$\mathcal{AMS}$ subject classification: 45D05, 47G20, 45E10, 47H10, 65R20

О существовании и численном решении нового класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра второго рода с ядром типа свертки

С. Лемита[1,2], М.Л. Гессуми[3]

[1]Department of Mathematics and Computer Science, Echahid Cheikh Larbi Tebessi University, Road of Constantine, Tebessa, 12022, Algeria

[2]Laboratoire de Mathématiques Appliquées et de Modélisation, Université 8 Mai 1945 Guelma, B.P. 401, Guelma, 24000, Algérie

[3]Département des Sciences Exactes, Ecole Normale Supérieure de Ouargla, Cité Ennacer, Ouargla, 30000, Algérie

E-mails: lem.samir@gmail.com, samir.lemita@univ-tebessa.dz (Lemita S.), aamine56798@gmail.com (Guessoumi M.L.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 3, Vol. 17, 2024.

Лемита С., Гессуми М.Л. О существовании и численном решении нового класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра второго рода с ядром типа свертки // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2024. — Т. 27, № 3. — С. 303–318.

В статье рассматривается новый класс нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра второго рода с ядром типа свертки. Используя теорему Шаудера о неподвижной точке, мы получаем некоторые условия, достаточные для существования и единственности решений. Кроме того, для получения приближенного решения предлагаемого уравнения Вольтерра используется метод Нистрема. Приведены численные примеры для подтверждения полученных результатов.

DOI: 10.15372/SJNM20240304
EDN: NLJTMK

Ключевые слова: *уравнение Вольтерра, интегро-дифференциальное уравнение, ядро типа свертки, теорема Шаудера о неподвижной точке, метод Нистрема.*

Lemita S., Guessoumi M.L. On existence and numerical solution of a new class of nonlinear second degree integro-differential Volterra equations with a convolution kernel // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2024. — Vol. 27, № 3. — P. 303–318.

This paper considers a new class of nonlinear second degree integro-differential Volterra equations with a convolution kernel. We derive some sufficient conditions to establish the existence and uniqueness of solutions by using the Schauder fixed point theorem. Moreover, the Nyström method is applied to obtain an approximate solution of the proposed Volterra equation. Numerical examples are given to validate the adduced results.

Keywords: *Volterra equation, integro-differential equation, convolution kernel, Schauder fixed point theorem, Nyström method.*

© С. Лемита, М.Л. Гессуми, 2024

1. Введение

В последние годы теория интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра (Фредгольма) стала интересной и популярной областью исследований благодаря ее приложениям во многих инженерных и научных дисциплинах, таких как механические явления, технология управления, электротехника, гидродинамика, модели роста населения. Подробнее см. [1–7].

Это послужило причиной появления большого числа работ по изучению различных видов интегральных уравнений. Приведем некоторые типы этих уравнений (только две ссылки для каждого из них): линейные и нелинейные уравнения Вольтерра и Фредгольма [8, 9]; интегро-дифференциальные уравнения [10, 11]; интегральные уравнения в комплексной плоскости [12, 13]; уравнения со слабосингулярными ядрами [14, 15]; уравнения с ядрами Теплица плюс Ганкеля [16, 17]; интегральные уравнения с постоянной задержкой [18, 19]; уравнения в двумерном пространстве [20, 21]; интегральное уравнение Чандрасекара [22,23]; интегральное уравнение Абеля [24,25]; нечеткие интегральные уравнения [26, 27]; дробные интегральные уравнения [28, 29] и т. д.

В данном исследовании нас интересует новый тип уравнения Вольтерра, имеющий нелинейное ядро типа свертки, включающее первую и вторую производные решения. Это уравнение можно представить в следующем виде:

$$u(t) = \int_a^t g(t-s)\varphi\big(t, s, u(s), u'(s), u''(s)\big)\, ds + f(t) \quad \forall t \in \mathcal{I} = [a, b],$$

где $f \in C^2(\mathcal{I})$, $g \in C^2(\mathcal{I}^2)$, $g(0) = 0$, $\partial_t g(0) = \lambda \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C^2(\mathcal{I}^2 \times \mathbb{R}^3)$ — заданные функции, u — неизвестная, которую необходимо найти в пространстве $C^2(\mathcal{I})$.

