

РАЗДЕЛ VI КОНКРЕТНЫЕ МЕТОДИКИ И ИННОВАЦИИ В ПРАКТИКЕ ОБРАЗОВАНИЯ

Part VI. SPECIFIC METHODS AND INNOVATIONS IN THE PRACTICE OF EDUCATION

Философия образования. 2022. Т. 22, № 4

Philosophy of Education, 2022, vol. 22, no. 4

Научная статья

УДК 372.016:51+165+13

DOI: 10.15372/PHE20220410

Преподавание математики: эпистемологический анализ проблем

Вертгейм Лев Борисович^{1,2}

¹Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия, LevVertgeim@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7581-7451>

²Новосибирский государственный педагогический университет, Новосибирск, Россия

Аннотация. *Введение.* Задачи достижения Россией технологического суверенитета обуславливают острую необходимость подготовки математически образованных ученых и инженеров. Статья призвана внести вклад в обсуждение путей исправления ситуации с математическим образованием. Акцентируется тезис, что простое возвращение к идеям и методам математического образования в СССР не решит проблемы, поскольку изменились задачи математики, области ее приложений, общественные и культурные ценности, ученики и их преподаватели. Это требует обсуждения некоторых идей относительно динамики движения математического знания. Цели настоящей статьи – проанализировать состояние, в котором находится преподавание математики в школах и вузах, выявить проблемы современного образования и очертить перспективы их решения. *Методология.* Необходимость расширения контекста обсуждаемой темы потребовала выхода на общефилософские вопросы о всеобщих механизмах и закономерностях познавательной деятельности человека в рамках эпистемологического подхода в понимании математики независимо от ее конкретных форм и видов. Для этого в рамках изучения научной и методической литературы применяются методы исторического и сравнительного анализа. *Обсуждение.* С точки зрения эпистемологического подхода раскрыты вопросы конструктивного расширения знания о математическом образовании и связи его характерных черт с онтологией социального познания. Раскрыты роль и значение «человеческого измерения математического материала». *Заключение.* В ходе обсуждения эпистемологии образования как методологического регулятива для разработки алгоритмов доказательных рассуждений и оживления «сухой» математической реально-

сти разработаны необходимые положения для конструктивного расширения знания о математическом образовании в связи с онтологией социального и индивидуального познания.

Ключевые слова: преподавание математики, цель, смысл, мотивация, эпистемология образования, теория познания

Для цитирования: Вертгейм Л. Б. Преподавание математики: эпистемологический анализ проблем // Философия образования. 2022. Т. 22, № 4. С. 134–151. DOI: <https://doi.org/10.15372/PHE20220410>

Scientific article

Teaching mathematics: epistemological analysis of problems

Lev B. Vertgeim^{1,2}

¹Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia, LevVertgeim@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7581-7451>

²Novosibirsk State Pedagogical University, Novosibirsk, Russia, LevVertgeim@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7581-7451>

Abstract. *Introduction.* The task of Russia's achieving technological sovereignty is connected with the necessity of training of mathematically educated scientists and engineers. This paper is intended to contribute to the discussion of ways to correct the situation with mathematical education. The thesis is emphasized that a simple return to the ideas and methods of mathematical education in the USSR will not solve the problem, since the tasks of mathematics, the areas of its applications have changed, social and cultural values have changed, students and their teachers have changed. All this requires discussion of some ideas regarding the dynamics of the movement of mathematical knowledge. The purpose of this paper is to analyze the current state of mathematics teaching in schools and universities, to identify the problems of modern education and outline the prospects for their solution. *Methodology.* The need to expand the context of the topic under discussion required access to general philosophical questions about the universal mechanisms and patterns of human cognitive activity within the epistemological approach to understanding mathematics, regardless of its specific forms and types. For this purpose, the methods of historical and comparative analysis are used in the study of scientific and methodological literature. *Discussion.* From the point of view of the epistemological approach, the issues of constructive expansion of knowledge about mathematical education and the connection of its characteristic features with the ontology of social cognition are revealed. The role and significance of the "human dimension of mathematical material" are revealed. *Conclusion.* Recognizing the epistemology of education as a methodological regulator in the development of algorithms for evidence-based reasoning and the desire to revive, spiritualize the "dry" mathematical reality, the necessary provisions have been developed for the constructive expansion of knowledge about mathematical education in connection with the ontology of social and individual cognition.

Keywords: teaching mathematics, purpose, meaning, motivation, epistemology of education, theory of cognition

For citation: Vertgeim L. B. Teaching mathematics: epistemological analysis of problems. *Philosophy of Education*, 2022, vol. 22, no. 4. pp. 134–151. DOI: <https://doi.org/10.15372/PNE20220410>

Введение. Преподавание математики всегда занимало важное место в системе обучения. Вспомним, например, табличку с надписью: «Не знающий геометрии да не войдет!» над входом в Академию Платона. В Средние века «квадриум» дисциплин включал арифметику (которая считалась базовой дисциплиной) и геометрию, а также астрономию и музыку (которые также являлись близкими к математике дисциплинами). Римский философ Боэций писал: «Какую же из дисциплин нужно изучать первой, если не ту, что является началом и выполняет как бы роль матери по отношению к другим? Такова как раз арифметика». Если мы вспомним классическое гимназическое образование в России, то математика (наряду с древними языками) считалась «главным предметом». В школах советского периода математика также играла одну из самых главных ролей. В настоящее время необходимо осознать роль математики в процессе обучения школьников и студентов с учетом того, как стремительно изменяется окружающий мир, общество, культура и сами обучающиеся [1–3].

