

УДК 539.3

НАПРЯЖЕНИЯ В УПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОЛОСТЯМИ, ОБРАЗУЮЩИМИ ГЕКСАГОНАЛЬНУЮ СТРУКТУРУ

А. Г. Николаев, Е. А. Танчик

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского,
61070 Харьков, Украина
E-mails: k405@d4.khai.edu, eug.tanchik@yandex.ru

Исследована краевая задача теории упругости для цилиндра с цилиндрическими полостями, образующими гексагональную структуру. Решение строится в виде суперпозиции точных базисных решений уравнения Ламе для цилиндра в системах координат, отнесенных к центрам поверхностей тела. Граничные условия задачи удовлетворяются точно с помощью обобщенного метода Фурье. Задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с фредгольмовым оператором в пространстве l_2 . Разрешающая система решена численно методом редукции. Проведен численный анализ напряжений в областях их наибольшей концентрации.

Ключевые слова: краевая задача, многосвязное тело, обобщенный метод Фурье, гексагональная структура, цилиндрические полости, теоремы сложения.

DOI: 10.15372/PMTF20160623

Введение. Краевые задачи теории упругости для многосвязных тел используются при моделировании напряженно-деформированного состояния в пористых и композиционных материалах. Для случая, когда число границ многосвязного тела $N \geq 3$, практически отсутствуют эффективные методы их решения.

В работах [1, 2] с использованием метода Фурье получены решения краевых задач теории упругости для бесконечного цилиндра. Задачи для полубесконечного и конечного цилиндров исследованы в [3–5] с помощью различных модификаций метода Фурье. В работе [6] предложен метод определения напряженного состояния конечного цилиндра, основанный на принципе суперпозиции и разложении тензора напряжений в ряды Фурье и Бесселя — Дини. Задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. В [7] с помощью асимптотических методов анализируется поведение решений краевых задач теории упругости для пространства с тонким цилиндрическим включением или полостью. В работах [8, 9] решения задач термоупругости для бесконечного цилиндра построены в виде разложений в степенные ряды, ряды Фурье, ряды Фурье — Бесселя. В [10] получено аналитическое решение задачи упругости для перемещений, напряжений и энергии упругой деформации трансверсально-изотропного стержня с цилиндрическим включением с осесимметричными собственными деформациями. В работе [11] с помощью обобщенного метода Фурье исследовано распределение напряжений в цилиндре с двумя

цилиндрическими включениями. Обобщенный метод Фурье разработан в [12], в [13] метод применялся для решения двусвязных задач.

В настоящей работе приводится численно-аналитическое решение неосесимметричной краевой задачи теории упругости для многосвязного тела в форме цилиндра с цилиндрическими полостями.

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечный упругий цилиндр Ω_0 , содержащий N цилиндрических полостей Ω_j ($j = 1 \div N$), оси которых параллельны оси цилиндра. Обозначим через O_j ($j = 0 \div N$) точки, принадлежащие осям исходного цилиндра и полостей и расположенные в плоскости, перпендикулярной образующей цилиндра. Полагается, что точки O_j ($j = 1 \div N$) образуют регулярную структуру: тетрагональную, гексагональную или другую (рис. 1). Расстояние между любыми двумя ближайшими точками O_j предполагается равным $2a$.

Будем использовать одинаково ориентированные цилиндрические системы координат (ρ_j, φ_j, z_j) с началом в точках O_j ($j = 0 \div N$). Радиусы цилиндров Ω_j равны R_j , границы цилиндров Γ_j описываются уравнениями $\rho_j = R_j$, полости расположены внутри исходного цилиндра и их границы не пересекаются.

Рассмотрим первую краевую задачу теории упругости для указанной области. Будем полагать, что к внешней границе приложена нагрузка, которая допускает представление в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда и интеграла

$$f(\varphi_0, z_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f_{x,m}(\lambda)e_x + f_{y,m}(\lambda)e_y + f_{z,m}(\lambda)e_z] e^{i\lambda z_0 + im\varphi_0} d\lambda$$

(e_x, e_y, e_z — орты декартовой системы координат, сонаправленной с введенными цилиндрическими системами координат), поверхности полостей свободны от усилий. Считает-

