

УДК 519.676

Метод Монте-Карло для численного моделирования переноса лучистой солнечной энергии в кристаллических облаках*

Б.А. Каргин¹, Е.Г. Каблукова¹, Ц. Му³, С.М. Пригарин^{1,2}

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

²Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

³Университет МГУ-ППИ, ул. Гоцзидасюеюань, 1, Шэньчжэнь, КНР, 518172

E-mails: bkargin@osmf.sscs.ru (Каргин Б.А.), kablukovae@sscc.ru (Каблукова Е.Г.), smp@osmf.sscs.ru (Пригарин С.М.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 17, 2024.

Каргин Б.А., Каблукова Е.Г., Му Ц., Пригарин С.М. Метод Монте-Карло для численного моделирования переноса лучистой солнечной энергии в кристаллических облаках // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2024. — Т. 27, № 2. — С. 173–187.

Работа посвящена численным моделям, связанным с переносом излучения в ледяных облаках. Рассмотрена математическая модель кристаллических частиц нерегулярной формы и алгоритм моделирования таких частиц на основе построения выпуклой оболочки набора случайных точек. Исследованы два подхода к моделированию переноса излучения в оптически анизотропной облачности. В первом подходе используются предварительно вычисленные индикатрисы рассеяния для кристаллов различных форм и ориентаций. Во втором подходе не требуется знания индикатрис рассеяния, угол рассеяния излучения моделируется непосредственно при взаимодействии фотона с гранями кристалла. Такой подход позволяет достаточно просто настраивать входные параметры задачи при изменении микрофизических характеристик среды, включая форму, ориентацию, прозрачность частиц и шероховатость их границ, и не требует предварительных трудоемких вычислений. Изучено влияние флаттера на пропускание излучения облачным слоем и угловые распределения отраженного и пропущенного излучения.

DOI: 10.15372/SJNM20240204

EDN: TWAPQI

Ключевые слова: перенос излучения, метод Монте-Карло, перистые облака, геометрическая оптика.

Kargin B.A., Kablukova E.G., Mu Q., Prigarin S.M. Monte Carlo methods for numerical simulation of solar energy radiation transfer in crystal clouds // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2024. — Vol. 27, № 2. — P. 173–187.

The paper deals with numerical models related to radiation transfer in ice clouds. A mathematical model of crystal particles of irregular shape and an algorithm for modeling such particles based on constructing a convex hull of a set of random points are considered. Two approaches to simulating radiation transfer in optically anisotropic clouds are studied. One approach uses pre-calculated scattering phase functions for crystals of various shapes and orientations. In the other approach, no knowledge of the phase functions is required; the radiation scattering angle is modeled directly in the interaction of a photon with crystal

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (проект № 23-27-00345; Каблукова Е.Г., Пригарин С.М. ответственные за расчеты переноса излучения в оптически анизотропной облачности) и государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект № FWNM-2022-0002; Каргин Б.А. ответственный за вычисление индикатрис рассеяния, разработку и тестирование нового алгоритма переноса излучения).

faces. This approach makes it possible to simply adjust the input parameters of the problem to changing microphysical characteristics of the environment, including shape, orientation, transparency of particles and roughness of their boundaries, and does not require time-consuming preliminary calculations. The impact of flutter on radiation transfer by a cloud layer and angular distributions of reflected and transmitted radiation are studied.

Keywords: *radiation transfer, Monte Carlo method, cirrus clouds, geometrical optics.*

Введение

Ледяные кристаллические облака (перистые, перисто-слоистые и перисто-кучевые) регулярно покрывают около 20–30 % поверхности Земли и оказывают существенное влияние на радиационный теплообмен в атмосфере, изменяя альбедо климатической системы и поток уходящего из атмосферы теплового излучения [1–3]. Эти обстоятельства обуславливают неослабевающий интерес метеорологов, климатологов и разработчиков моделей общей циркуляции атмосферы к проблеме построения радиационной модели перистой облачности. Для разработки такой численной модели, очевидно, необходимо прежде всего знание таких оптических характеристик кристаллических облаков, как индикатрисы рассеяния и сечения ослабления излучения частицами, содержащимися в облаках. Для расчета этих характеристик, в свою очередь, нужна детальная информация о структуре микрофизических параметров облачности: концентрации и распределения по составу, размерам и пространственной ориентации частиц несферических форм. В силу чрезвычайной изменчивости этих характеристик во времени и пространстве микрофизическая и оптическая модели кристаллических облаков могут быть адекватно описаны только в терминах случайных функций, что, в свою очередь, позволяет строить не только статистически усредненные радиационные модели, но и оценивать пространственно-временные вариации параметров радиационных полей. Решение этой непростой задачи возможно только методом Монте-Карло.

Согласно экспериментальным данным большая часть ледяных облачных частиц имеет неправильную и сильно изменчивую форму [4]. В частности, в [5] показано, что только 3 % ледяных кристаллов арктических облаков имеют идеально правильную форму (в виде гексагональных призм, пластинок, игл, дендритов), и до 90 % частиц атмосферного льда в слоистых облаках могут иметь неправильную форму во всех температурных интервалах [6]. Эти исследования объясняют, почему при наблюдении перистых облаков гало и другие оптические явления, характерные для правильных многогранных кристаллов льда, наблюдаются довольно редко. Большинство численных расчетов оптических характеристик ледяных кристаллов выполнены для частиц правильной формы [4, 7–9], но в [10] приведены результаты вычисления индикатрис рассеяния для частиц с шероховатой поверхностью и частиц случайной формы со случайно варьирующимся углом между гранями. В работе [11] представлены индикатрисы рассеяния для моделей кристаллов, полученных из частиц правильной формы путем отсекаания от них частей случайно наклоненными плоскостями.

В данной работе кратко описан новый алгоритм компьютерного построения случайных реализаций трехмерных выпуклых тел, для которых геометрические параметры подчиняются заданным законам распределения вероятности. Такие модели имитируют ледяные облачные частицы случайных размеров и нерегулярных форм. Более подробно этот алгоритм изложен в [12]. В оптике перистых облаков наиболее часто используются гексагональные призмы в качестве моделей ледяных кристаллов. Предложенный класс

моделей частиц дополняет разнообразие уже исследованных регулярных [7, 13] и случайных [10, 11] моделей кристаллических частиц.

В пункте 2 кратко описан алгоритм метода Монте-Карло оценки индикатрис рассеяния и сечений ослабления для кристаллических частиц.

Из-за большого многообразия микрофизических свойств реальных кристаллических частиц задача рассеяния света кристаллами неидеальных форм оказывается весьма сложной. Для ее решения требуются огромные массивы начальных данных, учитывающих форму, размеры и ориентацию частиц.

