsilon_2 - a'_{23} \varepsilon_3,$$

$$G_1 e_1 l_{11} l_{21} + G_2 e_2 l_{22} l_{22} - T_{12} (aEh)^{-1} = -a'_{13} \varepsilon_1 - a'_{23} \varepsilon_2 - a'_{33} \varepsilon_3,$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad a'_{11} &= \frac{1}{1-\nu^2} + \sum_{k=3}^N G_k l_{1k}^4; \quad a'_{12} = \frac{\nu}{1-\nu^2} + \sum_{k=3}^N G_k l_{1k}^2 l_{2k}^2; \\ a'_{i3} &= \sum_{k=3}^N G_k l_{ik}^3 l_{jk}; \quad a'_{33} = \frac{1}{2(1+\nu)} + \sum_{k=3}^N G_k l_{1k}^2 l_{2k}^2; \\ e_i &= \varepsilon_1 l_{1i}^2 + \varepsilon_2 l_{2i}^2 + \varepsilon_3 l_{1i} l_{2i}; \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{12}, \end{aligned}$$

и полагая, что

$$\Delta = [T_1 l_{21} l_{22} + T_2 l_{11} l_{12} - T_{12} \sin(\psi_2 + \psi_1)] \sin(\psi_2 - \psi_1) \neq 0,$$

находим

$$(4.3) \quad h = \Delta (aE\Delta_3)^{-1}, \quad G_i = \Delta_i (e_i \Delta)^{-1}, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_i &= (-1)^i \sum_{k=1}^3 \beta_{ik} \varepsilon_k; \quad \beta_{ik} = a'_{ik} B_i - a'_{2k} C_i + a'_{3k} D_i; \\ \Delta_3 &= \sin(\psi_2 - \psi_1) \sum_{k=1}^3 [a'_{1k} l_{21} l_{22} + a'_{2k} l_{11} l_{12} - a'_{3k} \sin(\psi_1 + \psi_2)] \varepsilon_k; \\ B_i &= (T_2 l_{1j} - T_{12} l_{2j}) l_{2j}; \quad C_i = (T_1 l_{2j} - T_{12} l_{1j}) l_{1j}; \quad D_i = T_1 l_{2j}^2 - T_2 l_{1j}^2. \end{aligned}$$

Подставив в (4.3) значения для $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ из (2.1), получим выражения G_1, G_2, h через заданные и произвольные функции, входящие в общие интегралы $T_1, T_2, T_{12}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Следовательно, решение задачи 2 сводится к определению этих произвольных функций из краевых условий и условий на G_1, G_2, h . В заключение по формулам (2.5) находятся перемещения.

Рассмотрим случай, когда оболочка замкнута в окружном направлении, содержит гладкую вершину и на контуре $\theta = \theta_0$ задано значение относительной жесткости G_2 :

$$(4.4) \quad G_2(\varphi, \theta_0) = g(\varphi).$$

В этом случае, согласно зависимостям (2.4), поле деформаций определяется с точностью до функции $\varepsilon_2(\varphi)$. Чтобы найти ее, учтем условие (4.4) и представим третье равенство из (4.3) в виде

$$(4.5) \quad \varepsilon_1 = -k\varepsilon_2, \quad k = [(\beta_{22} - g\Delta \sin^2 \psi_2) (\beta_{21} - g\Delta \cos^2 \psi_2)^{-1}]_{\theta=\theta_0}.$$

Решая совместно уравнения (4.5), (3.4), находим

$$(4.6) \quad \varepsilon_2 = c \exp J, \quad J = - \int_0^\varphi (1+k) \frac{R_2}{R_1} \operatorname{ctg} \varphi d\varphi,$$

где c — постоянная интегрирования.

В качестве примера рассмотрим решение задачи 2 для сферического купола с вершиной ($R_1 = R_2 = R = \text{const}$). На опорном контуре $\varphi = \varphi_1$ купол закреплен так, что выполняются условия

$$(4.7) \quad u = 0, \quad v = 0, \quad T_{\varphi n} = 0, \quad M_\varphi = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \varphi_1.$$

Поверхностная нагрузка, действующая на оболочку, имеет составляющие:

$$(4.8) \quad p_1 = q \sin \varphi, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = -q \cos \varphi - p \sin \varphi \cos \theta, \quad p = \text{const}, \\ q(\varphi) = q_0 + (q_* - q_0) (1 - \cos \varphi)^m (1 - \cos \varphi_*)^{-m}, \quad m = \text{const},$$

т. е. на купол действуют совместно ветровая [4] и вертикальная осесимметричная нагрузки. Примем, что «предварительное» армирование отсутствует

$$(4.9) \quad G_k = 0 \quad \text{при} \quad k \geq 3,$$

а «дополнительная» арматура уложена по схеме

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \psi_1 = \alpha, \psi_2 = \beta \text{ при } 0 \leq \theta \leq \pi, \\ \psi_1 = -\alpha, \psi_2 = -\beta \text{ при } \pi < \theta < 2\pi, \end{aligned}$$

где α, β — заданные постоянные величины.

