

УДК 532.526.2

Несимметричные автомодельные течения вязкой несжимаемой жидкости в продольно обтекаемом прямом угле*

А.В. Бойко^{1,2}, Ю.М. Нечепуренко^{1,3,4}

¹Институт теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

²Тюменский государственный университет

³Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, Москва

⁴Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

E-mail: boiko@itam.nsc.ru

Рассматриваются продольные симметричные и асимметричные автомодельные течения вязкой несжимаемой жидкости в полубесконечном прямом двугранном угле с заданным продольным градиентом давления. Выведены уравнения, которые описывают такие течения в приближении пограничного слоя. Теоретически исследовано асимптотическое поведение решений выведенных уравнений вдали от ребра угла. Разработан новый метод расчета этих решений. Получены решения двух типов асимптотического поведения.

Ключевые слова: пограничный слой, течение в угле, автомодельные уравнения, асимптотические граничные условия, нелинейные уравнения.

Введение

Течения вдоль угловых конфигураций моделируют различные режимы обтекания стенок аэродинамических конструкций. Широкая распространенность этих течений является причиной их экспериментального и теоретического изучения на протяжении многих десятилетий [1]. Вместе с тем из-за сложности лабораторного моделирования информация об обтекании угловых конфигураций, кроме простейших, весьма ограничена. Например, имеются трудности в реализации в лабораторном эксперименте симметричного течения с нулевым продольным градиентом давления [2]. Даже сравнительно небольшие неточности установки модели вдоль потока [3] приводят к возникновению асимметрии течения и ненулевому продольному градиенту давления, что затрудняет понимание картины течения.

В теоретическом плане наиболее полно к настоящему времени изучены автомодельные симметричные ламинарные течения в полубесконечном прямом двугранном угле при наличии продольного градиента давления для случая, когда передние кромки

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-08-00354 (разработка теории, вывод уравнений течения в угле и численные эксперименты) и РНФ, проект № 14-21-00025 (разработка варианта метода Ньютона для численного решения уравнений течения в угле).

граней угла лежат в одной плоскости и образуют прямые углы с его ребром (см., например, [4]). В таких условиях зависимость от продольной координаты можно исключить, а исходную геометрию свести к квадранту на плоскости с началом координат, совпадающим с вершиной угла. Основная сложность при теоретическом исследовании таких автомодельных течений состоит в необходимости получения и анализа асимптотических граничных условий вдали от вершины угла. Последнее обусловлено тем, что возникающие поперечные потоки уменьшаются при удалении от ребра угла не экспоненциально, а лишь алгебраически быстро [5]. Поэтому при численном решении, когда расчетная область ограничивается, например, квадратом, его сторона должна быть довольно большой.

Вывод асимптотических граничных условий на сторонах квадрата, удаленных от ребра, можно свести к решению бесконечной цепочки систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с параметром, зависящим от продольного градиента давления, причем первая система в цепочке — нелинейная, а последующие — линейные. К настоящему времени установлено, что нелинейность первой системы может приводить к существованию нескольких типов решений в зависимости от величины продольного градиента давления, причем окончательно не обосновано ни теоретически, ни экспериментально, какое из этих решений и в каких случаях может реализоваться на практике.

При расчетах цепочку систем ОДУ приходится обрывать, что вызывает определенные сложности, связанные с выбором адекватного размера расчетной области и количеством оставляемых систем. Это приводит к необходимости разработки специальных методов преобразования координат и методов расчета в довольно больших областях потока, охватываемых углом, при том что некоторые рассчитываемые величины неограниченно растут при удалении от ребра, а другие остаются конечными. Было предложено несколько таких методов [6–8]. При этом стандартные решатели нелинейных эллиптических уравнений в частных производных типа NITSOL [9], активно используемые в настоящее время для решения этих задач (см. например, [10]), демонстрируют довольно медленную сходимость.

В единственной работе по несимметричному обтеканию [3], реализующемуся при формировании пограничных слоев различной толщины на пересекающихся пластинах, предложено использовать параметр асимметрии течения, но ни вывода граничных условий, ни примеров расчета течений эта работа не содержит.

В настоящей работе рассматриваются автомодельные симметричные и несимметричные ламинарные течения вдоль прямого угла при различных продольных градиентах давления. Впервые для таких течений получена система асимптотических граничных условий в прямоугольной, а не квадратной области, что может быть полезно при численном решении для уменьшения размерности задачи в несимметричном случае. Проведен численный анализ полученных граничных условий в духе анализа пограничных слоев и предложен новый метод расчета, пригодный как для симметричного, так и несимметричного обтекания, и обладающий быстрой сходимостью.

Исходные уравнения

Рассмотрим в декартовых координатах (x^*, y^*, z^*) полубесконечный прямой двугранный угол, грани которого имеют координаты $(x^*, 0, z^*)$ и $(x^*, y^*, 0)$, их передние кромки — $(0, 0, z^*)$ и $(0, y^*, 0)$, а ребро — $(x^*, 0, 0)$, где $x^* \geq 0$, $y^* \geq 0$, $z^* \geq 0$. Будем считать, что угол обтекается продольным (вдоль ребра) ламинарным потоком стационарной ньютоновской жидкости с кинематической вязкостью ν и вектором скорости $\mathbf{u}^* = (u^*, v^*, w^*)$, таким, что при любом фиксированном $k > 0$ и $z^* \rightarrow \infty$ имеем $u^*(x^*, kz^*, z^*) \rightarrow U_\infty \cdot (x^*/L)^m$,

где $U_\infty > 0$ и $L > 0$ — характерные скорость и длина соответственно. Величина m характеризует продольный градиент давления, причем $m = 0$, если он равен нулю [3].