В п. 3 представлен новый алгоритм метода Монте-Карло моделирования переноса оптической радиации в кристаллической облачности, в котором не требуется предварительный расчет анизотропных распределений рассеяния. В данном алгоритме непосредственно при столкновении фотона с частицей выбирается форма и ориентация данной частицы, и моделирование угла рассеяния производится по законам отражения и преломления геометрической оптики. В четвертом пункте представлены результаты численных тестовых расчетов для задачи переноса излучения в ледяных облаках.

1. Модели кристаллических частиц случайной формы

В качестве моделей кристаллических частиц неправильной формы строятся выпуклые многогранники со случайным положением вершин, т.е. выпуклые оболочки случайного набора точек, расположенных в некотором ограниченном трехмерном подпространстве [14]. Вершины многогранника могут определяться детерминировано или моделироваться случайно по заданному закону распределения так, чтобы в среднем воспроизводились характерные для частиц отношения длины, ширины и высоты. Так же количество вершин многогранника либо задается пользователем, либо моделируется случайно по некоторому закону распределения с заданным математическим ожиданием и дисперсией.

Для построения выпуклой оболочки применяется инкрементальный алгоритм [15]. Задается ограниченная область пространства, в которой происходит моделирование. Начальная фигура является тетраэдром с вершинами, координаты которых моделируются в заданном объеме по некоторому закону распределения. Дальнейшее построение многогранника происходит путем моделирования следующей случайной точки и проверки, является ли эта точка внутренней для построенного многогранника. Если точка лежит за пределами построенной фигуры, она становится новой его вершиной. Моделирование происходит до тех пор, пока число вершин не достигнет требуемого числа.

На основе алгоритма, описанного в [12, 15], разработана программа “Convex Hull”, которая в качестве результата выдает заданное или случайное число граней построенного выпуклого многогранника, координаты его вершин, а также для каждой грани фиксируются упорядоченные наборы вершин. Они упорядочиваются таким образом, чтобы векторное произведение полученных векторов-ребер соответствовало правилу правой руки и определяло направление внешней нормали к грани. Такие упорядоченные очереди удобны при вычислении матриц рассеяния излучения методом трассировки лучей. Программа написана на языке C++, в ней реализована функция визуализации многогранников с помощью библиотека OpenGL.

На рисунке 1 приведены примеры построенных выпуклых многогранников, для которых случайные точки, используемые в построении многогранников, моделируются равномерно в кубе.

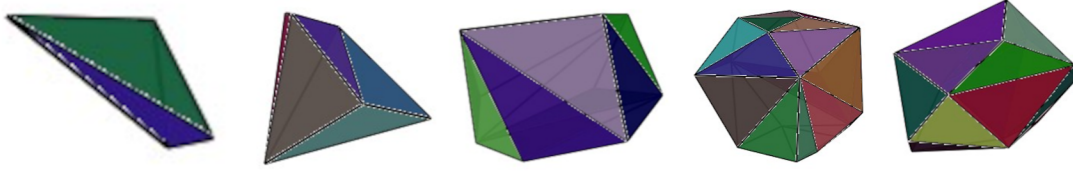


Рис. 1. Модели кристаллических частиц случайной формы

2. Вычисление методом Монте-Карло индикатрис и сечений рассеяния световых волн ориентированными кристаллами

Для решения задачи переноса излучения через плоский слой кристаллического облака необходимо рассчитать индикатрисы рассеяния $G(\omega', \omega, r)$, зависящие от направления входящего ω' и выходящего ω излучений, а также сечения ослабления $\Sigma_e(\omega, r)$ и рассеяния $\Sigma_s(\omega, r)$ излучения кристаллическими частицами. В случае, когда размер кристалла значительно превышает длину волны излучения, т.е. отношение $D/\lambda > 100$, где λ — длина волны, а D — характерный диаметр частицы, для определения макрофизических параметров рассеяния (сечений ослабления и рассеяния, а также индикатрис рассеяния) достаточно точными и наименее трудоемкими являются приближение геометрической оптики и алгоритм трассировки лучей. В данном алгоритме траектория оптического излучения представляется в виде ломаной линии, вершины которой — это точки столкновения с гранями кристалла или с неоднородностями внутри кристалла. Описание взаимодействия излучения и плоской грани кристалла соответствует модели, в которой отражение и преломление света на грани кристалла происходят по законам Снеллиуса и Френеля.

Пусть \mathbf{n} — вектор внешней нормали к поверхности грани кристалла в точке падения светового кванта на эту грань, выраженный в глобальной системе координат. В таком случае при падении луча с направлением ω на поверхность грани с вероятностью $R(\omega, \mathbf{n})$ происходит зеркальное отражение в направлении $\omega_{\text{refl}} = \omega - 2(\omega, \mathbf{n})\mathbf{n}$, а с вероятностью $1 - R(\omega, \mathbf{n})$ происходит преломление в направлении $\omega_{\text{refr}} = \nu\omega - D\mathbf{n}$. Здесь $R(\omega, \mathbf{n})$ — коэффициент отражения Френеля, который для удобства вычислений можно представить в следующей форме [16]:

$$R(\omega, \mathbf{n}) = \frac{(|A| - B)^2(A^2B^2 + C^2)}{(|A| + B)^2(|A|B + C)^2}, \quad (1)$$

$$A = (\omega, \mathbf{n}), \quad B = \sqrt{1/\nu^2 - 1 + A^2}, \quad C = 1 - A^2, \quad D = A - \text{sign}(A)B,$$

$$\nu = \begin{cases} 1/n_{\text{ice}}, & (\omega, \mathbf{n}) \leq 0, \\ n_{\text{ice}}, & (\omega, \mathbf{n}) > \sqrt{1 - 1/n_{\text{ice}}^2}. \end{cases}$$

Через n_{ice} обозначена действительная часть комплексного показателя преломления льда относительно воздуха $\nu_{\text{ice}} = n_{\text{ice}} + i\kappa_{\text{ice}}$. При $0 \leq A \leq \sqrt{1 - 1/n_{\text{ice}}^2}$ в силу закона полного внутреннего отражения полагаем $R(\omega, \mathbf{n}) = 1$. Действительная часть показателя прелом-

ления отвечает за отражение и преломления света на гранях кристалла, а мнимая κ_{ice} часть отвечает за ослабление пучка в результате поглощения внутри кристалла.

При нормальном падении света на грань кристалла, т. е. для $\omega = -\mathbf{n}$,

$$R = \left(\frac{n_{\text{ice}} - 1}{n_{\text{ice}} + 1} \right)^2. \quad (2)$$

Для вычисления индикатрис рассеяния $G(\omega', \omega, r)$ фиксируется набор направлений входящего излучения $\omega'_{ij} = (\cos \varphi'_i \sin \theta'_j, \sin \varphi'_i \sin \theta'_j, \cos \theta'_j)$, заданных в полярной системе координат, где θ'_j и φ'_i — зенитный и азимутальный углы вектора ω'_{ij} , $\theta'_j \in [0, \pi]$, $\varphi'_i \in [0, 2\pi]$, $j = 1, \dots, N_{\theta'}$, $i = 1, \dots, N_{\varphi'}$. Для каждого ω'_{ij} методом Монте-Карло оцениваются вероятности рассеяния G_{ijkl} в элемент телесного угла $\Omega_{kl} = \{\omega = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) : \theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}], \varphi \in [\varphi_l, \varphi_{l+1}]\}$. Здесь $k = 1, \dots, N_{\theta}$, $l = 1, \dots, N_{\varphi}$. Таким образом 4-х мерные “матрицы” G_{ijkl} являются аппроксимацией индикатрисы рассеяния $G(\omega', \omega, r)$ [17].