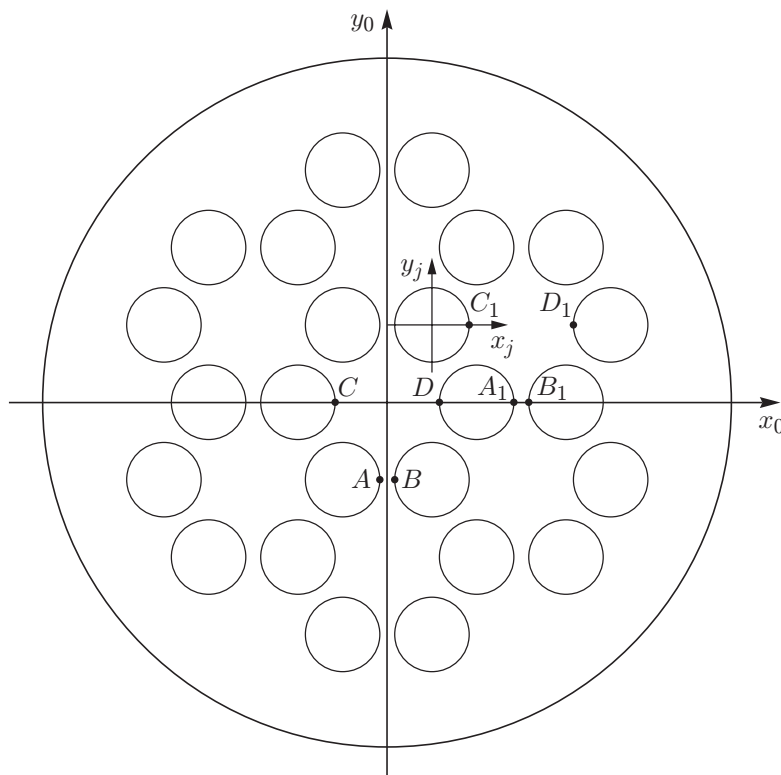


Рис. 1. Схема задачи

ся, что вектор-функция \mathbf{f} удовлетворяет статическим условиям на поверхности $\rho_0 = R_0$ и обеспечивает конечность энергии деформации рассматриваемого тела.

Вектор упругих перемещений удовлетворяет краевой задаче для уравнения Ламе

$$\nabla^2 \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

и следующим граничным условиям:

— на внешней границе

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_0} = \mathbf{f}(\varphi_0, z_0); \quad (2)$$

— на границе полостей

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = 0 \quad (3)$$

(\mathbf{U} — вектор перемещений; $\mathbf{F}\mathbf{U}$ — соответствующий ему вектор напряжений; σ — коэффициент Пуассона). Полагается также, что вектор упругих перемещений удовлетворяет условию регулярности на бесконечности

$$\mathbf{U} \sim \frac{1}{|z|}, \quad z \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Условие (4) обеспечивает конечность энергии деформации рассматриваемого тела, что в свою очередь гарантирует единственность решения краевой задачи.

2. Решение задачи. Общее решение краевой задачи (1)–(3) в области $\Omega_0 \setminus \bigcup_{j=1}^N \Omega_j$

будем искать в виде суперпозиции базисных решений уравнения Ламе для цилиндра в системах координат, отнесенных к центрам включений:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = & \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(j)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda + \\ & + \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_0, \varphi_0, z_0) d\lambda, \end{aligned}$$

где $A_{s,m}^{(j)}(\lambda)$ — неизвестные функции; $\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z)$ — базисные решения уравнения Ламе для цилиндра (знак “+” соответствует решению внешней задачи, знак “–” — внутренней задачи) [12]. В работе [14] введено понятие базисности системы решений уравнения Ламе и доказана базисность систем $\{\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}\}_{s=1,m=-\infty,\lambda=-\infty}^{3,\infty,\infty}$, $\{\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}\}_{s=1,m=-\infty,\lambda=-\infty}^{3,\infty,\infty}$.

Запишем эти решения в явном виде

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \lambda^{-1} \mathbf{D}_s u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z), \quad s = 1 \div 3, \quad (5)$$

где

$$\mathbf{D}_1 = \nabla, \quad \mathbf{D}_2 = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla - \chi [\mathbf{e}_z \times [\nabla \times \mathbf{e}_z]], \quad \mathbf{D}_3 = i[\nabla \times \mathbf{e}_z],$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z,$$

$$u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho, \varphi, z) = e^{i\lambda z + im\varphi} \tilde{K}_m(\lambda\rho), \quad u_{\lambda,m}^{-(3)}(\rho, \varphi, z) = e^{i\lambda z + im\varphi} I_m(\lambda\rho),$$

$I_m(x)$ — модифицированная функция Бесселя; $\tilde{K}_m(x) = (\text{sign } x)^m K_m(|x|)$; $K_m(x)$ — функция Макдональда; $\chi = 3 - 4\sigma$; $u_{\lambda,m}^{\pm(3)}$ — полный набор частных решений уравнения Лапласа в цилиндрических координатах; i — мнимая единица.