Определим число Рейнольдса как $Re = U_\infty L / \nu$ и введем независимые автомодельные переменные [8]

$$\eta = c \frac{y^*}{x^*}, \quad \zeta = c \frac{z^*}{x^*},$$

где $c = \sqrt{Re(1+m)/2}$, и зависимые переменные

$$u, \quad \phi = \frac{(1-m)\eta u - v}{1+m}, \quad \psi = \frac{(1-m)\zeta u - w}{1+m}, \quad \theta = \psi_\eta - \phi_\zeta,$$

где

$$u(\eta, \zeta) = \frac{u^*(x^*, y^*, z^*)}{U_\infty (x^* L)^m}, \quad v(\eta, \zeta) = 2c \frac{v^*(x^*, y^*, z^*)}{U_\infty (x^* L)^m}, \quad w(\eta, \zeta) = 2c \frac{w^*(x^*, y^*, z^*)}{U_\infty (x^* L)^m}.$$

В этих переменных на основе анализа асимптотических разложений решений уравнений Навье–Стокса, выполненного в предшествующих работах (см. например, [6, 11]), по аналогии с выводом уравнений пограничного слоя при больших числах Рейнольдса можно вывести следующие уравнения для автомодельных течений в угле:

$$u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + \phi u_\eta + \psi u_\zeta + \frac{2m}{1+m} (1-u^2) = 0, \quad (1)$$

$$\phi_\eta + \psi_\zeta = 2u/(1+m), \quad (2)$$

$$\psi_\eta - \phi_\zeta = \theta, \quad (3)$$

$$\theta_{\eta\eta} + \theta_{\zeta\zeta} + \phi\theta_\eta + \psi\theta_\zeta + \frac{2u}{1+m} [\theta + (1-m)(\eta u_\zeta - \zeta u_\eta)] = 0 \quad (4)$$

с граничными условиями на стенках —

$$u = \phi = \psi = 0, \quad (5)$$

и на бесконечности —

$$u(k\zeta, \zeta) \rightarrow 1, \quad \theta(k\zeta, \zeta) \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow \infty (k > 0). \quad (6)$$

Два из четырех уравнений этой системы оказываются линейными, что дает значительные преимущества при численных расчетах по сравнению с уравнениями, записанными в естественных переменных.

Граничных условий (5) и (6) недостаточно для решения уравнений (1)–(4). Их необходимо дополнить асимптотическими граничными условиями, основанными на анализе поведения решения вдали от ребра угла [11]. Для определенности рассмотрим предел при $\zeta \rightarrow \infty$ и $\eta = \text{const}$. Упомянутый выше асимптотический анализ автомодельных течений в угле показывает, что вдоль граней угла вдали от ребра формируются пограничные слои с постоянным давлением по нормали к стенке. При этом [11]

$$u(\eta, \zeta) = U_0(\eta) + \frac{U_1(\eta)}{\zeta} + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right), \quad \phi(\eta, \zeta) = \Phi_0(\eta) + \frac{\Phi_1(\eta)}{\zeta} + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right),$$

$$\psi(\eta, \zeta) = \zeta\Psi_0(\eta) + \Psi_1(\eta) + O\left(\frac{1}{\zeta}\right), \quad \theta(\eta, \zeta) = \zeta\Theta_0(\eta) + \Theta_1(\eta) + O\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

Подставляя эти разложения в уравнения (1)–(4) и оставляя только асимптотически главные члены, получим нелинейную систему ОДУ

$$U_{0,\eta\eta} + \Phi_0 U_{0,\eta} + \frac{2m}{1+m} (1 - U_0^2) = 0, \quad \Phi_{0,\eta} + \Psi_0 = \frac{2U_0}{1+m}, \quad \Psi_{0,\eta} = \Theta_0,$$

$$\Theta_{0,\eta\eta} + \Phi_0 \Theta_{0,\eta} + \Psi_0 \Theta_0 + \frac{2U_0}{1+m} [\Theta_0 - (1-m)U_{0,\eta}] = 0$$

с граничными условиями на стенке $U_0 = \Phi_0 = \Psi_0 = 0$ и на бесконечности $U_0(\infty) = 1$, $\Theta_0(\infty) = 0$. Решение этих уравнений можно интерпретировать как автомодельное погранслоное течение с поперечным потоком.

Для разрешимости полученной системы необходимо задать еще одно граничное условие. В качестве него можно выбрать, например, значение Ψ_0 при $\eta \rightarrow \infty$. Для дальнейшего анализа и расчетов полезно связать это граничное условие с асимметрией течения. Отметим, что асимметрия течения в угле может возникать из-за предыстории его развития при малых числах Рейнольдса, так как автомодельные уравнения описывают течение только при больших числах Рейнольдса. Заметим, что

$$\Phi_{0,\eta}(\infty) + \Psi_0(\infty) = 2/(1+m).$$

Введем параметр асимметрии γ [3] так, чтобы на биссектрисе угла выполнялось условие $\psi = (1+\gamma)/(1+m)\zeta + \lambda_1 + O(1/\zeta^2)$, где λ_1 — константа, способ определения которой будет описан позже. Тогда

$$\Phi_{0,\eta}(\infty) = \frac{1}{1+m} - \gamma, \quad \Psi_0(\infty) = \frac{1}{1+m} + \gamma.$$

Для течения, отраженного относительно биссектрисы, параметр асимметрии γ меняет знак, поэтому условия совместности граничных условий можно записать как

$$u^{(+\gamma)}(\eta, \zeta) = u^{(-\gamma)}(\zeta, \eta), \quad \phi^{(+\gamma)}(\eta, \zeta) = \psi^{(-\gamma)}(\zeta, \eta),$$

$$\psi^{(+\gamma)}(\eta, \zeta) = \phi^{(-\gamma)}(\zeta, \eta), \quad \theta^{(+\gamma)}(\eta, \zeta) = -\theta^{(-\gamma)}(\zeta, \eta),$$

где верхние индексы определяют параметр асимметрии.