Преподаватели вузов отмечают ухудшение уровня школьной подготовки по математике среди первокурсников и озабочены решением этой проблемы [4]. Работодатели и все, кто начинает работать с выпускниками вузов, также указывают на снижение математической грамотности молодых людей. В связи с этим необходимо искать причины накопившихся проблем и подходы к их решению через поиск новых форм знания о математике.

Методология. Обзор научной и методической литературы о новых формах познания в математике осуществлялся с помощью методологии исторического и сравнительного анализа. Необходимость расширения контекста обсуждаемой темы потребовала выхода на общефилософские вопросы о всеобщих механизмах и закономерностях познавательной деятельности человека в рамках эпистемологического подхода, где выделяют основные категории эпистемологической системы: «объект», «знание», «мотивация», «репрезентация», «модель», «язык», «коммуникация», «интенция» и т. п. В понимании математики независимо от ее конкретных форм и видов эпистемология как философско-методологическая дисциплина исследует знание как таковое, его строение, структуру, функционирование и развитие. Нередко (особенно в английском языке) слово «эпистемология» выступает в качестве синонима гносеологии. В современной философии образования это понятие в основном используется для обозначения проблематики исследования научного знания и процесса научного познания как термин, отражающий специфику именно научного познания в отличие от познания в таких формах, как художественное, этическое, моральное, обыденное

или религиозный опыт. Развитие эпистемологической системы теоретизирования в философии образования обусловлено в основном становлением постнеклассического типа рациональности, которая учитывает соотнесенность получаемых знаний об объекте не только с особенностью средств и операций деятельности, но и с ценностно-целевыми структурами. Причем эксплицируется связь внутринаучных целей с внеаучными, социальными ценностями и целями¹.

Обсуждение. Перспективы преподавания математики в школе или вузе необходимо рассматривать в связи с развитием общества в целом, теми ценностями, целями и смыслами, которые преобладают в обществе. Например, если рассматривать период истории России 1920–1930-х гг. или 1950–1960-х гг. («благоприятные» периоды для преподавания математики), то в обществе главенствовал созидательный пафос строительства материальной основы нового общественного строя (социализма, коммунизма); в эти периоды инженеры, строители, ученые были главными действующими лицами в обществе. Школьники и студенты, будучи молодыми чуткими людьми, легко усваивали мотивацию для изучения математики как основы инженерных и научных знаний.

Мотивация при изучении (и преподавании) математики имеет первостепенное значение, поскольку изучение математики трудно, требует волевых и систематических усилий. Без ясной и устойчивой мотивации изучить математику даже на базовом уровне попросту невозможно. В современных условиях одна из главных проблем такова: ученики, да зачастую и преподаватели, не имеют ясных представлений о том, зачем они изучают (или преподают) математику. Математика в достаточно большом объеме осталась в программах школ и вузов во многом по инерции от советского периода, и пока нет достаточной рефлексии относительно того, зачем нужно преподавать ее и в каких объемах.

Если говорить об окружающем «культурном фоне» общества, то мы видим, как за последние три десятилетия российской истории пафос созидания постепенно сменился пафосом потребления. А какая математика нужна «грамотному потребителю»? Самая простая: четыре арифметических действия и, конечно, проценты, чтобы «грамотно» брать деньги в кредит. Когда сравнительно недавно была озвучена задача образования – «подготовка квалифицированного потребителя», то могло возникнуть и искушение сократить преподавание математики до этого мизерного масштаба, что и было сделано (если немного гиперболизировать оценку) в ряде образовательных учреждений.

¹ Философия образования: словарь-справочник / сост. И. В. Яковлева, Т. С. Косенко, Б. О. Майер. Новосибирск: Изд-во НГПУ, 2022. С. 310–312.

В то же время в последние годы, и особенно месяцы, наблюдается довольно динамичное изменение настроения в обществе: приходит понимание того, что мы должны научиться производить основные высокотехнологичные продукты самостоятельно, не рассчитывая на их приобретение на мировом рынке в обмен на энергоносители. Для этого нам необходимы многочисленные инженерные и научные кадры, хорошо владеющие математикой, поскольку математика является универсальным языком наук и инженерных дисциплин. Однако потребуется некоторое время, чтобы эти изменения в общественных настроениях привели к ощутимым изменениям в отношении молодых людей к изучению точных наук и математики в частности. Размышляя о способах развития мотивации, следует выделить различные ее измерения: нужно рассуждать как о мотивациях, связанных с экономико-технологическим запросом общества, так и о мотивациях, связанных с задачами гуманитарного, личностного развития, и даже о мотивациях, связанных с духовным развитием человека.

Рассматривая новые формы и виды преподавания математики на современном этапе развития общества, необходимо, используя эпистемологический подход, начать с раскрытия вопроса: что такое математика? (см., напр., известную книгу R. Courant, H. Robbins [5], а также книги Г. Штейнгауза [6] и В. И. Арнольда [7; 8]). В образовании это прежде всего «когнитивные комплексы, связанные с различными историческими и духовными практиками, выходящими за рамки традиционных представлений о рациональности»², призванные решаться в рамках эпистемологической системы теоретизирования применительно к математике. Это дает возможность ставить и конструктивно решать вопросы о социокультурном происхождении моделей явного и неявного знания, связи их характерных черт и особенностей с онтологическими представлениями, аксиологией и праксиологией различных социальных групп. Проблемы, которые не типичны для традиционной математики, – это «пограничные проблемы философии образования»: преодоление фрагментарности знания-образования, убедительность математического знания и его транслирование массовому сознанию, востребованность и достижение практичности математики, включенность ее в жизнь современного социума [9].