Из уравнений равновесия (1.1) при условии ограниченности усилий в точке $\varphi = 0$ находим

$$(4.11) \quad T_1 = -\frac{R}{1 + \cos \varphi} \left[q_0 + \frac{(q_* - q_0)(1 - \cos \varphi)^m}{(m+1)(1 - \cos \varphi_*)^m} \right] + T \cos \varphi \cos \theta,$$

$$T_2 = -Rq \cos \varphi - Rp \sin \varphi \cos \theta - T_1,$$

$$T_3 = T \sin \theta, \quad T(\varphi) = -Rp(2 + \cos \varphi)(1 - \cos \varphi)^{1/2} [3(1 + \cos \varphi)^{3/2}]^{-1}.$$

Пользуясь соотношениями упругости (1.2) и зависимостями (4.6), (4.11), для постоянной c в выражении (4.6) найдем

$$(4.12) \quad c = \varepsilon_2(0) = -Rq_0(1 - \nu)(2h_0aE)^{-1}, \quad h_0 = h|_{\varphi=0}.$$

Компоненты перемещения срединной поверхности рассматриваемого купола определяются зависимостями (2.6).

На фиг. 2, а, б приведены зависимости $H = h/h_0, G_1, G_2$ от φ, θ (при которых в куполе реализуется строго безмоментное напряженное состояние); подсчитанные по формулам (4.3) с учетом (4.4)–(4.12). Для определенности принято:

$$\begin{aligned} \theta = 0, \quad g(\varphi) = 0, \quad \varphi_1 = (3/8)\pi, \quad \alpha = 40^\circ, \quad \beta = 0^\circ, \quad p/q_0 = 0,5, \\ q_*/q_0 = 25, \quad m = 3, \quad \varphi_* = (7/16)\pi, \quad \nu = 0,3. \end{aligned}$$

Поскольку с учетом (4.10), (4.11) можно показать, что функции H, G_1, G_2 — четные по θ , то достаточно вычислить их значения при $0 \leq \theta \leq \pi$. Кривые 1–5 на фиг. 2, а, б соответствуют значениям $\theta = 0, \pi/4, \pi/2, (3/4)\pi, \pi$.

При $p = 0$ получим случай, когда купол находится под действием осесимметричной вертикальной нагрузки $q(\varphi)$ (4.8). Тогда из (4.3)–(4.6) получим

$$H = h/h_0 = -\frac{2(T_2 - \nu T_1)}{(1 - \nu)Rq_0} \exp \int_0^\varphi \left(1 + \frac{\nu T_2 - T_1}{T_2 - \nu T_1} \right) \operatorname{ctg} \varphi \, d\varphi, \quad G_1 = G_2 = 0,$$

т. е. материал купола должен быть изотропным, и безмоментность напряженного состояния обеспечивается только за счет изменения толщины. Усилия T_1, T_2 определяются по формулам (4.11) при $p = 0$. Зависимость $H(\varphi)$, подсчитанная в этом случае, показана на фиг. 3.

5. З а д а ч а 3. Пусть заданы: форма срединной поверхности, закон внешнего нагружения, толщина, жесткости G_k ($k = 4, \dots, N$) — предварительное армирование, углы ψ_n ($n = 1, \dots, N$), краевые условия типа (1.6)–(1.9). На части срединной поверхности или отдельных линиях заданы значения G_1, G_2, G_3 . Требуется определить законы изменения вдоль всей срединной поверхности жесткостей трех дополнительных семейств нитей, при которых напряженное состояние в рассматриваемой оболочке будет безмоментным.