Выражения для напряжений, соответствующие базисным решениям (5), на площадке с нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\rho$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{U}_{1,\lambda,m}^{\pm(3)} &= \frac{2G}{\rho} \left(\mp Du_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_{-1} \mp Du_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_1 + iDu_{\lambda,m}^{\pm(3)} \mathbf{e}_0 \right), \\ \mathbf{F}\mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{\pm(3)} &= \frac{2G}{\rho} \left\{ \mp [(m-1)(m-1+2\sigma) + \lambda^2\rho^2 + (2\sigma-3)D]u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_{-1} \mp \right. \\ &\quad \left. \mp [(m+1)(m+1-2\sigma) + \lambda^2\rho^2 + (2\sigma-3)D]u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_1 + \right. \\ &\quad \left. + i[m^2 + \lambda^2\rho^2 + (2\sigma-2)D]u_{\lambda,m}^{\pm(3)} \mathbf{e}_0 \right\}, \\ \mathbf{F}\mathbf{U}_{3,\lambda,m}^{\pm(3)} &= \frac{G}{\rho} \left[\pm (D+m-1)u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_{-1} \mp (D-m-1)u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} \mathbf{e}_1 - imu_{\lambda,m}^{\pm(3)} \mathbf{e}_0 \right], \end{aligned}$$

где $D = \rho \partial / \partial \rho$; $\mathbf{e}_{-1} = (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)/2$; $\mathbf{e}_1 = (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)/2$; $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z$; G — модуль сдвига.

3. Теоремы сложения. Для базисных решений уравнения Лапе в системах координат, совмещенных с центрами пары цилиндров, справедливы следующие теоремы сложения [12]:

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(j\alpha)} f_{1,\lambda,m}^{(33)l,j,\alpha} \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_\alpha, \varphi_\alpha, z_\alpha); \quad (6)$$

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(j\alpha)} f_{\lambda,m}^{+(33)l,j,\alpha} \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{+(3)}(\rho_\alpha, \varphi_\alpha, z_\alpha); \quad (7)$$

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(j\alpha)} f_{\lambda,m}^{-(33)l,j,\alpha} \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_\alpha, \varphi_\alpha, z_\alpha); \quad (8)$$

$$f_{1,\lambda,m}^{(33)l,j,\alpha} = (-1)^l u_{\lambda,m-l}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}, z_{j\alpha}), \quad f_{\lambda,m}^{\pm(33)l,j,\alpha} = u_{\lambda,m-l}^{-(3)}(\rho_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}, z_{j\alpha}),$$

$$\tilde{D}_{s,t}^{(j\alpha)} = \left(\delta_{st} + \delta_{t1} \delta_{s2} \rho_{j\alpha} \frac{\partial}{\partial \rho_{j\alpha}} \right), \quad j \neq \alpha,$$

где $(\rho_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}, z_{j\alpha})$ — цилиндрические координаты точки O_α в системе координат (ρ_j, φ_j, z_j) ; δ_{st} — дельта-символ Кронекера.

4. Разрешающая система уравнений. Используя теоремы сложения (6)–(8), представим вектор перемещения \mathbf{U} в системе координат с началом в точке O_0 :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(j)}(\lambda) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{m-l} \tilde{D}_{s,t}^{(j0)} u_{\lambda,m-l}^{-(3)}(\rho_{j0}, \varphi_{j0}, z_{j0}) \times \\ &\quad \times \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{+(3)}(\rho_0, \varphi_0, z_0) d\lambda + \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_0, \varphi_0, z_0) d\lambda \end{aligned}$$

и с началом в точке O_j ($j = 1 \div N$):

$$\begin{aligned}
 U = & \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(j)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda + \sum_{\alpha \neq j}^3 \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) \times \\
 & \times \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \tilde{D}_{s,t}^{(\alpha j)} u_{\lambda,m-l}^{+(3)}(\rho_{\alpha j}, \varphi_{\alpha j}, z_{\alpha j}) \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda + \\
 & + \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(0j)} u_{\lambda,m-l}^{-(3)}(\rho_{0j}, \varphi_{0j}, z_{0j}) \mathbf{U}_{t,\lambda,l}^{-(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda.
 \end{aligned}$$