Эпистемологический подход ориентирован на изучение закономерностей познания мира и самопознания человека. Основные категории в эпистемологии: знание, информация, сознание, восприятие, апперцепция, познание, рефлексия, мышление, истина, понятие, идея, закон, тенденция, значение, смысл, проблема, метод, учение, теория, наука; в педагогике: учебная дисциплина (предмет), задачи, правила, теоремы, гипотезы, до-

² Бабайцев А. Ю. Эпистемология // Всемирная энциклопедия: Философия. М.: АСТ; Минск: Харвест: Современный литератор, 2001. С. 1265.

казательства, методика, истина, закон и др. В соответствии с этим необходимо выделить три «лица» или «ипостаси» математики: наука, искусство и язык. Прежде всего математика является одной из наук. И подобно физике или химии она возникла из практических потребностей познания окружающего мира, сначала как экспериментальная наука, изучающая закономерности в количествах предметов (арифметика) и в формах и протяженностях материальных объектов (геометрия). Речь идет о догреческом периоде развития. Начиная с древних греков, математика стала изучать не непосредственно материальный мир, а закономерности умственных, идеальных моделей, описывающих этот окружающий мир (геометрия Евклида и т. д.).

Цель любой науки – открытие законов природы, и главный критерий ценности результата – его истинность. В этом смысле математика является наукой. В то же время, в отличие от других наук, математика может рассматриваться как искусство. Цель искусства – красота (по крайней мере в традиционном понимании искусства, мы не рассматриваем здесь идеи авангарда и постмодернизма). И в самом деле для (настоящей) математики важна не столько истинность результата (что необходимо по умолчанию), но прежде всего красота результата. Как писал известный математик Г. Х. Харди, «красота – самый первый критерий; в мире нет места для некрасивой математики» [10, с. 32]. Также математику роднит с искусством то, что истинная («чистая») математика, как и «чистое искусство», не преследует никаких сиюминутных практических (а тем более корыстно-прагматических) целей [11] (что было ярко манифестировано, к примеру, нашим соотечественником Г. Перельманом, который доказал труднейшую гипотезу Пуанкаре, не поддававшуюся усилиям лучших математиков на протяжении ста лет, но отказался от престижных премий и денежных наград)³. Идея о математике как искусстве отражена, к примеру, в блестящей статье В. А. Еровенко, который отмечает: «Эстетический потенциал математических конструкций сближает математику с искусством» [15, с. 112]. Наконец, математика – это язык; более того, за последние столетия она стала универсальным языком практически всех наук. Знание математики как языка абсолютно необходимо любому человеку, который собирается заниматься науками, компьютерными и информационными технологиями или любой инженерной деятельностью [12–15].

Соответственно, при преподавании математики следует иметь в виду все ее аспекты, иногда делая акцент на том или ином из них. В советский период превалировал акцент на изучении математики как языка науки и тех-

³ «Гениев осуждать нельзя». Как живет математик Григорий Перельман [Электронный ресурс]. «Аргументы и факты». 11 ноября 2017. URL: https://spb.aif.ru/society/science/geniev_osuzhdat_nelzya_kak_zhivet_matematik_grigoriy_perelman (дата обращения: 15.07.2022).

ники, и в меньшей степени как самостоятельной науки (за исключением специализированных школ и ведущих университетов), и совсем в малой степени – как искусства. Возможно, что именно усиление акцента на третьей «ипостаси» математики даст дополнительную мотивацию для учащихся в наше время, когда возрастает значимость гуманитарной составляющей в образовании.

Роль и место математики в образовании в прошедшем XX в. определялось пафосом Нового времени с его лозунгом «Знание – сила». С помощью знания, науки, технологии человек принялся перестраивать окружающий мир для своего удобства, делать его более комфортным местом обитания. Математика необходима в этом как надежный точный язык, идеально откалиброванный инструмент фиксации закономерностей материального мира. В противоположность периоду Средних веков основное внимание человека было направлено вовне. Сейчас, в XXI в., когда раскрыты многие законы физического мира, очевидно, насколько мы еще плохо знаем самих себя. Вероятно, наступает некоторая новая историческая эпоха, когда вновь в центре внимания будет не внешний материальный мир с его законами, а сам человек, его бесконечная внутренняя Вселенная. Соответственно, будет меняться и акцент, который делается в развитии математики и ее преподавании.

Опыт XX в. и двух десятилетий нынешнего века ясно показал, что только развитием науки и технологии невозможно решить все проблемы человека и человечества. Более того, новые, все более совершенные технологические возможности становятся опасными в руках людей, которые плохо понимают, кто они такие и зачем они здесь. Соответственно, математика в ее аспекте науки становится менее привлекательной для молодых людей. Поэтому необходима определенная гуманитаризация математического преподавания. Последние несколько столетий наука гордилась своей объективностью, независимостью ее истин от человека. Сегодня, когда вся объективная научная информация, в том числе математическая, легкодоступна в интернете, преподаватель должен осознать смысл своей деятельности в аудитории – передавать ученикам не «сухую» информацию, а «человеческое измерение математического материала».