Вследствие отсутствия круговой симметрии кристаллов среда, состоящая из кристаллических частиц с заданной ориентацией, является анизотропной, поэтому сечение ослабления $\Sigma_e(\omega, r) = \Sigma_s(\omega, r) + \Sigma_a(\omega, r)$; сечения рассеяния $\Sigma_s(\omega, r)$ и поглощения $\Sigma_a(\omega, r)$ зависят от вектора направления движения светового кванта ω . Зависимость $\Sigma_e(\omega, r)$ и $\Sigma_s(\omega, r)$ от радиуса-вектора r в глобальной системе координат означает, что среда может быть неоднородной по пространственным координатам. Для прозрачных частиц (кристаллы чистого льда для излучения видимого диапазона) мнимая часть коэффициента преломления $\kappa = 0$, поглощение отсутствует, и $\Sigma_e(\omega, r) = \Sigma_s(\omega, r)$. Если $\kappa \neq 0$, то часть излучения поглощается внутри кристалла. В отличие от модели поглощения фотонов частицами аэрозолей или каплями воды, в которой поглощение происходит при столкновении, в данном случае пучок излучения ослабляется на всей траектории фотона внутри частицы. Для фиксированного направления входящего излучения ω' сечение поглощения при столкновении с частицей оценивается методом Монте-Карло:

$$\Sigma_a(\omega') = \sigma_{a, \text{cr}} L(\omega').$$

Здесь $L(\omega')$ — средняя длина траекторий фотонов внутри кристалла для направления ω' входящего излучения и фиксированной ориентации кристалла, $\sigma_{a, \text{cr}} = 4\pi\kappa/\lambda$ — коэффициент поглощения кристаллического вещества для длины волны излучения λ (см. [18, с. 99–100]).

Процедура трассировки лучей позволяет оценивать матрицы $\Sigma_{ij}(r)$, которые являются приближениями для $\Sigma_s(\omega, r)$ в случае, если $\omega = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$, $\theta \in [\theta_i, \theta_{i+1}]$, $\varphi \in [\varphi_j, \varphi_{j+1}]$, одновременно с расчетом элементов матрицы G_{ijkl} . С этой целью для каждого кристалла и направления ω'_{ij} оценивается лучевая составляющая рассеяния, равная средней площади S_{ij} проекции кристалла на плоскость, перпендикулярную направлению ω'_{ij} . Пусть кристалл содержится внутри шара радиуса R , и плоскость, перпендикулярная вектору ω'_{ij} , пересекает шар по кругу C_{ij} . Тогда

$$S_{ij} = \pi R^2 N_{ij}^r / N_{ij},$$

где N_{ij} — число смоделированных точек, равномерно распределенных внутри круга C_{ij} , а N_{ij}^r — число точек, которые оказались внутри кристалла. Для некоторых частиц регулярной формы значения S_{ij} известны для различных направлений ω'_{ij} . Например, площадь проекции правильной шестиугольной призмы с диаметром основания d и высотой

бокового ребра h на плоскость, перпендикулярную вектору $(\cos \nu \sin \theta, \sin \nu \sin \theta, \cos \theta)$ вычисляется по формуле [7]

$$S(\theta, \nu) = \frac{3\sqrt{3}d^2}{8} \sin \theta + dh \cos \theta \cos(\pi/6 - \nu).$$

Для хаотически ориентированных гексагональных призм, с учетом интегрирования по всем входящим направлениям, среднее значение площади проекции

$$S_{\text{mean}} = \frac{3}{8} (\sqrt{3}d^2/4 + dh).$$

Согласно теореме оптической экстинкции [7], дифракционная составляющая рассеяния равна лучевой составляющей S_{ij} . Поэтому, учитывая дифракционную составляющую, сечение рассеяния $\Sigma_{ij} = 2S_{ij}$ в направлении ω_{ij} .

Предположим, что в единичном объеме среды присутствует набор кристаллов из m массивов частиц, сгруппированных по признаку форм, а общее число частиц в единице объема равно $M = \sum_{\nu=1}^m m_{\nu}$, где m_{ν} — счетная концентрация частиц ν -го типа. Все частицы каждой группы могут иметь разные размеры, которые являются случайными величинами, распределенными с плотностью $P_{\nu}(\rho)$, $\nu = \overline{1, m}$. В качестве размера частиц несферических форм ρ будем рассматривать величину форм-фактора — отношение длины выделенной главной оси частицы к выделенному эффективному диаметру основания. Для описания случайных ориентаций кристаллов в трехмерном пространстве, заданных плотностями распределения вероятностей $P_{\Theta, \nu}(\alpha, \beta, \gamma)$, используется система угловых координат Эйлера α, β, γ , определяющих вращение частиц относительно глобальной декартовой системы координат [20] (см. рис. 2).

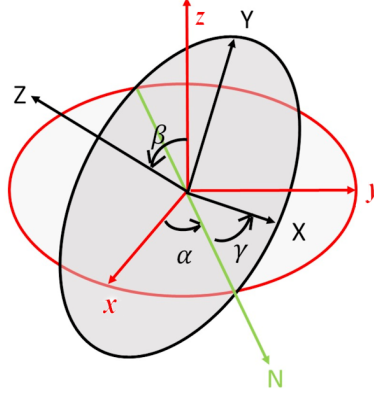


Рис. 2. Определение угловых координат Эйлера: система координат XYZ получена вращением глобальной системы координат xyz на углы α, β, γ

Тогда сечение рассеяния $\Sigma_s(\omega, r)$, сечение ослабления $\Sigma_a(\omega, r)$ и индикатриса рассеяния $G(\omega', \omega, r)$, осредненные по распределениям размеров, форм и ориентаций кристаллов, вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \Sigma_s(\omega', r) &= \sum_{\nu=1}^m m_{\nu} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} P_{\Theta, \nu}(\alpha, \beta, \gamma) P_{\nu}(\rho_{\nu}) \Sigma_{s, \nu}(\omega'(\alpha, \beta, \gamma), r, \rho_{\nu}) d\rho_{\nu} d\alpha d\beta d\gamma, \\ \Sigma_a(\omega', r) &= \sum_{\nu=1}^m m_{\nu} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} P_{\Theta, \nu}(\alpha, \beta, \gamma) P_{\nu}(\rho_{\nu}) \Sigma_{a, \nu}(\omega'(\alpha, \beta, \gamma), r, \rho_{\nu}) d\rho_{\nu} d\alpha d\beta d\gamma, \quad (3) \\ G(\omega', \omega, r) &= \sum_{\nu=1}^m m_{\nu} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} P_{\nu}(\rho_{\nu}) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_{\Theta, \nu}(\alpha, \beta, \gamma) G_{\nu}(\omega'(\alpha, \beta, \gamma), \omega, r, \rho_{\nu}) d\alpha d\beta d\gamma d\rho_{\nu}. \end{aligned}$$