С другой стороны, отметим, что неизвестная функция u и ее производные нелинейны под знаком интегрального оператора. Поэтому, чтобы управлять решением предложенного уравнения и его производными, нам необходимо дважды продифференцировать обе части уравнения. Это позволит нам преобразовать наше уравнение после некоторых простых вычислений в следующую систему:

$$u(t) = \int_a^t g(t-s)\varphi\big(t, s, u(s), u'(s), u''(s)\big) ds + f(t) \quad \forall t \in \mathcal{I}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} u'(t) = \int_a^t \Big(&\partial_t g(t-s)\varphi\big(t, s, u(s), u'(s), u''(s)\big) + g(t-s)\partial_t\varphi\big(t, s, u(s), u'(s), u''(s)\big)\Big) ds + \\ &f'(t) \quad \forall t \in \mathcal{I}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} u''(t) = \lambda\varphi\big(t, t, u(t), u'(t), u''(t)\big) + \int_a^t \Big(&2\partial_t g(t-s)\partial_t\varphi\big(t, s, u(s), u'(s), u''(s)\big) + \\ &\partial_t^2 g(t-s)\varphi\big(t, s, u(s), u'(s), u''(s)\big) + g(t-s)\partial_t^2\varphi\big(t, s, u(s), u'(s), u''(s)\big)\Big) ds + \\ &f''(t) \quad \forall t \in \mathcal{I}. \end{aligned} \tag{3}$$

Уравнения (1)–(3) этой системы будут играть важную роль на протяжении всего исследования.

Статья построена следующим образом: в пункте 2 мы доказываем существование решения предлагаемой задачи с использованием теоремы Шаудера о неподвижной точке. В п. 3 приведены результаты относительно единственности решения задачи. В п. 4 мы обсуждаем метод Нистрема, позволяющий получить приближенное решение нашего уравнения. В последнем пункте приводим несколько наглядных примеров.

2. Доказательство существования с использованием теоремы Шаудера о неподвижной точке

В данном пункте представим доказательство существования решения предлагаемого уравнения (1) с использованием теоремы Шаудера о неподвижной точке. До получения основного результата нам необходимо сделать следующие предположения:

($\mathcal{A}_1$): пусть $\varphi(t,s,x,y,z)$ — функция, принадлежащая $C^2(\mathcal{I}^2\times\mathbb{R}^3)$, и существует постоянная $M_1>0$ такая, что $\forall t,s\in\mathcal{I}$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$

$$\max\left(|\varphi(t,s,x,y,z)|,|\partial_t\varphi(t,s,x,y,z)|,|\partial_t^2\varphi(t,s,x,y,z)|\right)\le M_1;$$

($\mathcal{A}_2$): пусть $g(t,s)$ — функция, принадлежащая $C^2(\mathcal{I}^2)$, которая удовлетворяет $g(0)=0$, $\partial_t g(0)=\lambda$, и существует постоянная $M_2>0$ такая, что $\forall t,s\in\mathcal{I}$

$$\max\left(|g(t-s)|,|\partial_t g(t-s)|,|\partial_t^2 g(t-s)|\right)\le M_2.$$

Теорема 1. *Пусть условия* ($\mathcal{A}_1$), ($\mathcal{A}_2$) *выполнены. Тогда уравнение Вольтерра* (1) *имеет по крайней мере одно решение в пространстве* $C^2(\mathcal{I})$.