В качестве примера приведем такую базовую школьную тему, как «формула для корней квадратного уравнения». Вот как *ни в коем случае не следует* преподавать эту тему: учитель пишет на доске формулу для дискриминанта и для корней квадратного уравнения общего вида и затем просит учеников решить какое-то количество примеров с конкретными числовыми коэффициентами. Гораздо лучше было бы, во-первых, начать с того, почему вообще люди заинтересовались проблемой решения квадратных уравнений, в чем была их цель и мотивация. Если учитель не

рассказывает об этом учащимся, то как тогда он может требовать от них заинтересованности и мотивации в изучении этой темы? (Скажем, для научного доклада считается общепринятой нормой начинать с того, почему рассматриваемая в докладе задача представляет интерес, какая ее связь с другими задачами, кто ранее занимался подобными задачами и т. д. Как нам кажется, преподаватель должен относиться к ученикам с не меньшим уважением, чем докладчик к своим коллегам-ученым!) Во-вторых, надо хотя бы кратко показать, как люди догадались вывести формулу для корней, как мысль исследователей развивалась от простейшего случая $x^2 = c$ к общему случаю при помощи выделения полного квадрата (то есть путем приведения произвольного квадратного уравнения к виду $(x - x_0)^2 = c$). В противном случае мы будем сталкиваться с таким (нелепым!) способом решения уравнения $(x + 3)^2 = 25$: раскрытием скобок в левой части и с последующим использованием общей стандартной формулы для корней квадратного уравнения (это не выдуманный, а реальный пример из педагогической практики автора!). Абсурдность этого способа показывает, что данному ученику эту тему излагали скорее всего по первому (формальному) варианту.

Обсуждение гуманистического (человеческого) измерения преподавания математики включает один из важных его аспектов, который состоит в следующем: окружающий мир непостоянен, неустойчив, изменчив. Еще школьником молодой человек ясно осознает конечность земного пути. Человеку надо обязательно иметь какие-то опоры, которые находятся вне времени (всепостирающего Хроноса – в соответствии с пониманием древних греков). Даже если мы возьмем законы физики или химии, то все они, во-первых, носят приближенный характер и, во-вторых, время от времени подвергаются уточнениям (законы механики Ньютона трансформировались в законы релятивистской механики и т. п.). Среди всех наук лишь законы математики носят абсолютно точный и вневременной характер, нет необходимости их корректировать и модернизировать. Например, теорема Пифагора о соотношении сторон идеального прямоугольного треугольника, во-первых, была не «сотворена», а «обнаружена», то есть существовала и до ее открытия (с этим согласятся практически все математики), а во-вторых, будет всегда справедлива в будущие времена без каких-либо уточнений или корректировок. Таким образом, ученик, изучая теорему Пифагора, приобщается к некоторому вечному, вневременному миру, а значит, может почувствовать надежду на личное бытие в вечности.

Вспоминая Бозция («Утешение философией»), можно выразить эту мысль в стихотворной форме (стихи автора).

Утешение математикой

Когда страданье сводит скулы,
И не унять его ничем,
Рассудок прячется в фигуры,
В уют домашний теорем.

Когда вкус жизни станет кислым,
То, не справляясь с кислотой,
Душа бежит к овечкам-числам,
Их утешаясь красотой...

Здесь уместно в рамках философской антропологии определить, что собой представляет человек и где разворачивается его бытие? С точки зрения философии материализма человек – это прежде всего его физическое тело, в рамках которого функционирует нечто, называемое разумом, сознанием, чувствами и т. д. Имеется и противоположная точка зрения: человек – это прежде всего некая загадочная нематериальная сущность, которая включает его мысли, чувства, всю систему его отношений с миром, и эта сущность не ограничена материальным телом, хотя и очень тесно связана с ним. Идея состоит в том, что в этом смысле человек в данный момент находится там, где находится его мысль и чувство. Поэтому в тот период времени, когда ученик концентрированно, с мотивацией и энтузиазмом рассматривает некоторое математическое утверждение или математический объект, он переселяется на этот период в тот нетленный, вечный, идеальный мир, который так ярко описал Платон! Задача учителя – показать эту вечную красоту математических теорем; по большому счету это можно сделать только в процессе живого человеческого общения, живой передачи мыслей и чувств от учителя к ученикам. Задача учителя – не столько передать знания, «сухую» информацию о некоторых математических истинах (это все легкодоступно в интернете), сколько научить отношению к этим истинам! А отношения между объектами находятся на более высоком духовном, интеллектуальном уровне, чем объекты сами по себе.

Рассуждая о роли учителя, проведем еще одно сравнение: математический текст (формула, алгоритм или теорема) напоминает нотную запись музыкального произведения. Задача учителя в том, чтобы на уроке (семинаре, лекции) зазвучала «музыка математики». Представьте, что пианист, выйдя на сцену, будет буквально зачитывать нотный текст («ля-диез, фа-мажорный аккорд» и дальше в том же ключе). Вот так же недопустимо, когда учитель математики сводит занятие к простому воспроизведению некоторого математического текста! Подобно тому как в музыкальной школе учеников учат не просто читать ноты, а исполнять музыкальные произведения, требование к математическому занятию в идеале должно быть таким: надо научить детей (студентов) не просто читать и понимать мате-

математические тексты, а слышать «математическую музыку», закодированную этими текстами. А если поднять планку еще повыше, то надо научить их сочинять собственную (хотя бы несложную) «математическую музыку». Конечно, это очень высокий уровень ожиданий, и это так же сложно (и тем более в наш век массовой культуры), как научить детей воспринимать серьезную классическую музыку. Но важно хотя бы задать высокую цель (пусть и для многих преподавателей она пока недостижима), чтобы можно было самосовершенствоваться.