После удовлетворения граничных условий задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A_{s,m}^{(j)}(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s=1}^3 \left(A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_0) + \right. \\
 & \left. + \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R_0) \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{l-m} A_{t,l}^{(j)}(\lambda) \tilde{D}_{t,s}^{(j0)} u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{j0}, \varphi_{j0}, z_{j0}) \right) = \\
 & = (f_{x,m-1}(\lambda) - if_{y,m-1}(\lambda), f_{x,m+1}(\lambda) + if_{y,m+1}(\lambda), f_{z,m}(\lambda)); \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s=1}^3 \left(A_{s,m}^{(j)}(\lambda) \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R_j) + \right. \\
 & \left. + \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_j) \sum_{\alpha \neq j}^3 \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(\alpha)}(\lambda) (-1)^m \tilde{D}_{t,s}^{(\alpha j)} u_{\lambda,l-m}^{+(3)}(\rho_{\alpha j}, \varphi_{\alpha j}, z_{\alpha j}) + \right. \\
 & \left. + \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_j) \sum_{t=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{t,l}^{(0)}(\lambda) \tilde{D}_{t,s}^{(0j)} u_{\lambda,l-m}^{-(3)}(\rho_{0j}, \varphi_{0j}, z_{0j}) \right) = 0; \quad (10) \\
 & j = 1 \div N, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(R) &= (G_{s,\lambda,m}^{\pm(-1)}, G_{s,\lambda,m}^{\pm(1)}, G_{s,\lambda,m}^{\pm(0)}), \\
 G_{1,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R) &= \mp \frac{2G}{R} D \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R), \quad G_{1,\lambda,m}^{\pm(1)}(R) = \pm \frac{2G}{R} D \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R), \\
 G_{1,\lambda,m}^{\pm(0)}(R) &= \frac{2G}{R} i D \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R), \quad G_{3,\lambda,m}^{\pm(0)}(R) = -\frac{G}{R} i m \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R), \\
 G_{3,\lambda,m}^{\pm(1)}(R) &= \mp \frac{G}{R} (D - m - 1) \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R), \quad G_{3,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R) = \pm \frac{G}{R} (D + m - 1) \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R), \\
 G_{2,\lambda,m}^{\pm(0)}(R) &= \frac{2G}{R} i [m^2 + \lambda^2 R^2 + (2\sigma - 2)D] \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R), \\
 G_{2,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R) &= \mp \frac{2G}{R} [(m-1)(m-1+2\sigma) + \lambda^2 R^2 + (2\sigma-3)D] \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R),
 \end{aligned}$$

$$G_{2,\lambda,m}^{\pm(1)}(R) = \mp \frac{2G}{R} [(m+1)(m+1-2\sigma) + \lambda^2 R^2 + (2\sigma-3)D] \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R),$$

$$\tilde{u}_{\lambda,m}^{+(3)}(R) = \tilde{K}_m(\lambda R), \quad \tilde{u}_{\lambda,m}^{-(3)}(R) = I_m(\lambda R).$$

5. Анализ разрешающей системы. Исследуем свойства разрешающей системы уравнений.

Теорема. При любом $\lambda \neq 0$ оператор системы (9), (10) является фредгольмовым в гильбертовом пространстве l_2 при выполнении условий $R_j + R_\alpha < \rho_{j\alpha}$ ($j \neq \alpha$; $j, \alpha = 1 \div N$), $\rho_{0\alpha} + R_\alpha < R_0$ ($\alpha = 1 \div N$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Путем переобозначения неизвестных функций

$$A_{s,m}^{(j)}(\lambda) = \frac{\tilde{A}_{s,m}^{(j)}(\lambda)}{K_m(|\lambda|R_j)} \quad (j = 1 \div N), \quad A_{s,m}^{(0)}(\lambda) = \frac{\tilde{A}_{s,m}^{(0)}(\lambda)}{I_m(\lambda R_0)}$$

и решения системы относительно $\tilde{A}_{s,m}^{(j)}(\lambda)$ систему (9), (10) представим в виде

$$\tilde{A}_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) + \sum_{j \neq \alpha} \sum_{p=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} T_{1,\alpha,s,m}^{j,p,l} \tilde{A}_{p,l}^{(j)}(\lambda) + \sum_{p=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} T_{2,\alpha,s,m}^{p,l} \tilde{A}_{p,l}^{(0)}(\lambda) = 0; \quad (11)$$

$$\tilde{A}_{s,m}^{(0)}(\lambda) + \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^3 \sum_{l=-\infty}^{\infty} T_{3,s,m}^{j,p,l} \tilde{A}_{p,l}^{(j)}(\lambda) = F_{s,m}(\lambda). \quad (12)$$