Доказательство. Пусть $\Phi: C^2(\mathcal{I})\to C^2(\mathcal{I})$ — интегральный оператор, определяемый следующим образом: $\forall\xi\in C^2(\mathcal{I})$, $\forall t\in\mathcal{I}$

$$\Phi(\xi)(t)=\int_a^t g(t-s)\varphi\left(t,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\right)ds+f(t).$$

Ясно, что уравнение (1) имеет по крайней мере одно решение в пространстве $C^2(\mathcal{I})$, если и только если оператор Φ имеет неподвижную точку. Докажем это, используя теорему Шаудера о неподвижной точке.

Прежде всего, легко можно убедиться в том, что Φ является непрерывным из $C^2(\mathcal{I})$ в себя. Рассмотрим подмножество $F\subset C^2(\mathcal{I})$, определяемое следующим образом:

$$F:=\left\{\forall\xi\in C^2(\mathcal{I}),\ \text{таких что}\quad\begin{array}{l}\xi(a)=f(a),\ \xi'(a)=f'(a),\\ |\xi(t)-f(t)|\le M_1M_2(b-a),\\ |\xi'(t)-f'(t)|\le 2M_1M_2(b-a),\\ |\xi''(t)-f''(t)|\le M_1M_2\left(4(b-a)+\dfrac{|\lambda|}{M_2}\right),\\ \forall\epsilon>0,\ \exists\,\delta_\epsilon>0,\ \forall t_1,t_2\in\mathcal{I},\ |t_1-t_2|<\delta_\epsilon,\\ \text{тогда}\ |\xi''(t_1)-\xi''(t_2)|<\epsilon\end{array}\right\}.$$

Для использования теоремы Шаудера о неподвижной точке подмножество F должно быть непустым, выпуклым и замкнутым. Очевидно, что F является непустым и выпуклым, просто докажем, что оно замкнуто. Пусть $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность в F. Предположим, что она сходится к некоторому $\widetilde{\xi}\in C^2(\mathcal{I})$ в норме пространства $C^2(\mathcal{I})$:

$$\|\xi_n-\widetilde{\xi}\|=\left(\|\xi_n-\widetilde{\xi}\|_\infty+\|\xi_n'-\widetilde{\xi}'\|_\infty+\|\xi_n''-\widetilde{\xi}''\|_\infty\right)\to 0,\ \text{где}\ \|\xi\|_\infty=\sup_{t\in\mathcal{I}}|\xi(t)|.$$

Теперь необходимо убедиться в том, что $\widetilde{\xi}\in F$, чтобы подтвердить замкнутость F.

Ясно, что сходимость в пространстве $C^2(\mathcal{I})$ также означает равномерную сходимость функций, их производных и вторых производных, что позволяет нам записать следующее:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \xi_n(a) = f(a) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \xi_n(a) = f(a) \Rightarrow \widetilde{\xi}(a) = f(a),$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \xi_n'(a) = f'(a) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \xi_n'(a) = f'(a) \Rightarrow \widetilde{\xi}'(a) = f'(a).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad |\xi_n(t) - f(t)| \le M_1 M_2\,(b-a) &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |\xi_n(t) - f(t)| \le M_1 M_2\,(b-a) \\ &\Rightarrow \Big|\lim_{n\to\infty} \xi_n(t) - f(t)\Big| \le M_1 M_2\,(b-a) \\ &\Rightarrow \big|\widetilde{\xi}(t) - f(t)\big| \le M_1 M_2\,(b-a)\,. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получим

$$\big|\widetilde{\xi}'(t) - f'(t)\big| \le 2M_1 M_2\,(b-a) \quad \text{и} \quad \big|\widetilde{\xi}''(t) - f''(t)\big| \le M_1 M_2 \left(4(b-a) + \frac{|\lambda|}{M_2}\right).$$

Теперь из последнего условия для F ясно, что $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, \delta_\epsilon > 0$, $\forall t_1, t_2 \in \mathcal{I}$, $|t_1 - t_2| < \delta_\epsilon$

$$\big|\xi_n''(t_1) - \xi_n''(t_2)\big| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} \big|\widetilde{\xi}''(t_1) - \widetilde{\xi}''(t_2)\big| &= \big|\widetilde{\xi}''(t_1) - \xi_n''(t_1) + \xi_n''(t_1) - \xi_n''(t_2) + \xi_n''(t_2) - \widetilde{\xi}''(t_2)\big| \\ &\le \big|\widetilde{\xi}''(t_1) - \xi_n''(t_1)\big| + \big|\xi_n''(t_1) - \xi_n''(t_2)\big| + \big|\xi_n''(t_2) - \widetilde{\xi}''(t_2)\big|. \end{aligned}$$