Собственно, проблема творчества остро стоит для уроков не только математики, но и других дисциплин. Например, всех учеников Царскосельского лицея, где учился А. С. Пушкин, обучали стихосложению. Конечно, не все потом стали поэтами (хотя можно назвать еще имена А. Дельвига и В. Кюхельбекера), но, безусловно, всем лицеистам это принесло большую пользу для развития. Наверное, в идеале, кроме сочинений и уроков живописи, было бы полезно научить детей создавать хотя бы простейшие музыкальные композиции, открывать какие-то простые (но оригинальные!) математические утверждения. В рамках подобных представлений несколько лет назад в Академгородке города Новосибирска была организована «Мастерская творческой математики» для учеников 5–7 классов⁴. Идея состояла в том, чтобы приблизить математику к ученику, чтобы он ощутил математические истины, в том числе тактильно, делая что-то своими руками (вырезая что-то из бумаги и т. д.), чтобы ученики увидели, что начало всего в математике – эксперимент, как и во всех других науках. Как именно включить элементы творчества на занятиях математикой – это творческая задача для учителя. Кое-что в этом направлении уже делается: к примеру, в школьных учебниках появляются «задачи для исследования». Один из очевидных путей – всячески поощрять учеников к поиску своих, оригинальных путей решения задач (пусть даже эти пути будут длиннее путей, предлагаемых учителем, но для самого ученика собственное решение, несомненно, будет иметь очень высокую ценность) [16].

В чем еще важная роль математики в процессе образования? Она учит мышление сосредотачиваться на одной проблеме. Это само по себе и всегда было трудно, но особенно трудно для современного ученика, который привык к такому режиму функционирования сознания, когда оно постоянно отвлекается, подвергается постоянным внешним «информационным

⁴ Мастерская творческой математики – место, где детям интересно! Новосибирск [Электронный ресурс]. URL: https://vk.com/mtm_nsk (дата обращения: 09.07.2022); Мастерская творческой математики приглашает школьников. Новосибирская открытая образовательная сеть [Электронный ресурс]. URL: <https://edu54.ru/news/list/206572/> (дата обращения: 09.07.2022); Мастерская творческой математики в СУНЦ НГУ открыла новый сезон. Министерство образования Новосибирской области [Электронный ресурс]. URL: <https://minobr.nso.ru/news/10322> (дата обращения: 19.07.2022).

атакам». Общим местом стал тезис о «клиповом» мышлении современного (и особенно молодого) человека, когда одна картинка сюжет быстро сменяется другой и нет времени и навыка глубоко продумать идею, ее связи с другими вопросами и т. д. Но в математике такое мышление позволит решать только самые примитивные, «одноходовые» задачи. Для решения других необходимо тренировать навыки глубокого, целостного, многомерного мышления, тренировать и логику, и интуицию одновременно.

Современный ученик (студент) более привык к визуальной, нежели текстовой информации. Поэтому в преподавании математики придется делать акцент на визуализации материала: рисовать больше картинок, при наличии оборудования показывать «математическую анимацию», то есть картинки в движении, во времени. К примеру, если идет речь о пересечении трех высот треугольника в одной точке (факт весьма неожиданный и неочевидный!), то можно было бы показать «мультфильм», в котором сначала на плоскости появляется произвольный по форме треугольник, затем вычерчиваются две его высоты, отмечается точка пересечения, а затем (кульминация!) медленно из вершины проводится третья высота и (яркая вспышка в этой точке!) она точно проходит через точку пересечения первых двух высот. На наш взгляд, подобный способ подачи математической информации более адекватен «информационным ожиданиям» современных детей.

Самое интересное заключается в том, что когда в традиционном учебнике или книге по математике «сухо» формулируется «Теорема. Три высоты треугольника пересекаются в одной точке», пусть даже и вместе с (статичной) картинкой, то на самом деле каждый математик понимает именно описанную выше «изюминку» этой теоремы, а не формальный текст. И эта «изюминка», этот «пафос» заключается в предложенном «мультике», а именно: три отрезка, как правило, не пересекаются в одной точке, третий из них отнюдь не обязан пройти через точку пересечения первых двух, а если проходит, то это и есть суть этой теоремы, некоторая «яркая вспышка» в восприятии этого математического сюжета.

Задача современного образования заключается в том, чтобы «анимировать», то есть оживить, одухотворить «сухую» математическую реальность. В математике присутствуют оба направления: как «формализм», «алгебрологический» подход (можно назвать имя Н. Бурбаки, это коллективный псевдоним группы французских математиков XX в.), так и наглядно-геометрическое направление (к примеру, А. Пуанкаре, В. И. Арнольд). В математике и преподавании математики XX в. скорее доминировал первый подход, что приводило к отторжению математики как предмета со стороны многих учеников. Задача современного преподавателя математики – учесть особенности восприятия молодежи сегодняшнего дня, которое стало бо-

лее визуальным, чем логическим и текстовым, сделать акцент на геометрической сути излагаемых математических идей.

Предшествующие поколения детей гораздо больше, чем современные дети, читали книги и гораздо меньше смотрели мультики. Современные дети в основном выросли на картинках. У них меньше развита способность самим «оживлять» прочитанный текст (что вырабатывается навыком чтения), поэтому, преподавая математику, учителю придется больше использовать визуальные образы, а не текстовую информацию. Здесь может помочь опыт многих российских и советских математиков (напр.: [17; 18]). К примеру, выдающийся советский математик Н. Н. Лузин «умел находить в самых сложных и отвлеченных вопросах простое геометрическое ядро, которое во многих случаях и подсказывало решение задачи» [19, с. 203].

Важнейшая задача преподавателя математики заключается в «анимации», *оживлении* «формально-логической» математической реальности. Здесь уместно пофилософствовать на тему «живое» и «неживое», или чем отличается «живое» изложение математического материала от «неживого»? «Живое» отличается от «неживого» тем, что у «живого» есть многообразные отношения к другим сущностям, а «неживое» бытийствует само по себе, ему «нет дела» до других сущностей или объектов. Например, камню, лежащему на дороге, нет никакого дела до тех людей, которые спотыкаются об него. Чего не скажешь о людях, у которых есть отношение к этому камню. Если вспомнить соответствующую басню Эзопа, наиболее живым является тот человек, который уберет этот камень с дороги, то есть проявит отношение не только к камню и себе, но и к другим людям, позаботится о них. В басне только такой человек и признается достойным имени человека. В этом смысле «живое» изложение математического материала и отличается от «неживого», «формального» тем, что учитель не просто излагает материал, а раскрывает многообразные отношения этого материала с предшествующим и последующим математическим материалом, с людьми, которые творили этот материал и применяют его, с самими учениками, которые сидят в аудитории, с их будущей профессиональной жизнью и т. д. (см.: [16]).