Для частиц, изображенных на рис. 3, методом трассировки лучей были рассчитаны элементы матрицы G_{ijkl} анизотропных распределений рассеяния и сечения рассеяния $\Sigma_s(\omega')$. Для таких моделей частиц из-за их вращения вокруг горизонтальной оси индикатриса рассеяния $G(\omega', \omega)$ и сечение ослабления не зависят от азимутального угла входящего излучения, для этих функций будем использовать те же обозначения $G(\theta', \theta, \varphi)$ и $\Sigma_s(\theta')$.

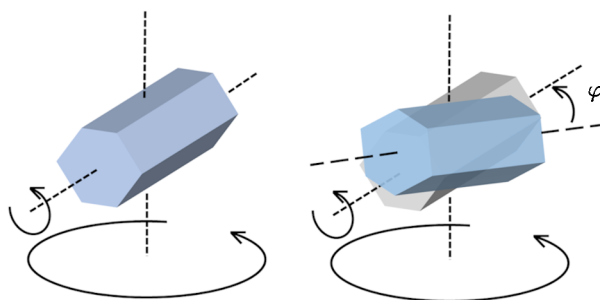


Рис. 3. Положение и форма ледяных частиц: горизонтальный столбик (слева), столбик с преимущественно горизонтальной ориентацией и углом флаттера φ (справа)

На рис. 4 приведена зависимость коэффициента рассеяния излучения $\Sigma_s(\mu')$ ледяными гексагональными столбиками, ориентированными горизонтально, и гексагональными столбиками, ось которых случайно наклонена относительно горизонтальной плоскости на угол в промежутке $[0, \pi/12]$, от косинуса угла μ' между направлением входящего излучения и осью z .

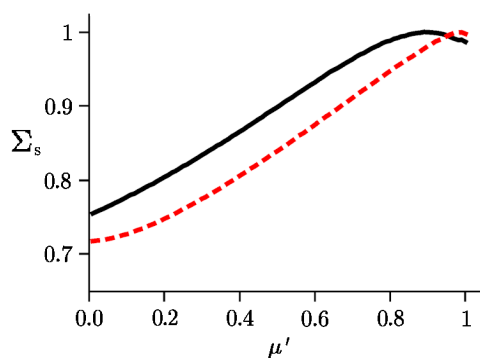


Рис. 4. Зависимость коэффициента рассеяния $\Sigma_s(\mu')$ от косинуса μ' зенитного угла входящего излучения для преимущественно горизонтально ориентированных столбиков со случайным углом флаттера, лежащем в пределах $[0, 15^\circ]$ (сплошная линия) и горизонтально ориентированных столбиков (штриховая линия)

3. Два способа моделирования переноса излучения в кристаллической среде

Рассмотрим задачу прохождения оптического излучения через плоский слой $0 \leq z \leq H$ рассеивающего и поглощающего вещества. Взаимодействие фотонов с веществом будем характеризовать коэффициентами ослабления $\Sigma_e(\omega', r)$, рассеяния $\Sigma_s(\omega', r)$

и поглощения $\Sigma_a(\omega', r)$, а также индикатрисой рассеяния $G(\omega', \omega, r')$, нормированной следующим образом:

$$\int_{\Omega} G(\omega', \omega, r') d\omega = 1.$$

Здесь ω' и ω — единичные векторы направлений движения фотона до и после рассеяния соответственно. Граница $z = 0$ плоского слоя $0 < z < H$, заполненного кристаллическими частицами, освещена бесконечно широким световым потоком в направлении ω_0 . Требуется вычислить поглощение, пропускание и интегральное альbedo излучения облачным слоем.

Процесс распространения фотонов можно описать интегральным уравнением переноса для плотности столкновений $f(\omega, r)$ [16]:

$$f(\omega, r) = \int_X k(\omega', r', \omega, r) f(\omega', r') d\omega' dr' + \psi(\omega, r), \quad (4)$$

где $\psi(\omega, r)$ — плотность начальных столкновений в точке r в направлении ω . Ядро уравнения (4) имеет вид

$$k(\omega', r', \omega, r) = \frac{\Sigma_s(\omega', r')}{\Sigma_e(\omega', r')} G(\omega', \omega, r') \frac{\Sigma_e(\omega, r) e^{-\tau(r', r)}}{|r - r'|^2} \delta\left(\omega - \frac{r - r'}{|r - r'|}\right) \quad (5)$$

и является плотностью вероятности перехода из точки (ω', r') в точку (ω, r) , определяющей марковскую цепь столкновений фотонов с элементами вещества. В (5) $\tau(r', r)$ — оптическая длина пути от точки r' до точки r , $\delta(\omega)$ — дельта-функция Дирака. Для случая однородного оптически анизотропного рассеивающего слоя $\Sigma_e(\omega, r) = \Sigma_e(\omega)$ оптическая длина $\tau(r', r) = \Sigma_e\left(\frac{r - r'}{|r - r'|}\right) |r - r'|$ зависит не только от расстояния между точками r и r' , но и от направления $\omega = \frac{r - r'}{|r - r'|}$.

Требуется оценить линейные функционалы от решения уравнения (4) вида $J_\chi = (f(\omega, r), \chi(\omega, r))$, где $\chi(\omega, r) \geq 0$ — некоторая неотрицательная функция. Для поставленной задачи в уравнении (4) функция источника определяется выражением $\psi(\omega, r) = \delta(z)\delta(\omega - \omega_0)$, где $r = (x, y, z)$, а функции, определяющие альbedo $\chi_a(\omega, r)$ и пропускание $\chi_{tr}(\omega, r)$ кристаллического слоя, равны

$$\chi_{tr}(\omega, r) = \begin{cases} 1 & \text{при } z \geq H, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad \chi_a(\omega, r) = \begin{cases} 1 & \text{при } z < 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Стандартные алгоритмы Монте-Карло решения уравнения (4) в рассеивающих средах требуют предварительного вычисления функций $\Sigma_e(\omega, r)$ и $G(\omega', \omega, r)$. Для оценки функционалов J_χ моделируются траектории движения фотонов в виде ломаных линий со случайными длинами прямолинейных участков и случайными углами изменения направления движения в точках рассеяния [16, 19]. Длина свободного пробега $|r - r'|$ моделируется согласно плотности вероятности $\Sigma_e(\omega, r(t)) \exp\left(-\int_0^t \Sigma_e(\omega, r(t_1)) dt_1\right)$, где $r(t) = r' + t \frac{r - r'}{|r - r'|}$. Если фотон вылетел из среды, то траектория обрывается и моделируется новая траектория. Если фотон вылетел в полупространства $z > H$ или $z < 0$, то в соответствующие счетчики для функционалов $J_{\chi_{tr}}$ или J_{χ_a} заносится случайная величина