Учитывая, что $\Psi_{0,\eta} = \Theta_0$, рассматриваемую систему ОДУ можно свести к системе трех уравнений

$$U_{0,\eta\eta} + \Phi_0 U_{0,\eta} + \frac{2m}{1+m} (1 - U_0^2) = 0,$$

$$\Phi_{0,\eta} + \Psi_0 = 2U_0/(1+m),$$

$$\Psi_{0,\eta\eta} + \Phi_0 \Psi_{0,\eta} + \Psi_0 \Psi_{0,\eta} + \frac{2U_0 \Psi_{0,\eta}}{1+m} - 2 \frac{1-m}{1+m} U_0 U_{0,\eta} = 0,$$

или, выделяя в последнем уравнении полный дифференциал, к следующему ее виду:

$$U_{0,\eta\eta} + \Phi_0 U_{0,\eta} + \frac{2m}{1+m} (1 - U_0^2) = 0, \tag{7}$$

$$\Phi_{0,\eta} + \Psi_0 = 2U_0/(1+m), \tag{8}$$

$$\Psi_{0,\eta\eta} + \Phi_0 \Psi_{0,\eta} + \left[\Psi_0^2 - \left(\frac{1}{1+m} + \gamma \right)^2 \right] + \frac{1-m}{1+m} (1 - U_0^2) = 0 \tag{9}$$

(константы, записанные в скобках, обеспечивают выполнение граничных условий на бесконечности) с граничными условиями

$$U_0(0) = \Phi_0(0) = \Psi_0(0) = 0 \quad (10)$$

и

$$U_0(\infty) = 1, \quad \Psi_0(\infty) = \frac{1}{1+m} + \gamma. \quad (11)$$

При учете только главных членов в асимптотических граничных условиях для уравнений (1)–(4) при $\eta \rightarrow \infty$ и $\zeta \rightarrow \infty$ эти граничные условия оказываются несовместными, поэтому необходимо учесть следующие члены разложения. Соответствующие уравнения оказываются линейными и имеют вид

$$U_{1,\eta\eta} + \Phi_1 U_{0,\eta} - \Psi_0 U_1 - \frac{4m}{1+m} U_0 U_1 = 0, \quad \Phi_{1,\eta} = \frac{2}{1+m} U_1,$$

$$\Theta_{1,\eta\eta} + (\Theta_{0,\eta} \Phi_1 + \Phi_0 \Theta_{1,\eta}) + \Theta_0 \Psi_1 + \frac{2}{1+m} (\Theta_0 U_1 + U_0 \Theta_1) - 2 \frac{1-m}{1+m} (U_{0,\eta} U_1 + U_0 U_{1,\eta}) = 0,$$

$$\Theta_1 = \Psi_{1,\eta}$$

с очевидными граничными условиями

$$U_1(0) = \Phi_1(0) = \Psi_1(0) = U_1(\infty) = \Theta_1(\infty) = 0.$$

Для разрешимости этой системы необходимо задать еще одно граничное условие, о чем речь пойдет ниже. Заметим, что первые два уравнения отщепляются. Им соответствуют только однородные граничные условия, откуда следует, что $U_1(\eta) \equiv 0$ и $\Phi_1(\eta) \equiv 0$. Оставшиеся уравнения можно свести к одному уравнению и выделить в нем полный дифференциал $(\Psi_{1,\eta\eta} + \Phi_0 \Psi_{1,\eta} + \Psi_0 \Psi_1)_\eta = 0$, а также учесть, что $\Psi_1(0) = \Psi_{1,\eta}(\infty) = 0$. Тогда для интегрирования достаточно будет определить константу из асимптотического поведения $\Psi_0 \Psi_1$ при $\eta \rightarrow \infty$.

Из условия совместности граничных условий $\phi^{(-\gamma)}(\zeta, \eta) = \psi^{(+\gamma)}(\eta, \zeta)$ имеем

$$\zeta \Psi_0^{(+\gamma)}(\eta) + \Psi_1^{(+\gamma)}(\eta) + o\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \Phi_0^{(-\gamma)}(\zeta) + \frac{\Phi_1^{(-\gamma)}(\zeta)}{\eta} + o\left(\frac{1}{\eta}\right).$$

Учитывая, что $\Psi_0^{(+\gamma)}(\infty) = 1/(1+m) + \gamma$ и $\Phi_1^{(-\gamma)}(\eta) \equiv 0$, получим

$$\lambda_1 = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \Psi_1^{(+\gamma)}(\eta) = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left[\Phi_0^{(-\gamma)}(\zeta) - \left(\frac{1}{1+m} + \gamma \right) \zeta \right].$$

Тогда

$$\Psi_{1,\eta\eta} + \Phi_0 \Psi_{1,\eta} + \Psi_0 \Psi_1 = \left(\frac{1}{1+m} + \gamma \right) \lambda_1. \quad (12)$$

Граничные условия имеют вид $\Psi_1(0) = 0$, $\Psi_1(\infty) = \lambda_1$. Нетрудно проверить, что при учете двух членов разложений условия совместности для асимптотических граничных условий на выбранном луче выполняются. Учет дальнейших членов разложений можно провести аналогичным образом, но уточнения получаемых результатов можно также добиться увеличением расчетной области.