Кроме того, поскольку ξ_n'' равномерно сходится к $\widetilde{\xi}''$, то можно записать, что если

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathcal{I},\ \forall n \ge N_\epsilon, \quad \text{тогда} \quad \big|\xi_n''(t) - \widetilde{\xi}''(t)\big| < \frac{\epsilon}{3}.$$

При переходе к пределу в бесконечности (т. е. $n \ge N_\epsilon$) предыдущее неравенство дает нам

$$\big|\widetilde{\xi}''(t_1) - \widetilde{\xi}''(t_2)\big| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Таким образом $\widetilde{\xi}$ удовлетворяет всем условиям подмножества F. Это означает, что F замкнуто.

Теперь докажем, что Φ вполне непрерывен на подмножестве F.

Сначала из (1) и (2) мы прямо получим $\Phi(\xi)(a) = f(a)$ и $\Phi(\xi)'(a) = f'(a)$. Теперь для всех $\xi \in F$ и всех $t \in \mathcal{I}$ имеем

$$|\Phi(\xi)(t) - f(t)| = \left|\int_a^t g(t-s)\varphi\big(t, s, \xi\,(s)\,, \xi'\,(s)\,, \xi''\,(s)\big)\,ds\right| \le M_1 M_2\,(b-a)\,.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} |\Phi(\xi)'(t) - f'(t)| \le &\left|\int_a^t \partial_t g(t-s)\varphi\big(t, s, \xi(s), \xi'(s), \xi''(s)\big)ds\right| + \\ &\left|\int_a^t g(t-s)\partial_t\varphi\big(t, s, \xi(s), \xi'(s), \xi''(s)\big)ds\right| \le 2M_1 M_2\,(b-a)\,. \end{aligned}$$

Таким же образом

$$\begin{aligned}\left|\Phi(\xi)''(t)-f''(t)\right| \leq &\left|\lambda\varphi\big(t,t,\xi(t),\xi'(t),\xi''(t)\big)+\int_a^t 2\partial_t g(t-s)\partial_t\varphi\big(t,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)ds\right|+\\ &\left|\int_a^t \partial_t^2 g(t-s)\varphi\big(t,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)ds\right|+\\ &\left|\int_a^t g(t-s)\partial_t^2\varphi\big(t,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)ds\right|\\ \leq &\, M_1M_2 4(b-a)+|\lambda|M_1 \leq M_1M_2\left(4(b-a)+\frac{|\lambda|}{M_2}\right).\end{aligned}$$

Теперь мы хотим убедиться в том, что если $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta_\epsilon>0$, $\forall t_1,t_2\in\mathcal{I}$ при $|t_1-t_2|<\delta_\epsilon$, тогда $|\Phi(\xi)''(t_1)-\Phi(\xi)''(t_2)|<\epsilon$. Для $t_1,t_2\in\mathcal{I}$ при $t_1\leq t_2$ имеем

$$\begin{aligned}&\left|\Phi(\xi)''(t_1)-\Phi(\xi)''(t_2)\right|\\ \leq\ &\left|\lambda\varphi\big(t_1,t_1,\xi(t_1),\xi'(t_1),\xi''(t_1)\big)-\lambda\varphi\big(t_2,t_2,\xi(t_2),\xi'(t_2),\xi''(t_2)\big)\right|+|f''(t_1)-f''(t_2)|+\\ &2\left|\int_a^{t_1}\partial_t g(t_1-s)\partial_t\varphi\big(t_1,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)ds-\int_a^{t_2}\partial_t g(t_2-s)\partial_t\varphi\big(t_2,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)ds\right|+\\ &\left|\int_a^{t_1}\partial_t^2 g(t_1-s)\varphi\big(t_1,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)ds-\int_a^{t_2}\partial_t^2 g(t_2-s)\varphi\big(t_2,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)ds\right|+\\ &\left|\int_a^{t_1}g(t_1-s)\partial_t^2\varphi\big(t_1,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)ds-\int_a^{t_2}g(t_2-s)\partial_t^2\varphi\big(t_2,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)ds\right|.\end{aligned}$$