Выражения для матричных коэффициентов не приводятся в силу их громоздкости. Модули матричных коэффициентов $|T_{1,\alpha,s,m}^{j,p,l}|$, $|T_{2,\alpha,s,m}^{p,l}|$, $|T_{3,s,m}^{j,p,l}|$ оцениваются сверху конечными линейными комбинациями выражений вида

$$\left| \frac{I_m(\lambda R_\alpha)}{K_l(|\lambda|R_j)} K_{m-l}(|\lambda|\rho_{j\alpha}) \right|; \quad (13)$$

$$\left| \frac{I_m(\lambda R_\alpha)}{I_l(\lambda R_0)} I_{m-l}(|\lambda|\rho_{0\alpha}) \right|; \quad (14)$$

$$\left| \frac{K_m(|\lambda|R_0)}{K_l(|\lambda|R_j)} I_{m-l}(\lambda \rho_{j0}) \right|. \quad (15)$$

При этом используются оценки определителей разрешающих систем внутренней и внешней первых краевых задач теории упругости для цилиндра, полученные в работе [14].

Для доказательства теоремы достаточно показать, что для матричных коэффициентов системы (11), (12) выполняются следующие условия:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |T_{1,\alpha,s,m}^{j,p,l}|^2 < \infty, \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |T_{2,\alpha,s,m}^{p,l}|^2 < \infty, \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |T_{3,s,m}^{j,p,l}|^2 < \infty.$$

Рассмотрим теорему сложения гармонических функций [13]:

$$u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l u_{\lambda,m-l}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}, z_{j\alpha}) u_{\lambda,l}^{-(3)}(\rho_\alpha, \varphi_\alpha, z_\alpha). \quad (16)$$

Разложение (16) можно интерпретировать как представление функции $u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j)$ в виде ряда Фурье по переменной $\varphi_\alpha \in [0, 2\pi]$. Тогда для этого разложения справедливо равенство Парсеваля

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} |K_{m-l}(|\lambda|\rho_{j\alpha})|^2 |I_l(\lambda \rho_\alpha)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K_m(|\lambda|\rho_j)|^2 d\varphi_\alpha. \quad (17)$$

В силу (13)–(15) для доказательства теоремы достаточно показать сходимость рядов

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| \frac{I_m(\lambda R_\alpha)}{K_l(|\lambda| R_j)} K_{m-l}(|\lambda| \rho_{j\alpha}) \right|^2; \quad (18)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| \frac{I_m(\lambda R_\alpha)}{I_l(\lambda R_0)} I_{m-l}(|\lambda| \rho_{0\alpha}) \right|^2, \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| \frac{K_m(|\lambda| R_0)}{K_l(|\lambda| R_j)} I_{m-l}(\lambda \rho_{j0}) \right|^2. \quad (19)$$

В работе [14] доказана оценка

$$I_m(z) K_m(z) > \frac{c}{m^2 + 1} (1 + 2z)^{-1}, \quad m \geq 0, \quad z > 0, \quad (20)$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная. Тогда ряд (18) можно мажорировать рядом

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |I_l(\lambda R_\alpha) I_m(\lambda R_j) K_{m-l}(|\lambda| \rho_{j\alpha})|^2.$$

Подставим в тождество (17) $\rho_\alpha = R_\alpha$, затем умножим обе его части на $|I_m(\lambda R_j)|^2$ и просуммируем по m от $-\infty$ до ∞ . В результате получаем

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |I_l(\lambda R_\alpha) I_m(\lambda R_j) K_{m-l}(|\lambda| \rho_{j\alpha})|^2 &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} |I_m(\lambda R_j)|^2 |K_m(|\lambda| \rho_j)|^2 \Big|_{\rho_\alpha=R_\alpha} d\varphi_\alpha. \end{aligned} \quad (21)$$