Система уравнений (7)–(11) нелинейная, поэтому требуется дополнительный анализ ее решений при различных величинах параметров m и γ . Для сравнения с результатами некоторых предшествующих работ удобно ввести параметр градиента

давления Хартри $\beta = 2m/(1+m)$. Анализ для случая $\gamma = 0$ [12] свидетельствует, что уравнения имеют два решения при $\beta \geq -0,03678$. Ветвь, отвечающую решениям с большими напряжениями на стенке ($U'(0)$), называют верхней, а с меньшими — нижней. В отличие от уравнения Фокнера–Скэн, решений, допускающих возвратное течение продольной компоненты скорости U_0 у стенки, не возникает (т.е. везде $U'(0) > 0$). В то же время на нижней ветви направление поперечного течения может менять знак при движении по нормали к стенке. При отсутствии продольного градиента давления ($\beta = 0$) систему рассматриваемых уравнений для нижней ветви можно свести к анализу уравнения для автомодельного пограничного слоя Блазиуса. Однако упрощенный анализ устойчивости решений, приведенный в работе [12], свидетельствует, что такое решение, вероятно, не может реализоваться на практике. Вместе с тем, продольная компонента скорости в решении с верхней ветви и трение на стенке мало отличаются от этих величин на нижней ветви, что затрудняет экспериментальную верификацию проведенного анализа [8].

В работе [3] было найдено несколько ветвей при некоторых значениях $\beta \leq 0$, соответствующих течениям типа пристенных струй с превышением скорости внешнего течения в пограничном слое. В этой же работе рассматривались случаи $\gamma = \pm 0,5$ (в обозначениях настоящей статьи). Отмечено, что при $\gamma = -0,5$ точка поворота смещается в область $\beta \geq 0,25$. При положительной величине $\gamma = 0,5$ происходит смещение точки поворота в область $\beta < -0,03678$. При этом происходит существенная перестройка ветвей. В частности, основная нижняя ветвь разделяется на несколько новых, что вероятно связано с возникновением отрыва потока. Очевидно также, что автомодельное решение полной задачи при этом возможно, если при $\pm\gamma$ существуют решения при одних и тех же β .

Нахождение асимптотических граничных условий

Асимптотические граничные условия нулевого порядка находились путем решения системы (7)–(11) как краевой задачи методом, описанным в работе [13], т.е. путем задания величины $U'_0(0)$ в качестве дополнительного граничного условия и нахождения в процессе решения параметра градиента давления Хартри β . Для решения использовалась среда MATLAB [14]. Примеры полученных таким образом диаграмм основных ветвей $U'_0(0)$ и $\Psi'_0(0)$ в зависимости от β для $\gamma = \pm 0,25$ и $\gamma = 0$, а также, для сравнения, зависимость $U'_0(0)$ от β для уравнения Фокнера–Скэн приведены на рис. 1. Видно, что варьирование γ приводит к смещению минимальных величин β : $\beta_{\min} \approx 0,3807, -0,0358$ и $-0,4857$ для $\gamma = -0,25, 0$ и $0,25$ соответственно. Поскольку граничные условия для несимметричного течения определяются парой $\pm\gamma$, то автомодельное течение в угле возможно только при таких β , для которых существуют решения в обоих случаях.

Зависимость минимального параметра градиента давления β_0 от γ для представленных ветвей показана на рис. 2. Интересно отметить, что автомодельное течение в угле при нулевом градиенте давления перестает существовать уже при $\gamma \approx 0,015$.

Уравнение (12) является линейным относительно Ψ_1 , поэтому нахождение его решения стандартным решателем MATLAB не представляет труда [14]. Примеры расчетов различных компонент асимптотических граничных условий для $\beta = 0,5$ приведены на рис. 3. Как можно видеть, асимметрия мало сказывается на распределении продольной компоненты скорости. В то же время величины Ψ_0 отличаются практически вдвое, а Φ_0 — в полтора раза. Следует также обратить внимание на то, что ряд величин, например, U_0 и Ψ_0 ,

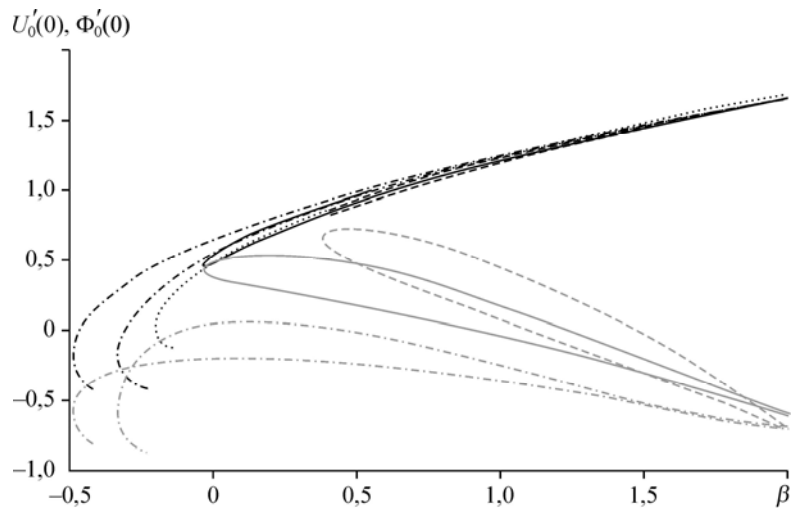


Рис. 1. Зависимости $U'_0(0)$ (черные линии) и $\Phi'_0(0)$ (серые линии) от β для $\gamma = -0,25$ (штриховые линии), $\gamma = 0$ (сплошные линии) и $\gamma = 0,25$ (штрихпунктирные линии), а также $U'_0(0)$ для уравнения Фокнера–Скэн (пунктирные линии).

выходят на постоянную величину вдали от стенки, а другие, например, Φ_0 , растут практически линейно при удалении от стенки. Эта особенность их поведения приводит к необходимости использования специальных подходов для ускорения сходимости при нахождении течения в угле, что будет описано в следующем разделе.