Полагая, как и в задаче 2, что T_1, T_2, T_{12} известны из решения уравнений равновесия, представим соотношения упругости в виде

$$G_1 e_1 l_{11}^2 + G_2 e_2 l_{12}^2 + G_3 e_3 l_{13}^2 = T_1 (aEh)^{-1} - a''_{11} \varepsilon_1 - a''_{12} \varepsilon_2 - a''_{13} \varepsilon_3,$$

$$G_1 e_1 l_{21}^2 + G_2 e_2 l_{22}^2 + G_3 e_3 l_{23}^2 = T_2 (aEh)^{-1} - a''_{12} \varepsilon_1 - a''_{22} \varepsilon_2 - a''_{23} \varepsilon_3,$$

$$G_1 e_1 l_{11} l_{21} + G_2 e_2 l_{12} l_{22} + G_3 e_3 l_{13} l_{23} = T_{12} (aEh)^{-1} - a''_{13} \varepsilon_1 - a''_{23} \varepsilon_2 - a''_{33} \varepsilon_3,$$

где $e_m = \varepsilon_1 \cos^2 \psi_m + \varepsilon_2 \sin^2 \psi_m + \varepsilon_3 \sin \psi_m \cos \psi_m$, $m = 1, 2, 3$.

Отсюда находим

$$(5.1) \quad G_l = \Delta_l / \Delta \quad (l = 1, 2, 3),$$

где

$$\Delta = -\sin(\psi_1 - \psi_2) \sin(\psi_2 - \psi_3) \sin(\psi_3 - \psi_1); \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{12};$$

$$\Delta_l = \left\{ (aEh)^{-1} [T_1 l_{2m} l_{2t} + T_2 l_{1m} l_{1t} - T_{12} \sin(\psi_m + \psi_t)] - \sum_{\rho=1}^3 [a''_{1\rho} l_{2m} l_{2t} + \right.$$

$$\left. + a''_{2\rho} l_{1m} l_{1t} - a''_{3\rho} \sin(\psi_m + \psi_t)] \varepsilon_\rho \right\} \sin(\psi_m - \psi_t); \quad m, t=1, 2, 3; m \neq l; m \neq t.$$

Выражения для $a''_{11}, a''_{12}, \dots, a''_{33}$ получаются соответственно из формул (4.2) для $a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{33}$, если в последних вести суммирование по k , начиная с $k=4$; в выражении $\sin(\psi_m - \psi_t)$ в Δ_l значения для индексов m, t следует выбирать в том же порядке, в каком стоят индексы 1—3 в Δ .

Подставив значения для $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ из (2.1) в (5.1), получим выражения для G_1, G_2, G_3 через функции, заданные по условию задачи, и произвольные функции, входящие в общие решения $T_1, T_2, T_{12}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Таким образом, решение задачи 3 сводится к определению функций интегрирования из краевых условий и условий на G_1, G_2, G_3 . Перемещения определяются далее по формулам (2.5).

Рассмотрим случай, когда оболочка замкнута в окружном направлении, имеет гладкую вершину и на линии $\theta = \theta_0$ задано значение жесткости G_3 :

$$(5.2) \quad G_3(\varphi, \theta_0) = G(\varphi).$$

Тогда, учитывая зависимости (2.4), из выражения для G_3 в (5.1) получим

$$(5.3) \quad \varepsilon_1 = F - k\varepsilon_2 = F_0 - k_0\varepsilon_2,$$

где

$$F_0 = F(\varphi, \theta_0); \quad k_0 = k(\varphi, \theta_0); \quad k = (k_2 + m_2 G) \Delta_*; \quad \Delta_* = k_1 + m_1 G;$$

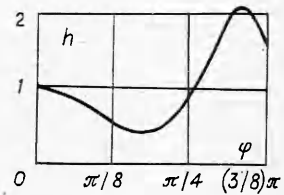
$$k_i = \sin(\psi_1 - \psi_3) \sin(\psi_2 - \psi_3) l_{i3};$$

$$F = (haE\Delta_*)^{-1} [T_1 l_{21} l_{22} + T_2 l_{11} l_{12} - T_3 \sin(\psi_1 + \psi_2)].$$

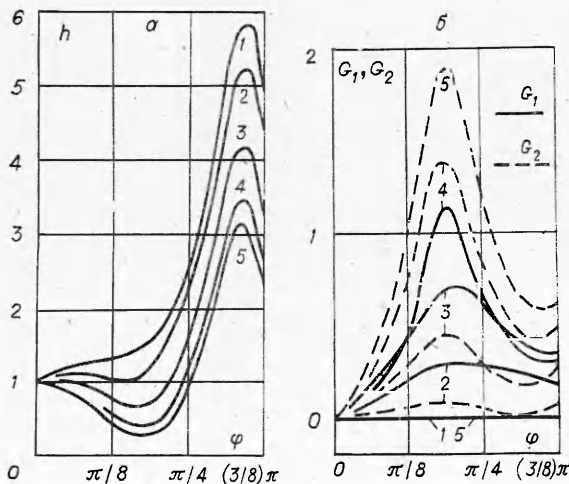
Из уравнений (5.3), (3.4) находим

$$(5.4) \quad \varepsilon_2 = \exp(-J) \int_0^\varphi \frac{1}{r} F_0 R_1 \cos \varphi \exp J d\varphi,$$