При $m \rightarrow \infty$ из асимптотических формул

$$I_m(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^m \frac{1}{m!} [1 + O(m^{-1})]; \quad (22)$$

$$K_m(z) = \frac{2^{m-1}(m-1)!}{z^m} [1 + O(m^{-1})] \quad (23)$$

следует, что в левой части (21) ряд сходится при условии $\rho_j > R_j$. Определим минимальное значение ρ_j^{\min} при произвольных значениях угла φ_α . Из соотношений между цилиндрическими координатами в системах с началами O_j и O_α следует, что при $\rho_\alpha = R_\alpha$

$$\rho_j = \sqrt{\rho_{j\alpha}^2 + R_\alpha^2 + 2\rho_{j\alpha}R_\alpha \cos(\varphi_\alpha - \varphi_{j\alpha})}$$

и при условии $\varphi_\alpha - \varphi_{j\alpha} = \pi$ ρ_j принимает минимальное значение: $\rho_j^{\min} = \rho_{j\alpha} - R_\alpha$ ($\rho_{j\alpha} > R_\alpha$ — естественное геометрическое условие в постановке задачи).

Таким образом, условие сходимости ряда выполняется при $\rho_j^{\min} > R_j$. Это означает, что $R_j + R_\alpha < \rho_{j\alpha}$.

Справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |K_m(|\lambda| R_0) I_l(\lambda R_\alpha) I_{m-l}(\lambda \rho_{0\alpha})|^2 &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} |K_m(|\lambda| R_0)|^2 |I_m(\lambda \rho_0)|^2 \Big|_{\rho_\alpha=R_\alpha} d\varphi_\alpha. \end{aligned} \quad (24)$$

В силу асимптотик (22), (23) ряд в формуле (24) сходится при условии $\rho_0 < R_0$. На поверхности $\rho_\alpha = R_\alpha$ справедливо равенство $\rho_0^{\max} = \rho_{0\alpha} + R_\alpha$, поэтому условием сходимости ряда (24) является неравенство $\rho_0^{\max} < R_0$ или $\rho_{0\alpha} + R_\alpha < R_0$.

В силу (20) при $\rho_{0j} + R_j < R_0$ сходимость ряда (19) следует из сходимости ряда (24).

6. Анализ результатов численных расчетов. При численной реализации задачи будем полагать, что к границе цилиндра приложена кусочно-постоянная нормальная нагрузка

$$FU|_{\Gamma_0} = Te_\rho = \begin{cases} T, & |z| \leq h/2, \\ 0, & |z| > h/2, \end{cases} \quad (25)$$

и выберем следующие значения параметров: $R_j = R, R_0 = 10R, \sigma = 0,38$. Рассмотрим гексагональную упаковку из $N = 24$ цилиндрических полостей, расположенных симметрично относительно оси цилиндра (см. рис. 1).

Система (9), (10) решается численно методом редукции по параметру m ($-m_{\max} \leq m \leq m_{\max}$) при фиксированных значениях λ , которые являются узлами квадратурной формулы Лагерра.

На рис. 2–5 по горизонтальной оси откладывается безразмерная переменная \bar{x} , изменяющаяся в диапазоне $[0, 1]$. При этом значению $\bar{x} = 0$ соответствует левый конец рассматриваемого отрезка, $\bar{x} = 1$ — правый. Так, для отрезка AB имеем $\bar{x} = (x_0 - x_0(A))/(x_0(B) - x_0(A))$ (см. рис. 1).

На рис. 2 показана зависимость напряжения σ_z/T на линиях AB и A_1B_1 (см. рис. 1) от координаты \bar{x} . Для неосесимметрично расположенной ячейки характерна асимметрия распределения напряжений относительно средней точки линии.

На рис. 3 показана зависимость напряжения σ_x/T на линиях CD и C_1D_1 (см. рис. 1) от координаты \bar{x} . При одинаковом характере распределения напряжений наблюдается их асимметрия в нецентральной ячейке.

На рис. 4 приведены распределения напряжений σ_y/T при различном числе ячеек в гексагональной упаковке. Видно, что при сохранении характера распределений значения напряжений различаются приблизительно на 22 %.