Численная модель и результаты

Для численного решения системы (1)–(4) с граничными условиями (5) на стенках и (6) на бесконечности предварительно преобразуем уравнения (2) и (3) путем их дифференцирования и комбинирования друг с другом в уравнения второй степени. Система уравнений примет вид

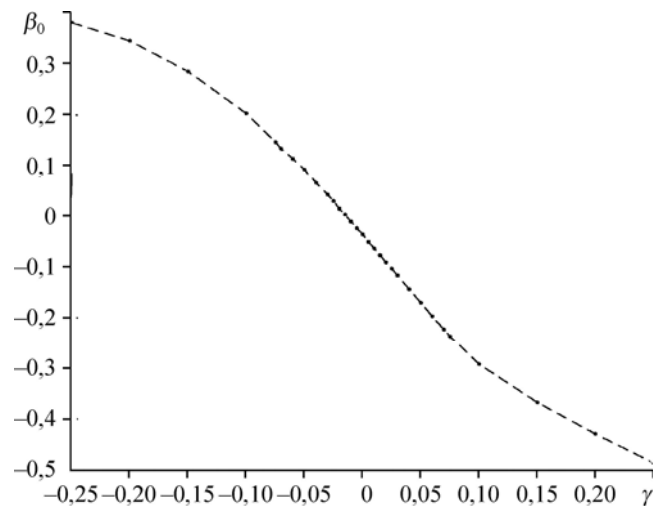


Рис. 2. Зависимость минимального параметра градиента давления β_0 от γ для представленных ветвей.

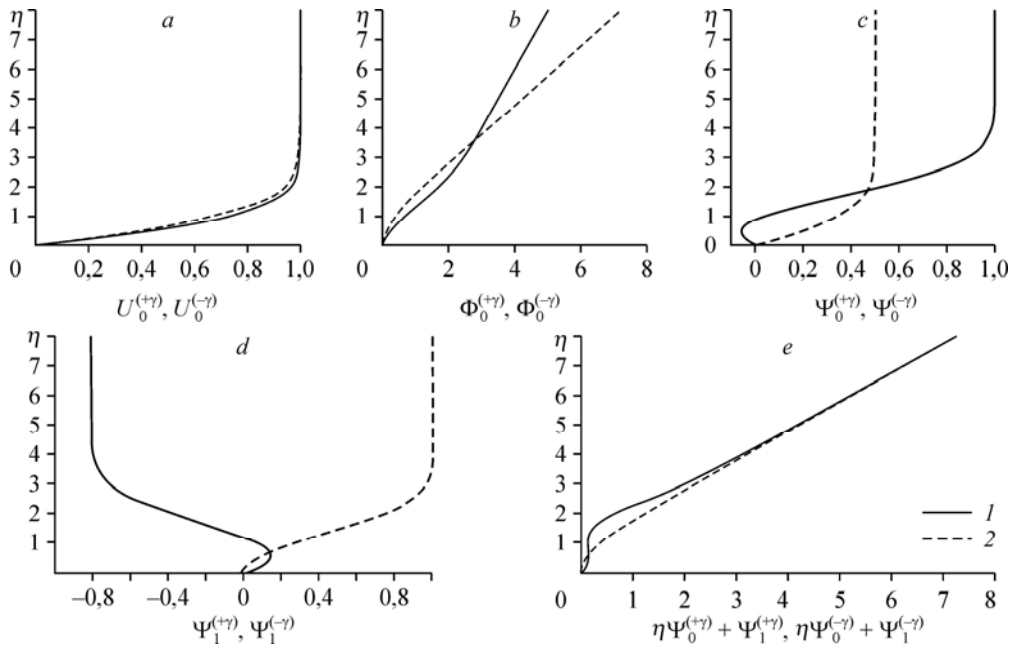


Рис. 3. Профили U_0 (a), Φ_0 (b), Ψ_0 (c), Ψ_1 (d) и $\eta\Psi_0 + \Psi_1$ (e) с асимптотическими граничными условиями верхней ветви при $\beta = 0,5$ для $\gamma = 0,5$ (1), $-0,25$ (2).

$$u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + \phi u_{\eta} + \psi u_{\zeta} + \frac{2m}{1+m}(1-u^2) = 0, \quad (13)$$

$$\phi_{\eta\eta} + \phi_{\zeta\zeta} = \frac{2u_{\eta}}{1+m} - \theta_{\zeta}, \quad (14)$$

$$\psi_{\eta\eta} + \psi_{\zeta\zeta} = \frac{2u_{\zeta}}{1+m} + \theta_{\eta}, \quad (15)$$

$$\theta_{\eta\eta} + \theta_{\zeta\zeta} + \phi\theta_{\eta} + \psi\theta_{\zeta} + \frac{2u}{1+m}[\theta + (1-m)(\eta u_{\zeta} - \zeta u_{\eta})] = 0, \quad (16)$$

который является более удобным для численного решения. Для дискретизации этой системы по пространственным переменным η и ζ будем использовать метод коллокаций. Выберем прямоугольную область с достаточно большими длинами сторон — $\eta_{\max} = L$ и $\zeta_{\max} = kL$ — и поставим однородные граничные условия (5) на стенках и асимптотические граничные условия

$$\begin{aligned} u(\eta, kL) &= U_0(\eta)^{(+\gamma)}, \quad \phi(\eta, kL) = \Phi_0(\eta)^{(+\gamma)}, \\ \psi(\eta, kL) &= kL\Psi_0^{(+\gamma)}(\eta) + \Psi_1^{(+\gamma)}(\eta), \quad \theta(\eta, kL) = kL\Theta_0^{(+\gamma)}(\eta) + \Theta_1^{(+\gamma)}(\eta) \text{ при } \zeta = \zeta_{\max} \text{ и} \\ u(L, \zeta) &= U_0(\zeta)^{(-\gamma)}, \quad \phi(L, \zeta) = L\Psi_0^{(-\gamma)}(\zeta) + \Psi_1^{(-\gamma)}(\zeta), \\ \psi(L, \zeta) &= \Phi_0(\zeta)^{(-\gamma)}, \quad \theta(L, \zeta) = -L\Theta_0^{(-\gamma)}(\zeta) - \Theta_1^{(-\gamma)}(\zeta) \text{ при } \eta = \eta_{\max}. \end{aligned}$$

В качестве граничных условий на стенках для θ будем использовать определение $\theta = \psi_{\eta} - \phi_{\zeta}$. Адекватность выбора L будем анализировать апостериори, проверяя независимость (с требуемой точностью) полученных результатов при увеличении L .