Разделив интервал интегрирования, получим

$$\begin{aligned}&\left|\Phi(\xi)''(t_1)-\Phi(\xi)''(t_2)\right|\\ \leq\ &\left|\lambda\varphi\big(t_1,t_1,\xi(t_1),\xi'(t_1),\xi''(t_1)\big)-\lambda\varphi\big(t_2,t_2,\xi(t_2),\xi'(t_2),\xi''(t_2)\big)\right|+\left|f''(t_1)-f''(t_2)\right|+\\ &2\left|\int_a^{t_1}\partial_t g(t_1-s)\big(\partial_t\varphi\big(t_1,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)-\partial_t\varphi\big(t_2,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)\big)ds\right|+\\ &2\left|\int_a^{t_1}\partial_t\varphi\big(t_2,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)\big(\partial_t g(t_1-s)-\partial_t g(t_2-s)\big)ds\right|+\\ &2\left|\int_{t_1}^{t_2}\partial_t g(t_2-s)\partial_t\varphi\big(t_2,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)ds\right|+\\ &\left|\int_a^{t_1}\partial_t^2 g(t_1-s)\big(\varphi\big(t_1,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)-\varphi\big(t_2,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)\big)ds\right|+\\ &\left|\int_a^{t_1}\varphi\big(t_2,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)\big(\partial_t^2 g(t_1-s)-\partial_t^2 g(t_2-s)\big)ds\right|+\\ &\left|\int_{t_1}^{t_2}\partial_t^2 g(t_2-s)\varphi\big(t_2,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)ds\right|+\\ &\left|\int_a^{t_1}g(t_1-s)\big(\partial_t^2\varphi\big(t_1,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)-\partial_t^2\varphi\big(t_2,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)\big)ds\right|+\\ &\left|\int_a^{t_1}\partial_t^2\varphi\big(t_2,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)\big(g(t_1-s)-g(t_2-s)\big)ds\right|+\\ &\left|\int_{t_1}^{t_2}g(t_2-s)\partial_t^2\varphi\big(t_2,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)ds\right|.\end{aligned}$$

Использование теоремы о среднем значении для функций φ, $\partial_t\varphi$, g и $\partial_t g$ дает нам

$$\begin{aligned}\left|\Phi(\xi)''(t_1)-\Phi(\xi)''(t_2)\right| \le (|\lambda|M_1+4M_1M_2+6M_1M_2(b-a))|t_1-t_2|+ \\ \left|f''(t_1)-f''(t_2)\right|+M_1\int_a^{t_1}\left|\partial_t^2 g(t_1-s)-\partial_t^2 g(t_2-s)\right|ds+ \\ M_2\int_a^{t_1}\left|\partial_t^2\varphi\big(t_1,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)-\partial_t^2\varphi\big(t_2,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)\right|ds.\end{aligned}$$

Пусть $\epsilon > 0$, если возьмем $|t_1-t_2| < \delta_\epsilon^1$, где $\delta_\epsilon^1 = \frac{\epsilon}{4(|\lambda|M_1+4M_1M_2+6M_1M_2(b-a))}$, то, очевидно, получим

$$\begin{aligned}\left|\Phi(\xi)''(t_1)-\Phi(\xi)''(t_2)\right| < \frac{\epsilon}{4}+\left|f''(t_1)-f''(t_2)\right|+M_1\int_a^{t_1}\left|\partial_t^2 g(t_1-s)-\partial_t^2 g(t_2-s)\right|ds+ \\ M_2\int_a^{t_1}\left|\partial_t^2\varphi\big(t_1,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)-\partial_t^2\varphi\big(t_2,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)\right|ds.\end{aligned}$$