$$W = \prod_{m=1}^M \frac{\Sigma_s(\omega'_m, r_m)}{\Sigma_e(\omega'_m, r_m)},$$

где r_M — координаты M -й точки столкновения непосредственно перед вылетом, ω'_m — направление движения фотона до m -го столкновения. Моделирование нового направления движения ω при столкновении с частицей при условии, что предыдущее направление движения равно $\omega' = (\cos \varphi' \sin \theta', \sin \varphi' \sin \theta', \cos \theta')$, производится согласно плотности распределения, являющейся линейной или кусочно-постоянной аппроксимацией функций $G_{ij}(\psi, \nu)$, $G_{i+1j}(\psi, \nu)$, $G_{ij+1}(\psi, \nu)$, $G_{i+1,j+1}(\psi, \nu)$, где $\theta' \in (\theta_i, \theta_{i+1})$, $\varphi' \in (\varphi_j, \varphi_{j+1})$. Подробное описание этого шага алгоритма представлено в [21]. Алгоритм моделирования направления движения фотона после рассеяния в случае, если индикатриса $G(\omega', \omega, r)$ не зависит от азимутального угла излучения до рассеяния, приведен в [19].

Алгоритм, в котором угол рассеяния моделируется по индикатрисе, имеет ряд ограничений. Первое из них — необходимость обширных предварительных расчетов функций $G(\omega', \omega, r)$ и $\Sigma_e(\omega, r)$, требующих значительных вычислительных ресурсов и последующего хранения большого банка данных в памяти компьютера. Второе ограничение связано с тем, что каждое изменение микрофизических параметров рассеивающей среды (например, изменение концентраций частиц разного типа или учет разных форм, шероховатости граней кристаллов, изменение длины волны излучения) требует пересчета этих функций.

Рассмотрим альтернативный алгоритм, основанный на сочетании прямого моделирования методом Монте-Карло траекторий фотонов и метода трассировки лучей при моделировании угла рассеяния. В этом алгоритме процедура предварительного расчета индикатрисы рассеяния $G(\omega', \omega, r)$ не требуется. Заранее определяется зависимость коэффициентов ослабления $\Sigma_e(\omega, r)$ и рассеяния $\Sigma_s(\omega, r)$ от направления входящего излучения ω для заданных микрофизических параметров рассеивающей среды (концентрация и ориентация кристаллов различных форм) согласно формулам (3). Моделирование длины свободного пробега производится согласно значениям $\Sigma_e(\omega, r)$. В очередной точке столкновения r_m по значению $\Sigma_s(\omega'_m, r_m)/\Sigma_e(\omega'_m, r_m)$ определяется произошло поглощение или рассеяние фотона. Если произошло рассеяние, фотон, имеющий направление движения $\omega'_m(\theta_m, \eta_m)$, попадает на поверхность кристалла. Его форма и пространственная ориентация моделируются по соответствующим распределениям $P_\nu(\rho_\nu)$, $P_{\Theta, \nu}(\alpha, \beta, \gamma)$. Для определения координат точки пересечения траектории фотона и грани кристалла можно использовать следующий алгоритм. В опорную сферу с центром в точке r_m помещается выбранная частица. Радиус опорной сферы R выбирается таким образом, чтобы кристалл полностью помещался внутри нее. В плоскости $z = z_m$ моделируется случайная точка $(x'_\zeta, y'_\zeta, z'_\zeta)$, равномерно распределенная в круге $(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 \leq R^2$, до тех пор, пока она не попадет в кристалл. Затем производится поворот плоскости $z = z_m$ на угол θ_m относительно оси Ox и на угол η_m относительно оси Oz таким образом, чтобы вектор ω'_m был параллелен вектору нормали преобразованной плоскости. И новые координаты $(x_\zeta, y_\zeta, z_\zeta)$ смоделированной точки определяются согласно формуле

$$\begin{bmatrix} x_\zeta \\ y_\zeta \\ z_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \eta_m & -\sin \eta_m & 0 \\ \sin \eta_m & \cos \eta_m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_m & 0 & \sin \theta_m \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_m & 0 & \cos \theta_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_\zeta \\ y'_\zeta \\ z'_\zeta \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Способом, описанным в [22], определяется точка пересечения вектора $-\omega'_m$ с гранью кристалла. Дальнейшее моделирование направления движения фотона внутри кристалла подчиняется законам отражения и преломления (1), (2) в приближении геометрической оптики и проводится аналогично алгоритму вычисления индикатрис рассеяния [9, 17].

4. Результаты численного моделирования переноса солнечного излучения в кристаллических облаках

При тестировании представленных алгоритмов переноса излучения в кристаллических средах рассматривалась следующая смесь частиц: 20 % — гексагональные столбики с форм-фактором 10; 50 % — пластинки — гексагональные призмы с форм-фактором 0.3; 30 % — сферы. Частицы хаотически ориентированы.

Коэффициент ослабления излучения $\Sigma_e = 0.03 \text{ м}^{-1}$. Проведена серия расчетов, для каждого из которых оптическая толщина облачного слоя фиксирована и лежит в интервале от 1 до 10, альбедо однократного рассеяния — 0.9. Верхняя граница слоя освещена равномерным стационарным потоком излучения в вертикальном направлении. Вычисляются вероятности отражения R , пропускания T и поглощения A излучения облачным слоем, состоящим из ледяных частиц, в предположении, что $R + T + A = 1$. Расчеты выполнены двумя описанными выше алгоритмами.

В таблице 1 представлены оценки коэффициентов R , A , T , а также их среднеквадратические отклонения ε_R , ε_A , ε_T для различных значений оптической толщины облачного слоя τ , рассчитанные по алгоритму моделирования траекторий фотонов с использованием индикатрисы рассеяния $G(\omega', \omega)$. В последнем столбце таблицы приведены значения трудоемкостей оценки пропускания $S_T = t\sqrt{V\xi_T}$. Здесь $V\xi_T$ — дисперсия оценки T , t — среднее время моделирования одной траектории.