Проблема творчества в преподавании математики связана в том числе с проблемой замены человека искусственным интеллектом (ИИ). Быстрое развитие технологий ИИ ставит вопрос о месте человека, его востребованности на производстве и обществе. Искусственный интеллект и ИТ-технологии будут все больше забирать у человека его функции, которые могут быть описаны формально или алгоритмически. К чему же нам нужно готовить будущее поколение, чтобы оно оказалось востребованным в профессиональном плане, на какие эпистемологические константы делать акценты? Видимо, на аспекты творчества, на плохо формализуемые или неформализуемые задачи – там, где человек может проявить и реали-

зовать именно свою человеческую, созданную Творцом природу. Человек, безусловно, не может быть описан как огромный биокомпьютер, он не просто гораздо сложнее, но и бесконечно сложнее. В человеке заложена бесконечность, и как раз одним из способов обнаружить ее в себе является приобщение к математике. В самом деле посредством математики человек способен работать с бесконечными сущностями, например, с бесконечным рядом натуральных чисел. Рассмотрим, например, широко известную «Великую теорему Ферма» о том, что при $n \geq 3$ никакая n -я степень натурального числа не может быть суммой каких-то двух других n -х степеней натуральных чисел. Никакой компьютер или искусственный интеллект не в состоянии проверить это утверждение – для этого потребовалось бы бесконечное время вычислений. Но человеку хватило чуть больше трех с половиной столетий, чтобы окончательно решить этот вопрос (не перебирая все варианты, которых бесконечное количество!). Конечно, это немалый срок, но не бесконечный! Человек обладает этой удивительной способностью «общаться с бесконечностью» – способностью, которой (насколько можно судить) нет ни у каких других живых существ.

На занятиях математикой в школе можно рассмотреть гораздо более простые примеры такого рода, которые будут доступны ученикам, например, классическое доказательство Евклида о бесконечности совокупности простых чисел (натуральных чисел, больших единицы и делящихся нацело только на себя и на единицу). Евклид не предъявляет этой совокупности, но доказывает, что она бесконечна. Рассказывая об этом, учитель призван не просто сообщить ученикам «сухой» факт о бесконечности множества простых чисел, а показать в этом доказательстве некоторое открывающееся «окошко» в мир бесконечности.

Поскольку тема бесконечности неизбежно связана с тайной и загадками, позволим себе немного пофантазировать. В математике есть некоторая часть, которую можно «непосредственно» наблюдать и проверить на опыте. Например, равенство $2 + 2 = 4$ доступно нашему «непосредственному» восприятию: соединяя две кучки по две палочки в одну кучку, мы видим в последней ровно 4 предмета. Бесконечность множества простых чисел не поддается аналогичному «непосредственному» обозрению. Если мы будем выписывать их подряд: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19..., то этот процесс (как доказал Евклид) никогда не закончится и мы не сможем увидеть все простые числа сразу. Но, может быть, в будущем мире (гипотетическом или в том, в который мы верим), когда не только человек, но и само время изменит свои свойства, человек приобретет способность в единый миг «непосредственно увидеть» бесконечный ряд натуральных чисел и бесконечное подмножество простых чисел в нем? Хотя это и может восприниматься как фантазия, но разве не фантазии, мечты, грезы являются тем самым ценным, чем живет душа ребенка, подростка или студента? Может быть,

эта фантазия даст ему больше, чем насаждаемые современной массовой «культурой» фантазии богатства, «свободы», роскоши, неограниченного комфорта и развлечений?

Вопрос о возможностях и границах познания может рассматриваться на уроках математики в связи с представлением о линейном времени (хотя до сих пор наука не имеет четкого представления о времени), то есть об одномерном времени, которое течет из прошлого в будущее. В то же время имеются представления об окружающем пространстве, которое имеет три измерения. Представим теперь, что в гипотетическом будущем мире время станет подобным пространству и приобретет дополнительные измерения (станет хотя бы двумерным). Насколько же тогда удобнее и богаче станет жизнь! Представим, что во время срочного и важного делового разговора мы получаем не менее важный и не менее срочный телефонный звонок. В ситуации одномерного времени мы вынуждены делать выбор: либо прерывать разговор, либо откладывать общение по телефону. Это выбор из двух плохих для нас вариантов, в нашей реальности мы вынуждены выбирать меньшее из зол. В ситуации хотя бы двумерного времени мы уходим по времени (перпендикулярно линии делового разговора) в дополнительное измерение, в котором спокойно, не торопясь решаем вопрос по телефону и потом возвращаемся обратно на линию делового разговора ровно в тот момент, когда зазвонил телефон. Наш собеседник по «живому» разговору не будет ждать нас ни минуты! Чтобы оценить или хотя бы понять этот фантастический сюжет, необходимо усвоить на уроках математическое понятие многомерного пространства (хотя бы на примерах одно-, двух- или трехмерного пространств).

Усвоение понятия многомерного пространства очень важно для личностного развития и самопознания. Человек потенциально имеет бесконечное число измерений, но недаром книга Г. Маркузе (1964 г.) была названа «Одномерный человек» [20], где обсуждается, что современное общество и культура не способствуют развитию многомерности человека. Разумеется, проблема «одномерного» человека состоит в том, что он не осознает свою одномерность. Поэтому дать ученикам хотя бы идею многомерности – это дать им шанс противостоять отупляющему влиянию современной культуры (воспользуются они этим шансом или нет, это уже вопрос свободы человека).