Выполним в уравнениях (13)–(16) следующую замену переменных:

$$\eta = \eta(s) = L \frac{1+s}{2+(1-s)\sigma_1}, \quad -1 \leq s \leq 1,$$

$$\zeta = \zeta(t) = kL \frac{1+t}{2+(1-t)\sigma_2}, \quad -1 \leq t \leq 1,$$

где $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$ — скалярные параметры, и заменим искомые величины u , ϕ , ψ и θ интерполяционными многочленами Лагранжа, выбирая в качестве узлов интерполяции по s и t корни многочлена Чебышева второго рода $U_{N_s}(s)$ и $U_{N_t}(t)$ степеней N_s и N_t соответственно, т.е.

$$s_m = \cos \frac{\pi m}{N_s + 1}, \quad m = 1, \dots, N_s,$$

$$t_n = \cos \frac{\pi n}{N_t + 1}, \quad n = 1, \dots, N_t,$$

а также $s_0 = 1$, $s_{N_s+1} = -1$ и $t_0 = 1$, $t_{N_t+1} = -1$. Требуя выполнения полученных уравнений в точках (s_m, t_n) , будем использовать для вычисления значений производных элементарных интерполяционных многочленов в этих точках метод, описанный в работе [15].

Решение полной задачи о течении в угле с введенными зависимыми переменными может оказаться неограниченным (например, ϕ может неограниченно возрасти вдали от ребра угла аналогично поведению асимптотических граничных условий, описанному в предыдущем разделе), поэтому в предшествующих работах было предложено разделять искомые решения на асимптотическую часть и «остаток» внутри расчетной области. Существует несколько вариантов такого разделения решения (см. [3], [8]). В настоящей работе предлагается следующее оригинальное преобразование:

$$\bar{u}(\eta, \zeta) = u(\eta, \zeta) - u(\eta, \zeta_{\max})u(\eta_{\max}, \zeta),$$

$$\bar{\phi}(\eta, \zeta) = \phi(\eta, \zeta) - \phi(\eta, \zeta_{\max}) \frac{\psi_\zeta(\eta_{\max}, \zeta)}{\psi(\eta_{\max}, \zeta_{\max})},$$

$$\bar{\psi}(\eta, \zeta) = \psi(\eta, \zeta) - \frac{\psi(\eta, \zeta_{\max})}{\psi(\eta_{\max}, \zeta_{\max})} \phi_\zeta(\eta_{\max}, \zeta),$$

$$\bar{\theta}(\eta, \zeta) = \theta(\eta, \zeta) - \frac{\psi_\eta(\eta, \zeta_{\max})}{\psi(\eta_{\max}, \zeta_{\max})} \phi_\zeta(\eta_{\max}, \zeta) + \phi(\eta, \zeta_{\max}) \frac{\psi_{\zeta\zeta}(\eta_{\max}, \zeta)}{\psi(\eta_{\max}, \zeta_{\max})}.$$

Это преобразование, отличающееся от аналитических преобразований применявшихся ранее, и являющееся удобным для численных расчетов, следует выполнять после дискретизации.

Стандартный для рассматриваемого рода нелинейных задач пакет NITSOL [9] демонстрирует очень медленную сходимость. Анализ проблемы свидетельствует, что это связано, по всей видимости, с почти вырожденностью якобиана представленной системы уравнений. Поэтому был разработан оригинальный метод расчета, описываемый ниже. Полученная система четырех матричных уравнений относительно дискретных аналогов $\bar{\phi}$, $\bar{\psi}$, \bar{u} и $\bar{\theta}$ сводилась неявно к двум нелинейным уравнениям исключением дискретных аналогов $\bar{\phi}$ и $\bar{\psi}$ из нелинейных уравнений, сформированных

после дискретизации (13) и (16), путем решения линейных уравнений, сформированных после дискретизации (14) и (15). При этом каждое линейное уравнение записывалось в виде уравнения Сильвестра:

$$AX + XB = C,$$

где X соответствует $\bar{\phi}$ либо $\bar{\psi}$, и решалось методом Бартельса–Стюарта [16].

Для решения полученной системы двух нелинейных матричных уравнений, которая далее будет рассматриваться как одно уравнение вида $F(z) = 0$, был разработан и применен оригинальный вариант гибридного крыловского метода [17]. Для заданного начального приближения z_0 предложенный метод находит приближенное решение этого уравнения по схеме

$$z_{j+1} = z_j - d_j x_j,$$

где x_j — вектор, обеспечивающий малость нормы невязки $\|F(z_j)x_j - F(z_j)\|_2 \leq \text{tol}$ (приближенный ньютоновский шаг), tol — заданная точность, $J(z_j) = \partial F / \partial z(z_j)$ — якобиан отображения F , d_j — демпфирующий параметр. При каждом новом значении j сначала делается шаг с $d_j = 1$. Если при этом $\|F(z_{j+1})\|_2 < \|F(z_j)\|_2$, то шаг считается успешным. В противном случае с помощью процедуры `fminbnd` [18] решается оптимизационная задача $\|F(z_j - dx_j)\|_2 \rightarrow \min_{0 \leq d \leq 1}$, и в качестве d_j берется найденное решение.