Таблица 1. Вероятности отражения R , поглощения A и пропускания T излучения слоем оптической толщины τ , рассчитанные по стандартному алгоритму, и их среднеквадратические отклонения ε_R , ε_A , ε_T

τ	$R \pm \varepsilon_R$	$A \pm \varepsilon_A$	$T \pm \varepsilon_T$	$S_T \times 10^5$
1	0.06432 ± 0.00008	0.11364 ± 0.00010	0.822040 ± 0.00011	1.42
2	0.10822 ± 0.00009	0.23419 ± 0.00013	0.657590 ± 0.00014	4.35
3	0.13624 ± 0.00010	0.34706 ± 0.00014	0.516691 ± 0.00015	7.07
4	0.15345 ± 0.00011	0.44573 ± 0.00015	0.400818 ± 0.00015	8.69
5	0.16365 ± 0.00012	0.52830 ± 0.00015	0.308050 ± 0.00014	9.12
10	0.17721 ± 0.00012	0.74562 ± 0.00014	0.077161 ± 0.00008	4.27

В табл. 2 даны аналогичные результаты, полученные по алгоритму без использования индикатрисы рассеяния. Число траекторий фотонов для данных расчетов равно 10^8 . Видно, что трудоемкость второго алгоритма в несколько раз превышает трудоемкость алгоритма с использованием индикатрисы рассеяния. Но в данном случае не учитывается тот факт, что для расчета значений индикатрисы рассеяния с приемлемой точностью требуется значительное время. Кроме того, этот факт затрудняет расчеты особенно в тех случаях, когда состав рассеивающего слоя неоднороден и зависит от геометрических координат.

Таблица 2. Вероятности отражения R , поглощения A и пропускания T излучения слоем оптической толщины τ , рассчитанные по алгоритму без использования индикатрисы рассеяния

τ	$R \pm \varepsilon_R$	$A \pm \varepsilon_A$	$T \pm \varepsilon_T$	$S_T \times 10^5$
1	0.05357 ± 0.00023	0.11015 ± 0.00031	0.83628 ± 0.00037	5.45
2	0.09119 ± 0.00029	0.22567 ± 0.00042	0.68314 ± 0.00047	17.49
3	0.11606 ± 0.00032	0.33517 ± 0.00047	0.54878 ± 0.00050	29.64
4	0.13196 ± 0.00034	0.43246 ± 0.00050	0.43558 ± 0.00050	37.89
5	0.14199 ± 0.00035	0.51553 ± 0.00050	0.34247 ± 0.00047	40.83
10	0.15618 ± 0.00036	0.74803 ± 0.00043	0.09578 ± 0.00029	11.81

В следующей серии расчетов сравниваются результаты для двух составов рассеивающего слоя.

Модель 1. Облако состоит из гексагональных призм-столбиков, горизонтально ориентированных в пространстве. Форм-фактор частиц одинаков и равен 10.

Модель 2. Частицы из модели 1 преимущественно горизонтально ориентированы, но угол между осью кристалла и горизонтальной плоскостью моделируется случайно по равномерному распределению из промежутка $[0, \pi/12]$.

Для таких моделей рассеивающей среды вследствие симметрии в горизонтальной плоскости индикатриса рассеяния $G(\omega', \omega)$ не зависит от азимутального угла входящего излучения. Предполагается, что поглощение в слое отсутствует, концентрация кристаллических частиц в рассеивающем слое такова, что максимум коэффициента ослабления по всем направлениям входящего излучения равен 0.005 м^{-1} , высота слоя 200 м и 600 м. На рис. 5 представлены вероятности прохождения излучения через рассеивающий слой для различных направлений входящего излучения, которые определяются зенитным углом θ_0 . Для модели рассеивающей среды с флаттером пропускание всегда немного меньше, чем для модели без флаттера.

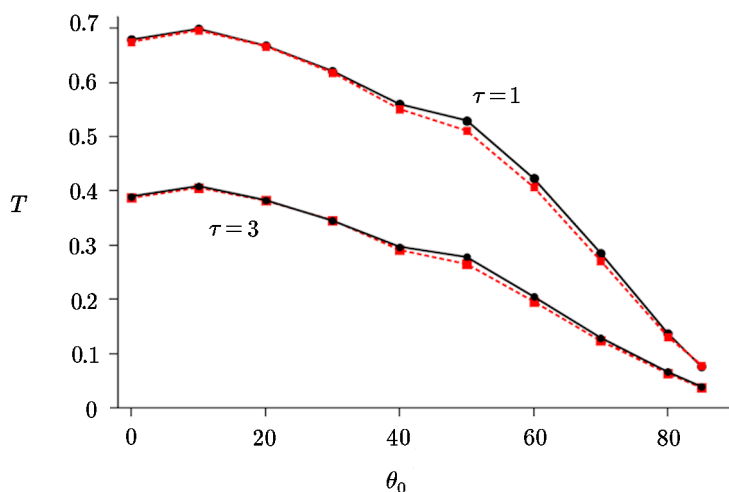


Рис. 5. Вероятность прохождения излучения через плоские рассеивающие слои оптической толщины $\tau = 1$ и $\tau = 3$, состоящие из горизонтально ориентированных столбиков (сплошные линии) и столбиков со случайным углом флаттера (штриховые линии) для различных зенитных углов θ_0 падающего излучения

На рис. 6 изображены угловые распределения интенсивности излучения, проходящего через слой с оптической толщиной, не превышающей $\tau = 1$. Левый рисунок соответствует модели 1, правый — модели 2. Направление входящего излучения определяется зенитным углом $\theta_0 = 80^\circ$. Для тех же моделей ледяных кристаллов на рис. 7 представлены угловые распределения интенсивности излучения, отраженного от облачного слоя. В данном примере максимальное значение оптической толщины слоя равно 3, зенитный угол направления на источник $\theta_0 = 80^\circ$. На рисунках 6 и 7 видно, как флаттер приводит к сглаживанию угловых распределений интенсивности проходящего и отраженного излучений.

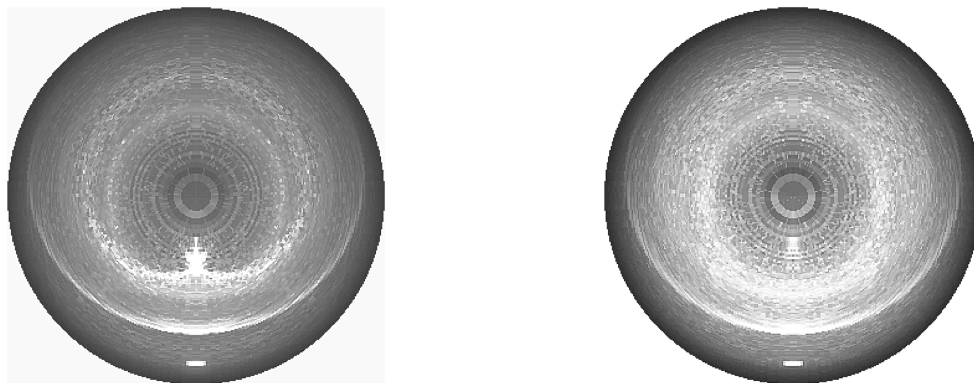


Рис. 6. Угловые распределения интенсивности излучения, проходящего через кристаллический рассеивающий слой оптической толщины $\tau = 1$. Модель 1 — левый рисунок, модель 2 — правый рисунок