Одна из проблем преподавания математики имеет отношение к индивидуальному сознанию как высшему свойству мозга, заключающемуся в идеальном конструировании внешнего мира. Зачастую многие ученики, пережив несколько неудач в изучении предмета, убеждают себя в том (не без попустительства учителей), что они «гуманитарии» и «к математике неспособны». Если не брать во внимание редкие медицинские случаи, основная причина этого – отсутствие образовательной персонализации.

Особенность понимания математического вывода или рассуждения состоит в том, что это понимание невозможно без ясного понимания каждого шага в цепочке, понимания всех понятий, которые используются. При этом разным ученикам могут быть непонятны разные шаги, и может потребоваться разное время, чтобы объяснить даже один и тот же шаг разным ученикам. В этом плане идеальный формат математического обучения – это индивидуальное обучение «учитель – ученик» (как это происходит в формате «мастер – подмастерье»). Если говорить об обучении в группе, то, по всей видимости, трудно обучать математике группу из более чем 10–12 учеников.

Несмотря на то что мы акцентировали внимание на наглядном, геометрическом аспекте, логически-формальное измерение в преподавании математики также очень важно. И один из аспектов этого измерения, а именно: воспитание культуры доказательства, приобретает в современном мире особое значение. Действительно, молодым людям необходимо дать защиту против всевозможных манипуляций, которым они подвергаются или в еще большей степени могут подвергаться в будущем (со стороны политиков-популистов, разнообразных мошенников и т. д.). Обучение культуре доказательства, к сожалению, находится на нисходящей линии, и это при том, что умение доказывать утверждения связано с такими важнейшими для развития личности понятиями, как ценность истины, различие между гипотезой и истиной, различие между желаемым и действительным, умение слушать аргументы другого человека, умение настоять на своей точке зрения и отвергнуть неправильную точку зрения, опираясь не на эмоции, а на логику и т. д.

Заключение. Опираясь на подходы эпистемологии образования, сделаем вывод, что в рамках математического образования необходимо:

- раскрывать вопросы конструктивного расширения знания о математическом образовании в связи с онтологией социального познания;
- учитывать роль и значение «человеческого измерения математического материала»;
- приблизить математику к индивидуальному восприятию настолько, чтобы ученик мог ощутить математические истины, в том числе тактильно, делая что-то своими руками (музицируя, вырезая из бумаги и др.), чтобы видеть, что начало всего в математике – эксперимент, как и во всех других науках.

Одна из важнейших задач эпистемологии математического образования на современном этапе – необходимость оживить, одухотворить «сухую» математическую реальность в процессе преподавания, акцентировать гуманитарное, общекультурное, духовное измерения математики.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. **Костенко И.** Преподавание математики: смена парадигм? // Высшее образование в России. 2001. № 4. С. 159–160. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9568851>
2. **Гребнев Л. С.** Обучение: Что оценивать студенту? // Высшее образование в России. 2022. Т. 31, № 2. С. 68–81. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=48065143>
3. **Бойкова Ю. П.** Преподавание математики в условиях информационно-предметной среды // Ученые записки ИУО РАО. 2018. № 1 (65). С. 27–29. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=35689553>
4. **Ибрашева С. Р.** Преподавание математики в школе: актуальные проблемы // Форум. Серия: гуманитарные и экономические науки. 2018. № 1 (13). С. 32–34. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=32819507>
5. **Courant R., Robbins H.** What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods. 2nd ed. / revised by Ian Stewart. N. Y.: Oxford University Press, 1996. 565 p.
6. **Штейнгауз Г.** Математика – посредник между духом и материей / под ред. А. В. Хачояна; пер. с пол. Б. И. Копылова. М.: Бином, 2005. 349 с.
7. **Арнольд В. И.** О преподавании математики // УМН. 1998. Т. 53, Вып. 1 (319). С. 229–234. DOI: <https://doi.org/10.4213/rm5>
8. **Арнольд В. И.** Что такое математика? М.: Изд-во МЦНМО, 2004. 103 с.
9. **Майер Б. О.** Эпистемологические аспекты философии образования: монография. Новосибирск: Изд-во НГПУ, 2014. 213 с. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=25995779>
10. **Харди Г. Х.** Апология математика / пер. с англ. Ю. А. Данилова. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000. 104 с.
11. **Hardy G. H.** The Indian mathematician Ramanujan // The American Mathematical Monthly. 1937. Vol. 44, № 3. P. 137–155. DOI: 10.2307/2301659
12. **Кочергин А. Н.** Математика и математизация науки // Проблемы онто-гносеологического обоснования математических и естественных наук. 2008. № 1. С. 55–79.
13. **Кочергин А. Н.** Онто-гносеологическое обоснование парадигмы коэволюционного развития общества и природы // Проблемы онто-гносеологического обоснования математических и естественных наук. 2018. № 9. С. 56–67. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=36744255>
14. **Игнатьев Ю. А.** Преподавание математики в российской школе и колледже с помощью технологии TI-VIEWSCREEN // Международный журнал экспериментального образования. 2014. № 8-2. С. 17–19. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21839044>
15. **Еровенко В. А.** Эстетическая ценность математического знания и преподавание математики // Российский гуманитарный журнал. 2016. Т. 5, № 2. С. 108–121. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=27664822>
16. **Vertheim L.** Time, relation, meaning and education // Time in the Education, Art and Sport: international multidisciplinary conference. Prague: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2014. P. 21–29. Web of Science: 000360260200003
17. **Букин Д. Н.** Философия математики: новое или хорошо забытое старое // Проблемы онто-гносеологического обоснования математических и естественных наук. 2021. № 12. С. 137–138. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=48017673>
18. **Перминов В. Я.** Философия математики Н. Н. Лузина // Проблемы онто-гносеологического обоснования математических и естественных наук. 2018. № 9. С. 90–98. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=36744258>
19. **Синяев А. С.** Взаимосвязь математики и философии в творчестве Н. Н. Лузина // Проблемы онто-гносеологического обоснования математических и естественных наук. 2008. № 1. С. 197–204.
20. **Маркузе Г.** Одномерный человек / пер. А. Юдина. М.: REFL-book, 1994. 368 с.