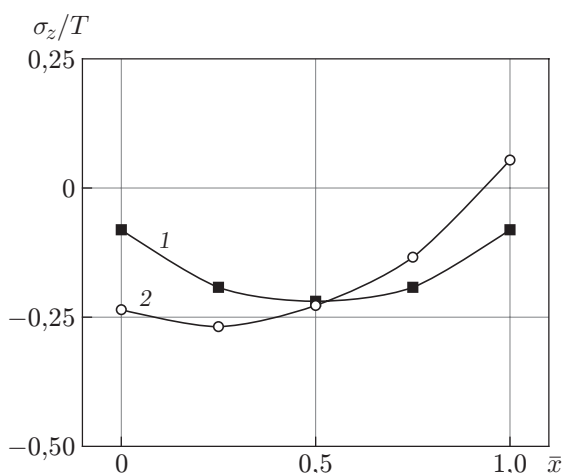


Рис. 2

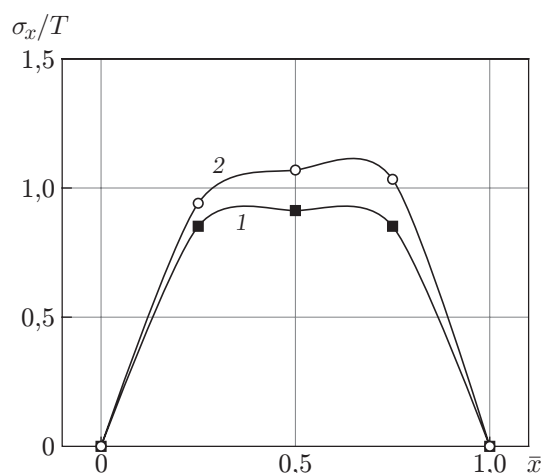


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость напряжения σ_z/T на линиях AB (1), A_1B_1 (2) от координаты \bar{x} при $h/R_0 = 1,0, z = 0, \sigma = 0,38, a/R = 1,5$

Рис. 3. Зависимость напряжения σ_x/T на линиях CD (1), C_1D_1 (2) от координаты \bar{x} при $h/R_0 = 1,0, z = 0, \sigma = 0,38, a/R = 1,5$

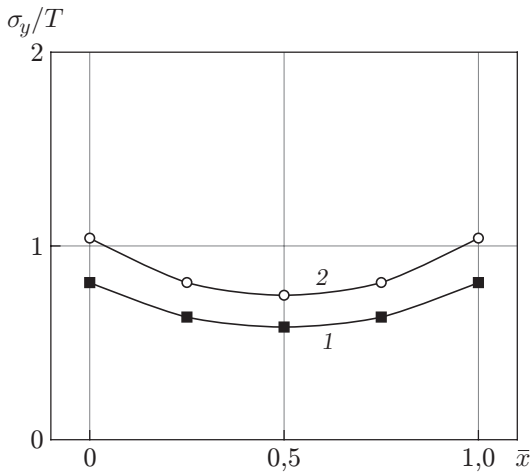


Рис. 4

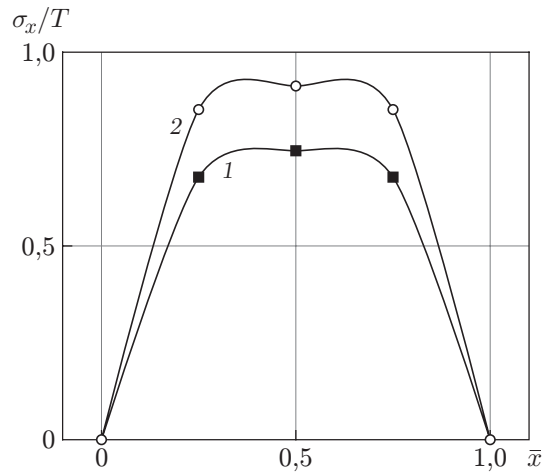


Рис. 5

Рис. 4. Зависимость напряжения σ_y/T на линии CD для шести (1) и 24 (2) полостей от координаты \bar{x} при $h/R_0 = 1,0$, $a/R = 1,2$, $\sigma = 0,38$

Рис. 5. Зависимость напряжения σ_x/T на линии CD от расстояния между полостями при $h/R_0 = 1,0$, $z = 0$, $\sigma = 0,38$:
 1 — $a/R = 1,2$, 2 — $a/R = 1,5$

Скорость сходимости метода редукиции

m_{\max}	σ_x/T	σ_y/T	σ_z/T
5	0,433 497	1,984 85	-0,222 608
8	0,441 706	1,992 29	-0,219 189
10	0,441 673	1,992 30	-0,219 197

На рис. 5 представлена зависимость напряжения σ_x/T от расстояния между полостями в ячейке.

Об эффективности предложенной методики свидетельствует скорость сходимости метода редукиции (см. таблицу). В таблице приведены зависимости значений нормальных компонент тензора напряжений в средней точке линии AB , соединяющей центры соседних полостей, от размера редуцируемой системы при $a/R = 1,5$, $h/R_0 = 1,0$.