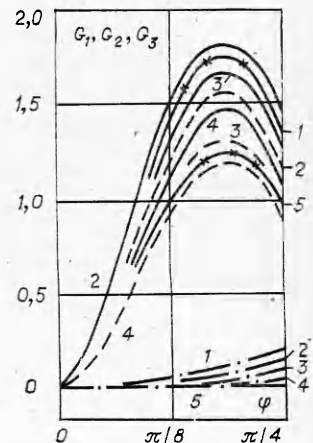
$$J = \int_0^\varphi \frac{1 + k_n}{r} R_1 \cos \varphi d\varphi.$$



Фиг. 3



Фиг. 2



Фиг. 4

Перемещения в куполе определяются по формулам (2.6). В качестве примера обратимся к сферическому куполу постоянной толщины, нагруженному и закрепленному в соответствии с зависимостями (4.4), (4.5). Примем, что предварительное армирование отсутствует ($N = 3$), что величины углов армирования ψ_1, ψ_2, ψ_3 постоянны и $G(\varphi) = 0$.

Значения G_1 (сплошные кривые), G_2 (штриховые), G_3 (штрихпунктирные), при которых в рассматриваемом куполе реализуется безмоментное состояние, подсчитанные по соотношениям (5.1)–(5.4), (4.11), приведены на фиг. 4. Кривые с крестиками отвечают случаю $G_1 = G_2$. При счете взято: $\theta_0 = \pi$, $\varphi_1 = \pi/4$, $\varphi_* = (7/16)\pi$, $p/q_0 = 0,5$, $q_*/q_0 = 15$, $m = 1$, $\nu = 0,3$, $\psi_1 = 60^\circ$, $\psi_2 = -60^\circ$, $\psi_3 = 90^\circ$. Кривые 1–5 соответствуют значениям $\theta = 0, \pi/4, \pi/2, (3/4)\pi, \pi$. Отметим также наличие равенств $G_1(\varphi, \theta) = G_2(\varphi, -\theta)$, $G_3(\varphi, \theta) = G_3(\varphi, -\theta)$.

Поступила 20 X 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Немировский Ю. В., Старостин Г. И. О возможности реализации безмоментного состояния оболочек путем армирования. — ДАН СССР, 1971, т. 196, № 4.
2. Немировский Ю. В., Старостин Г. И. Безмоментные упругие армированные оболочки нулевой гауссовой кривизны. — ПМТФ, 1975, № 6.
3. Немировский Ю. В., Старостин Г. И. Безмоментные армированные осесимметричные оболочки. — Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 3.
4. Повожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962.
5. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961.
6. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976.
7. Немировский Ю. В. Об упругопластическом поведении армированного слоя. — ПМТФ, 1969, № 6.

УДК 534.1

ИЗЛУЧЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ ДВИЖУЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ

С. В. Крысов, С. А. Сьянов

(Горький)

Излучение волн в среде равномерно движущимся источником заданной частоты Ω характеризуется эффектом Допплера [1] — смещением частоты излучаемых волн по сравнению с частотой источника. В случае $\Omega = 0$ явление излучения принимает форму эффекта Вавилова — Черенкова [2] и возможно лишь при условии, когда скорость движения источника превышает наименьшую фазовую скорость распространения волн в среде [3].

Указанные явления достаточно подробно изучены применительно к электродинамическим системам [4, 5]. Для упругих систем, где источником может служить движущееся локальное поле деформаций, вызванное, например, действием подвижной нагрузки, подобные явления даже в одномерном случае имеют свои особенности, обусловленные спецификой дисперсии упругих волн. Изучение этих особенностей приобретает особую важность из-за необходимости решения вопросов о возбуждении вибраций применительно к широкому кругу технических систем и устройств: силовых передач с гибкими связями, лентопротяжных и перемоточных механизмов [6], канатных подъемников, проката и волочения проволоки [7] и др.

В данной работе на примере изгибных колебаний стержня рассмотрены режимы возбуждения волн движущимся вибрирующим закреплением.

Рассмотрим однородный бесконечный стержень, вдоль которого с постоянной скоростью v движется втулка, совершающая периодическое с частотой Ω движение поворота относительно центра тяжести. Изгибные колебания стержня $U(x, t)$ в приближении технической теории [8] описываются уравнением

$$(1) \quad U_{tt} + \alpha^2 U_{xxxx} = 0$$

с условиями на подвижной опоре

$$(2) \quad U|_{x=-vt} = 0, \quad U_x|_{x=-vt} = \theta \cos \Omega t,$$