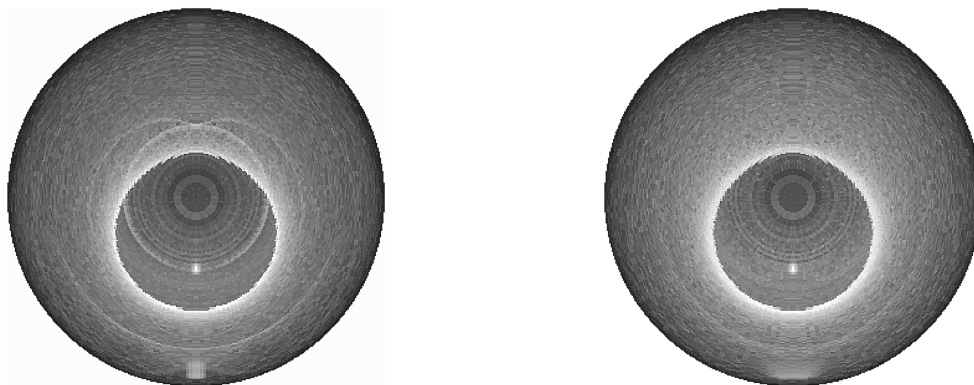


Рис. 7. Угловые распределения интенсивности излучения, отраженного от кристаллического рассеивающего слоя оптической толщины $\tau = 3$. Модель 1 — левый рисунок, модель 2 — правый рисунок

Заключение

В работе описан алгоритм вычисления индикатрис рассеяния и сечений рассеяния и поглощения для частиц несферической формы, размеры которых значительно превышают длину волны излучения. В этом случае задачу можно решить, используя приближение геометрической оптики. Так как в составе реальных кристаллических облаков большой процент частиц имеет неправильную случайную форму, авторами предложена математическая модель кристаллических частиц случайной формы и алгоритм моделирования таких частиц на основе построения выпуклой оболочки набора случайных точек, распределенных в некотором объеме. Алгоритм вычисления сечений ослабления и индикатрис рассеяния работает как для моделей частиц правильной формы, так и для моделей частиц случайной формы.

Рассмотрены два подхода к моделированию переноса излучения в оптически анизотропной облачности. Первый подход требует предварительного вычисления индикатрис рассеяния для кристаллов различных форм и ориентаций. Во втором подходе не требуется знания индикатрис рассеяния. В этом случае при построении траектории движения фотона после моделирования длины свободного пробега определяется тип кристалла и его ориентация, а рассеяние моделируется непосредственно имитацией взаимодействия фотона с частицей по законам геометрической оптики. Такой подход позволяет доста-

точно просто настраивать входные параметры задачи при изменении микрофизических характеристик среды, включая форму, ориентацию, прозрачность частиц и шероховатость их границ, и не требует предварительных трудоемких вычислений.

Были проведены модельные расчеты интегральных и угловых характеристик поля излучения, рассеянного слоем ледяных облаков, состоящих из кристаллов, имеющих форму гексагональных призм с форм-фактором 10. Результаты вычислений продемонстрировали влияние флаттера для горизонтально ориентированных частиц на пропускание излучения облачным слоем и угловые распределения отраженного и пропущенного излучения.

Литература

1. **Волковицкий О.А., Павлова Л.Н., Петрушин А.Г.** Оптические свойства кристаллических облаков. — Л.: Гидрометеиздат, 1984.
2. Радиационные свойства перистых облаков. Под ред. Е.М. Фейгельсон. — М.: Наука, 1989.
3. Радиация в облачной атмосфере. Под ред. Е.М. Фейгельсон. — Л.: Гидрометеиздат, 1981.
4. **Mishchenko M.I., Travis L.D., Lacis A.A.** Scattering, Absorption, and Emission of Light by Small Particles. — Cambridge University Press, 2002.
5. **Korolev A.V., Isaac G.A., Hallett J.** Ice particle habits in Arctic clouds // *Geophysical Research Letters*. — 1999. — Vol. 26, iss. 9. — P. 1299–1302.
6. **Korolev A.V., Isaac G.A., Hallett J.** Ice particle habits in stratiform clouds // *Quarterly J. of the Royal Meteorological Society*. — 2000. — Vol. 126. — P. 2873–2902.
7. **Liou K.N., Yang P.** Light Scattering by Ice Crystals: Fundamentals and Applications. — Cambridge University Press, 2016.
8. **Mishchenko M.I., Hovenier J.W., Travis L.D.** Light Scattering by Nonspherical Particles: Theory, Measurements and Geophysical Applications. — San Diego: Academic Press, 1999.
9. **Macke A., Johannes M., Ehrhard R.** Single scattering properties of atmospheric ice crystals // *J. Atmospheric Sciences*. — 1996. — Vol. 53, № 19. — P. 2813–2825.
10. **Liu C., Panetta R.L., Yang P.** The effective equivalence of geometric irregularity and surface roughness in determining particle single-scattering properties // *Optics express*. — 2014. — Vol. 22, iss. 19. — P. 23620–23627. — DOI: 10.1364/OE.22.023620.
11. **Тимофеев Д.Н., Коношонкин А.В., Кустова Н.В., Шишко В.А., Боровой А.Г.** Оценка влияния поглощения на рассеяние света на атмосферных ледяных частицах для длин волн, характерных для задач лазерного зондирования атмосферы // *Оптика атмосферы и океана*. — 2019. — Т. 32, № 5. — С. 381–385. Перевод: Timofeev D.N., Konoshonkin A.V., Kustova N.V., Shishko V.A. and Borovoi A.G. Estimation of the Absorption Effect on Light Scattering by Atmospheric Ice Crystals for Wavelengths Typical for Problems of Laser Sounding of the Atmosphere // *Atmospheric and Oceanic Optics*. — 2019. — Vol. 32, № 5. — P. 564–568.
12. **Му Ц., Каргин Б.А., Каблукова Е.Г.** Компьютерное построение трехмерных выпуклых тел произвольных форм // *Вычислительные технологии*. — 2022. — Т. 27, № 2. — С. 54–61.
13. **Коношонкин А., Кустова Н., Боровой А.** Рассеяние света на гексагональных ледяных кристаллах перистых облаков. — LAMBERT Academic Publishing, 2013.
14. **Preparata F.P., Shamos M.I.** Computational Geometry: an Introduction. — Springer Science&Business Media, 1985.
15. **Berg M., Kreveld M., Overmars M., Schwarzkopf O.** Computational Geometry: Algorithms and Applications. — Berlin, Heidelberg: Springer, 1997.