Следует отметить, что структура предложенного решения обеспечивает его бесконечную гладкость внутри области. При этом перемещения непрерывны до границы, а их первые производные в пределе, когда внутренние точки области стремятся к границе, имеют разрыв на линиях $|z| = h/2$ [14, 15].

Заключение. Предложен эффективный метод численно-аналитического решения неосесимметричной краевой задачи теории упругости для многосвязного тела в форме цилиндра с цилиндрическими полостями, образующими гексагональную упаковку. Решение строится в виде суперпозиции точных базисных решений уравнения Ламе для цилиндра в системах координат, отнесенных к центрам граничных поверхностей тела. Граничные условия задачи удовлетворяются точно с помощью обобщенного метода Фурье. В результате исходная задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, оператор которой является фредгольмовым в гильбертовом пространстве l_2 . Это позволяет применять при численном решении системы метод редукиции. При $m_{\max} \rightarrow \infty$ решение редуцированной системы сходится к точному решению разрешающей системы. Исследование скорости сходимости метода редукиции свидетельствует об эффективности предложенной

методики. Проведен численный анализ напряжений в зонах их наибольшей концентрации. О достоверности полученных результатов свидетельствуют данные сравнения двух случаев: цилиндров с 24 и 6 цилиндрическими полостями.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Валов Г. М.** Об осесимметричной деформации сплошного кругового цилиндра конечной длины // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, вып. 4. С. 650–667.
2. **Прокопов В. К.** Осесимметричная задача теории упругости для изотропного цилиндра // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1950. № 2. С. 286–304.
3. **Гомилко А. М., Гринченко В. Т., Мелешко В. В.** Однородные решения в задаче о равновесии упругого цилиндра конечной длины // Теорет. и прикл. механика. 1989. № 20. С. 3–9.
4. **Гринченко В. Т.** Осесимметричная задача теории упругости для полубесконечного кругового цилиндра // Прикл. механика. 1965. Т. 1, № 1. С. 109–119.
5. **Гринченко В. Т.** Осесимметричная задача теории упругости для толстостенного цилиндра конечной длины // Прикл. механика. 1967. Т. 3, № 8. С. 93–103.
6. **Meleshko V. V., Tokovyy Yu. V.** Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loadings // J. Engng Math. 2013. V. 78. P. 143–166.
7. **Арутюнян Н. Х., Мовчан А. Б., Назаров С. А.** Поведение решений задач теории упругости в неограниченных областях с параболаидальными и цилиндрическими включениями или полостями // Успехи механики. 1987. Т. 10, № 4. С. 3–91.
8. **Vihak V. M., Yasinskyu A. V., Tokovyy Yu. V., Rychahivskyu A. V.** Exact solution of the axisymmetric thermoelasticity problem for a long cylinder subjected to varying with-respect-to-length loads // J. Mech. Behaviour Mater. 2007. N 18. P. 141–148.
9. **Williams D. K., Ranson W. F.** Pipe-anchor discontinuity analysis utilizing power series solutions, Bessel functions, and Fourier series // Nucl. Engng Design. 2003. N 220. P. 1–10.
10. **Zhong Z., Sun Q. P.** Analysis of a transversely isotropic rod containing a single cylindrical inclusion with axisymmetric eigenstrains // Intern. J. Solids Structures. 2002. V. 39, iss. 23. P. 5753–5765.
11. **Николаев А. Г., Танчик Е. А.** Напряженное состояние в цилиндрическом образце с двумя параллельными цилиндрическими волокнами // Авиац.-косм. техника и технология. 2013. № 6. С. 32–38.
12. **Николаев А. Г.** Теоремы сложения решений уравнения Ламе / Харьк. авиац. ин-т. Харьков, 1993. Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, № 1178-Ук 93.
13. **Николаев А. Г.** Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости / А. Г. Николаев, В. С. Проценко. Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т, 2011.
14. **Николаев А. Г.** Обоснование метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей // Докл. НАН Украины. 1998. № 2. С. 78–83.
15. **Николаев А. Г.** Классы разрешимости методом Фурье основных краевых задач теории упругости для некоторых пространственных канонических областей / Харьк. авиац. ин-т. Харьков, 1996. Деп. в ГНТБ Украины 23.10.96, № 1977-Ук 96.
16. **Канторович Л. В.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. М.: Наука, 1977.

*Поступила в редакцию 18/IX 2014 г.,
в окончательном варианте — 2/X 2015 г.*