REFERENCES

1. Kostenko I. Teaching mathematics: a paradigm shift? *Higher Education in Russia*, 2001, no. 4, pp. 159–160. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9568851> (In Russian)
2. Grebnev L. S. Training: What should a student evaluate? *Higher Education in Russia*, 2022, vol. 31, no. 2, pp. 68–81. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=48065143> (In Russian)
3. Boikova Yu. P. Teaching mathematics in the conditions of an information-subject environment. *Scientific Notes of the IUO RAO*, 2018, no. 1 (65), pp. 27–29. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=35689553> (In Russian)
4. Ibrasheva S. R. Teaching mathematics at school: actual problems. *Forum. Series: Humanities and Economic Sciences*, 2018, no. 1 (13), pp. 32–34. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=32819507> (In Russian)
5. Courant R., Robbins H. What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods. 2nd ed. Revised by Ian Stewart. New York: Oxford University Press Publ., 1996, 565 p.
6. Shteyngauz G. *Mathematics – the mediator between spirit and matter*. Edited by A. V. Khachoyan; transl. from Polish by B. I. Kopylov. Moscow: Binom Publ., 2005, 349 p. (In Russian)
7. Arnold V. I. On teaching mathematics. *UMN*, 1998, vol. 53, Issue 1 (319), pp. 229–234. DOI: <https://doi.org/10.4213/rm5> (In Russian)
8. Arnold V. I. *What is mathematics?* Moscow: ICNMO Publishing House, 2004, 103 p. (In Russian)
9. Mayer B. O. *Epistemological aspects of philosophy of education*: monograph. Novosibirsk: Publishing house of NSPU, 2014, 213 p. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=25995779> (In Russian)
10. Hardy G. H. *A Mathematician's Apology*. Transl. from English by Yu. A. Danilova. Izhevsk: Regular and chaotic dynamics Publ., 2000, 104 p. (In Russian)
11. Hardy G. H. The Indian mathematician Ramanujan. *The American Mathematical Monthly*, 1937, vol. 44, no. 3, pp. 137–155. DOI: 10.2307/2301659
12. Kochergin A. N. Mathematics and mathematization of science. *Problems of Ontological and Epistemological Substantiation of Mathematical and Natural Sciences*, 2008, no. 1, pp. 55–79. (In Russian)
13. Kochergin A. N. Onto-epistemological substantiation of the paradigm of coevolutionary development of society and nature. *Problems of Onto-epistemological Substantiation of Mathematical and Natural Sciences*, 2018, no. 9, pp. 56–67. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=36744255> (In Russian)
14. Ignatiev Yu. A. Teaching mathematics in Russian schools and colleges using TI-VIEWSCREEN technology. *International Journal of Experimental Education*, 2014, no. 8–2, pp. 17–19. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21839044> (In Russian)
15. Erovenko V. A. The aesthetic value of mathematical knowledge and teaching mathematics. *Russian Humanitarian Journal*, 2016, vol. 5, no. 2, pp. 108–121. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=27664822> (In Russian)
16. Vertheim L. Time, relation, meaning and education. *Time in the education, art and sport*: international multidisciplinary conference. Prague: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2014, pp. 21–29. Web of Science: 000360260200003
17. Bukin D. N. Philosophy of mathematics: new or well-forgotten old. *Problems of Ontological and Epistemological Substantiation of Mathematical and Natural Sciences*, 2021, no. 12, pp. 137–138. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=48017673> (In Russian)
18. Perminov V. Ya. Philosophy of mathematics N. N. Luzin. *Problems of Ontological and Epistemological Substantiation of Mathematical and Natural Sciences*, 2018, no. 9, pp. 90–98. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=36744258> (In Russian)
19. Sinyayev A. S. Interrelation of mathematics and philosophy in the works of N. N. Luzin. *Problems of Ontological and Epistemological Substantiation of Mathematical and Natural Sciences*, 2008, no. 1, pp. 197–204. (In Russian)

20. Marcuse G. *One-dimensional man*. Transl. A. Yudina. Moscow: REFL-book Publ., 1994, 368 p. (In Russian)

Информация об авторе

Л. Б. Вертгейм, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии и топологии механико-математического факультета, Новосибирский государственный университет (630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2), научный сотрудник Научного центра Российской академии образования, Новосибирский государственный педагогический университет (630126, Новосибирск, ул. Виллюйская, 28).

Information about the author

Lev B. Vertgeim, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent of the Chair of Geometry and Topology of the Department of Mechanics and Mathematics, Novosibirsk State University (2 Pirogova str., Novosibirsk, 630090), researcher at the Scientific Center of the Russian Academy of Education, Novosibirsk State Pedagogical University (28, Vilyuiskaya str., Novosibirsk, 630126).

Поступила: 26.08.2022

Received: August 26, 2022

Одобрена после рецензирования: 22.09.2022

Approved after review: September 22, 2022

Принята к публикации: 30.09.2022

Accepted for publication: September 26, 2022