Для вычисления ньютоновского шага x_j использовался метод GMRES (обобщенных минимальных невязок) с правым предобуславливанием. То есть методом GMRES вычислялся вектор y_j , обеспечивающий требуемую малость нормы невязки: $\|(J(z_j)P)y_j - F(z_j)\|_2 \leq \text{tol}$, и x_j полагался равным Py_j . Здесь P — некоторая матрица, которая должна аппроксимировать матрицу, псевдообратную к $J(z_j)$, обеспечивая значительную кластеризацию спектра матрицы $J(z_j)P$ по сравнению со спектром исходной матрицы $J(z_j)$. Кроме того, умножение матрицы P на вектор не должно требовать большого числа операций. Исходя из этих соображений, P выбиралась равной прямой сумме двух матриц вида $U^{-1}L^{-1}P$, где $P^{-1}LU$ — стандартное LU -разложение с перестановками строк сеточного аналога лапласиана.

В описанном выше методе матрица $J(z_j)$ не требуется в явном виде. Необходимо лишь алгоритм ее умножения на заданный вектор h . Это умножение выполнялось приближенно в соответствии с асимптотическим равенством

$$J(z_j)h = \frac{1}{2\delta}(F(z_j + \delta h) - F(z_j - \delta h)) + O(\delta^2),$$

где δ выбиралось порядка квадратного корня из машинной точности. С целью повышения эффективности описанного метода, отображение F предварительно перемасштабировалось. Для этого делалась замена переменных $z \rightarrow \tilde{z}$, $F \rightarrow \tilde{F}$, где $\tilde{z} = Sz$, $\tilde{F} = SFS^{-1}$, а S — некоторая специально подобранная диагональная матрица.

Тестовые расчеты с различными величинами параметра асимметрии показывают, что течение очень чувствительно к γ . В качестве примера приведены некоторые результаты расчетов при $\beta = 0$ для $\gamma = 0$ и $0,01$ на рис. 4 и 5 соответственно (при диапазоне величин γ от нуля до $\pm 0,5$). Результаты для $\gamma = 0$ совпадают с данными, представлен-

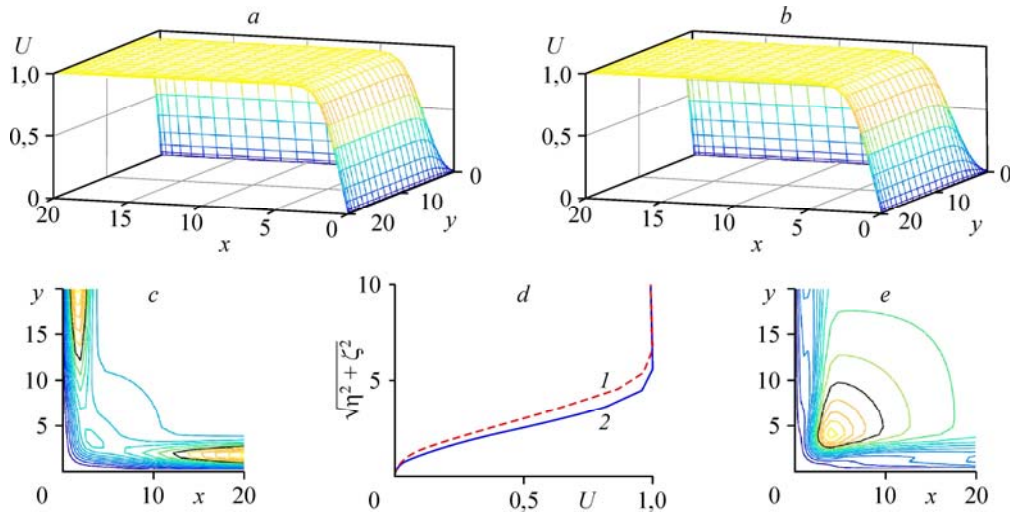


Рис. 4. Результаты для нижней (а, с) и верхней (b, e) ветвей граничных условий при $\beta=0$ и $\gamma=0$: распределения продольной компоненты скорости (а, b), изолинии с шагом 0,2 абсолютных величин поперечных компонент скорости $\sqrt{v^2 + w^2}$ (с, e) и профили продольной компоненты скорости вдоль биссектрисы угла (d) для нижней (1) и верхней (2) ветвей.

ными, например, в [3]. В то же время при $\gamma=0,01$ имеют место существенные искажения в распределениях поперечных компонент скорости по сравнению с симметричным случаем. При этом продольная компонента скорости меняется значительно слабее.

Другой вопрос, связанный с полученными результатами, — реализуемость рассматриваемых автомодельных течений на практике. Его формальное решение возможно, например, при рассмотрении задачи установления течения по аналогии с симметричным случаем [12], что выходит за рамки настоящей работы. Отметим, что качественное сравнение полученных автомодельных несимметричных течений с результатами расчетов полных урав-