16. **Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А. и др.** Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. — Новосибирск: Наука, 1976. Перевод: Marchuk G.I., Mikhailov G.A., Nazarliev M.A., Darbinyan R.A., Kargin B.A., and Elepov B.S. Monte Carlo Method in Atmospheric Optics. — Berlin, Springer-Verlag, 1989.
17. **Каргин Б.А., Каблукова Е.Г., Му Ц.** Численное стохастическое моделирование рассеяния оптического излучения ледяными кристаллами нерегулярных случайных форм // Вычислительные технологии. — 2022. — Т. 27, № 2. — С. 4–18.
18. **Deirmendjian D.** Electromagnetic Scattering on Spherical Polydispersions. — American Elsevier Publishing Company, 1969.
19. **Пригарин С.М., Боровой А.Г., Гришин И.А., Оппель У.Г.** Статистическое моделирование переноса излучения в оптически анизотропных кристаллических облаках // Оптика атмосферы и океана. — 2007. — Т. 20, № 3. — С. 205–210.
20. **Korn G.A., Korn T.M.** Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. — Courier Corporation, 2000.
21. **Каргин Б.А., Му Ц., Каблукова Е.Г.** Численное статистическое моделирование процесса переноса оптической радиации в случайных кристаллических средах // Сиб. электрон. матем. изв. — 2023. — Т. 20, № 1. — С. 486–500.
22. **Zhang Z.B., Yang P., Kattawar G.W. et al.** Geometrical-optics solution to light scattering by droxtal ice crystals // Applied optics. — 2004. — Vol. 43, iss. 12. — P. 2490–2499. — DOI: 10.1364/AO.43.002490.

Поступила в редакцию 30 января 2024 г.

После исправления 2 февраля 2024 г.

Принята к печати 4 марта 2024 г.

Литература в транслитерации

1. **Volkovickii O.A., Pavlova L.N., Petrushin A.G.** Opticheskie svoistva kristallicheskih oblakov. — L.: Gidrometeoizdat, 1984.
2. Radiacionnye svoistva peristyx oblakov. Pod red. E.M. Feigel'son. — M.: Nauka, 1989.
3. Radiaciya v oblachnoi atmosfere. Pod red. E.M. Feigel'son. — L.: Gidrometeoizdat, 1981.
4. **Mishchenko M.I., Travis L.D., Lacis A.A.** Scattering, Absorption, and Emission of Light by Small Particles. — Cambridge University Press, 2002.
5. **Korolev A.V., Isaac G.A., Hallett J.** Ice particle habits in Arctic clouds // Geophysical Research Letters. — 1999. — Vol. 26, iss. 9. — P. 1299–1302.
6. **Korolev A.V., Isaac G.A., Hallett J.** Ice particle habits in stratiform clouds // Quarterly J. of the Royal Meteorological Society. — 2000. — Vol. 126. — P. 2873–2902.
7. **Liou K.N., Yang P.** Light Scattering by Ice Crystals: Fundamentals and Applications. — Cambridge University Press, 2016.
8. **Mishchenko M.I., Hovenier J.W., Travis L.D.** Light Scattering by Nonspherical Particles: Theory, Measurements and Geophysical Applications. — San Diego: Academic Press, 1999.
9. **Macke A., Johannes M., Ehrhard R.** Single scattering properties of atmospheric ice crystals // J. Atmospheric Sciences. — 1996. — Vol. 53, № 19. — P. 2813–2825.
10. **Liu C., Panetta R.L., Yang P.** The effective equivalence of geometric irregularity and surface roughness in determining particle single-scattering properties // Optics express. — 2014. — Vol. 22, iss. 19. — P. 23620–23627. — DOI: 10.1364/OE.22.023620.

11. **Timofeev D.N., Konoshonkin A.V., Kustova N.V., Shishko V.A., Borovoi A.G.** Ocenka vliyaniya pogloshcheniya na rasseyaniye sveta na atmosferynykh ledyanykh chasticakh dlya dlin voln, kharakternykh dlya zadach lazernogo zondirovaniya atmosfery // Optika atmosfery i okeana. — 2019. — T. 32, № 5. — S. 381–385. Perevod: Timofeev D.N., Konoshonkin A.V., Kustova N.V., Shishko V.A. and Borovoi A.G. Estimation of the Absorption Effect on Light Scattering by Atmospheric Ice Crystals for Wavelengths Typical for Problems of Laser Sounding of the Atmosphere // Atmospheric and Oceanic Optics. — 2019. — Vol. 32, № 5. — P. 564–568.
12. **Mu C., Kargin B.A., Kablukova E.G.** Komp'yuternoe postroenie trekhmernykh vypuklykh tel proizvol'nykh form // Vychislitel'nye tekhnologii. — 2022. — T. 27, № 2. — S. 54–61.
13. **Konoshonkin A., Kustova N., Borovoi A.** Rasseyaniye sveta na geksagonal'nykh ledyanykh kristallakh peristykh oblakov. — LAMBERT Academic Publishing, 2013.
14. **Preparata F.P., Shamos M.I.** Computational Geometry: an Introduction. — Springer Science&Business Media, 1985.
15. **Berg M., Kreveld M., Overmars M., Schwarzkopf O.** Computational Geometry: Algorithms and Applications. — Berlin, Heidelberg: Springer, 1997.
16. **Marchuk G.I., Mikhailov G.A., Nazaraliev M.A. i dr.** Metod Monte-Karlo v atmosferno optike. — Novosibirsk: Nauka, 1976. Perevod: Marchuk G.I., Mikhailov G.A., Nazaraliev M.A., Darbinyan R.A., Kargin B.A., and Elepov B.S. Monte Carlo Method in Atmospheric Optics. — Berlin, Springer-Verlag, 1989.
17. **Kargin B.A., Kablukova E.G., Mu C.** Chislennoe stokhasticheskoe modelirovanie rasseyaniya opticheskogo izlucheniya ledyanyimi kristallami neregulyarnykh sluchainykh form // Vychislitel'nye tekhnologii. — 2022. — T. 27, № 2. — S. 4–18.
18. **Deirmendjian D.** Electromagnetic Scattering on Spherical Polydispersions. — American Elsevier Publishing Company, 1969.
19. **Prigarin S.M., Borovoi A.G., Grishin I.A., Oppel' U.G.** Statisticheskoe modelirovanie perenosa izlucheniya v opticheski anizotropnykh kristallicheskikh oblakakh // Optika atmosfery i okeana. — 2007. — T. 20, № 3. — S. 205–210.
20. **Korn G.A., Korn T.M.** Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. — Courier Corporation, 2000.
21. **Kargin B.A., Mu C., Kablukova E.G.** Chislennoe statisticheskoe modelirovanie processa perenosa opticheskoi radiatsii v sluchainykh kristallicheskikh sredakh // Sib. elektron. matem. izv. — 2023. — T. 20, № 1. — S. 486–500.
22. **Zhang Z.B., Yang P., Kattawar G.W. et al.** Geometrical-optics solution to light scattering by droxtal ice crystals // Applied optics. — 2004. — Vol. 43, iss. 12. — P. 2490–2499. — DOI: 10.1364/AO.43.002490.