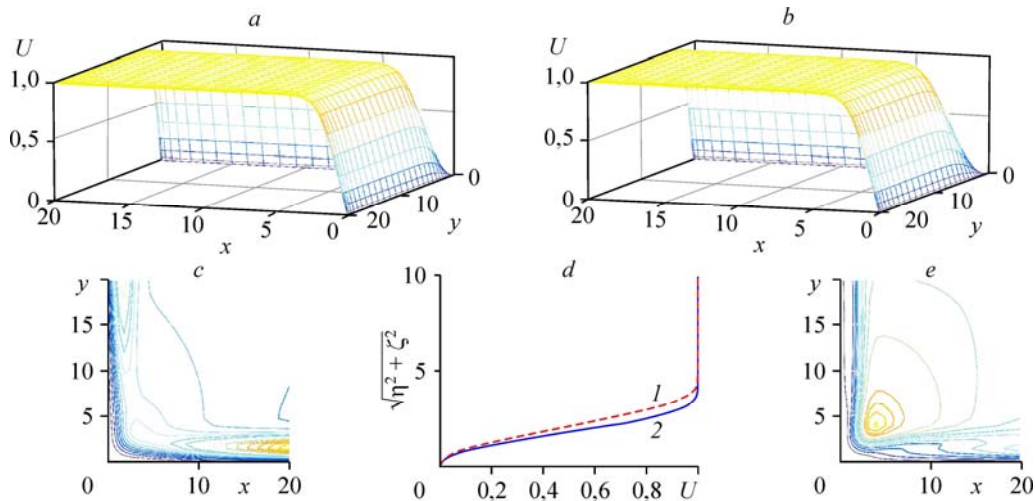


Рис. 5. Результаты для нижней (а, с) и верхней (b, e) ветвей граничных условий при $\beta=0$ и $\gamma=0,01$: распределения продольной компоненты скорости (а, b), изолинии с шагом 0,2 абсолютных величин поперечных компонент скорости $\sqrt{v^2 + w^2}$ (с, e) и профили продольной компоненты скорости вдоль биссектрисы угла (d) для нижней (1) и верхней (2) ветвей.

нений Навье–Стокса в несимметричной угловой конфигурации [19] свидетельствует в пользу реализуемости решения верхней ветви по крайней мере для значений β , близких к нулю, что характерно также для симметричного обтекания [12].

Выводы

Рассмотрены симметричные и несимметричные автомодельные течения вязкой несжимаемой жидкости вдоль прямого двугранного полубесконечного угла с продольным градиентом давления. Геометрия задачи сводится к рассмотрению течения в квадранте на плоскости с началом координат, совпадающим с вершиной угла. Для области изучаемого течения, ограниченной прямоугольником с одной из вершин, совпадающей с началом координат, впервые получена система совместных граничных условий. Разработан метод интегрирования уравнений, описывающих рассматриваемые автомодельные течения, превосходящий по скорости известные аналоги. Проанализировано асимптотическое поведение решений вдали от вершины угла. Как и при симметричном обтекании обнаружено два типа асимптотического поведения. Для обоих типов асимптотических граничных условий найдены распределения компонент скорости течения в угле. Показано, что течение очень чувствительно к параметру асимметрии: существенные изменения в распределениях поперечных скоростей наблюдаются уже при малых величинах этого параметра. Выдвинуто и качественно обоснованно предположение, что из двух полученных решений при наличии асимметрии на практике реализуется то, которое соответствует верхней ветви граничных условий.

Список литературы

1. **Корнилов В.И.** Пространственные пристенные турбулентные течения в угловых конфигурациях. 2-е изд. Новосибирск: Наука, 2013. 431 с.
2. **Zamir M.** Similarity and stability of the laminar boundary layer in a streamwise corner // Proc. Royal Society. A. 1981. Vol. 377, No. 1770. P. 269–288.
3. **Dhanak M.R., Duck P.W.** The effects of freestream pressure gradient on a corner boundary layer // Proc. Royal Society. A. 1997. Vol. 453. P. 1793–1815.
4. **Ridha A.** Flow along streamwise corners revisited // J. Fluid Mech. 2003. Vol. 476. P. 223–265.
5. **Pal A., Rubin S.G.** Asymptotic features of viscous flow along a corner // Quart. Appl. Math. 1971. Vol. 29. P. 91–108.
6. **Rubin S.G., Grossman B.** Viscous flow along a corner: Numerical solution of the corner layer equations // Quart. Appl. Math. 1971. Vol. 29, No. 2. P. 169–186.
7. **Ghia K.N.** Incompressible streamwise flow along an unbounded corner // AIAA J. 1975. Vol. 13, No. 7. P. 902–907.
8. **Vasiliev V.I.** Self-similar viscous incompressible flow along an unbounded corner // AIAA J. 1996. Vol. 34, No. 5. P. 946–952.
9. **Pernice M., Walker H.F.** NITSOL: a newton iterative solver for nonlinear systems // SIAM J. Sci. Comp. 1998. Vol. 19, No. 1. P. 302–318.
10. **Alizard F., Robinet J.-C., Guiho F.** Transient growth in a right-angled streamwise corner // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2013. Vol. 37. P. 99–111.
11. **Rubin S.G.** Incompressible flow along a corner // J. Fluid Mech. 1966. Vol. 26, No. 1. P. 97–110.
12. **Ridha A.** On the dual solutions associated with boundary-layer equations in a corner // J. Eng. Math. 1992. Vol. 26, No. 4. P. 525–537.
13. **Keller H.B., Cebeci T.** An inverse problem in boundary-layer flows: numerical determination of pressure gradient for a given wall shear // J. of Computational Physics. 1972. Vol. 10, No. 1. P. 151–161.
14. **Shampine L.F., Gladwell I., Thompson S.** Solving ODEs with MATLAB. UK: Cambridge University Press, 2003. 272 p.
15. **Weideman J.A.C., Reddy S.C.** A MATLAB differentiation matrix suite // ACM Trans. Math. Soft. 2000. Vol. 26, No. 4. P. 465–519.
16. **Bartels R., Stewart G.W.** Algorithm 432: solution of the matrix equation $A X + X B = C$ // Comm. ACM. 1972. Vol. 15, No. 9. P. 820–826.
17. **Brown P.N., Saad Y.** Hybrid Krylov methods for nonlinear systems of equations // SIAM J. Sci. Stat. Comp. 1990. Vol. 11, No. 3. P. 450–481.
18. **Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B.** Computer methods for mathematical computations. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, 1977. 259 p.
19. **Kirilovskiy S.V., Boiko A.B., Poplavskaya T.V.** On the laminar-turbulent transition in the boundary layer of streamwise corner // AIP Conf. Proc. American Institute of Physics. Vol. 1893, No. 1. 2017. P. 030149-1–030149-6.

*Статья поступила в редакцию 30 июня 2017 г.,
после доработки — 30 октября 2017 г.*