Более того, поскольку f'', $\partial_t^2 g$ и $\partial_t^2\varphi$ равномерно непрерывны как функции t на интервале $\mathcal{I}$, то существуют $\delta_\epsilon^2 > 0$, $\delta_\epsilon^3 > 0$ и $\delta_\epsilon^4 > 0$ соответственно, где $\forall t_1,t_2 \in \mathcal{I}$ при $|t_1-t_2| < \delta_\epsilon^2$, $|t_1-t_2| < \delta_\epsilon^3$ и $|t_1-t_2| < \delta_\epsilon^4$. Имеем

$$\begin{aligned}&\left|f''(t_1)-f''(t_2)\right| < \frac{\epsilon}{4}, \\ &\left|\partial_t^2 g(t_1-s)-\partial_t^2 g(t_2-s)\right| < \frac{\epsilon}{4M_1(b-a)}, \\ &\left|\partial_t^2\varphi\big(t_1,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)-\partial_t^2\varphi\big(t_2,s,\xi(s),\xi'(s),\xi''(s)\big)\right| < \frac{\epsilon}{4M_2(b-a)}.\end{aligned}$$

Взяв $\delta_\epsilon = \min\{\delta_\epsilon^1,\, \delta_\epsilon^2,\, \delta_\epsilon^3,\, \delta_\epsilon^4\}$, мы получим $\forall t_1,t_2\in\mathcal{I}$ при $|t_1-t_2|<\delta_\epsilon$

$$\begin{aligned}\left|\Phi(\xi)''(t_1)-\Phi(\xi)''(t_2)\right| &< \frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}+M_1\int_a^{t_1}\frac{\epsilon}{4M_1(b-a)}ds+M_2\int_a^{t_1}\frac{\epsilon}{4M_2(b-a)}ds \\ &= \frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}=\epsilon.\end{aligned}$$

Итак, мы приходим к выводу, что $\Phi(F) \subset F$. Теперь, чтобы доказать компактность оператора Φ, достаточно доказать, что F — компактное подмножество. Чтобы показать, что F компактно, необходимо доказать, что F равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Равномерная ограниченность очевидна исходя из вида подмножества F, что дает нам

$$\begin{aligned}|\xi(t)| &\le M_1M_2\,(b-a)+\max_{s\in\mathcal{I}}|f(s)|, \\ |\xi'(t)| &\le 2M_1M_2\,(b-a)+\max_{s\in\mathcal{I}}|f'(s)| = \varrho_1, \\ |\xi''(t)| &\le M_1M_2\left(4(b-a)+\frac{|\lambda|}{M_2}\right)+\max_{s\in\mathcal{I}}|f''(s)| = \varrho_2.\end{aligned}$$

Проверим теперь равномерную непрерывность. С учетом последнего свойства подмножества F, ограниченности ξ' и ξ'', описанных выше, и используя теорему о среднем значении, мы непосредственно получим $\forall\xi \in F$, $\forall\epsilon > 0$, $\exists\,\widetilde{\delta}_\epsilon = \min\left\{\frac{\epsilon}{\varrho_1},\, \frac{\epsilon}{\varrho_2},\, \delta_\epsilon\right\} > 0$, $\forall t_1,t_2\in\mathcal{I}$ при $|t_1-t_2|<\widetilde{\delta}_\epsilon$

$$|\xi(t_1)-\xi(t_2)|<\epsilon, \quad |\xi'(t_1)-\xi'(t_2)|<\epsilon, \quad |\xi''(t_1)-\xi''(t_2)|<\epsilon.$$

Это означает, что F равномерно непрерывно. Таким образом, с теоремой Арцела–Асколи [9] мы подтверждаем компактность подмножества F. Мы заключаем, что Φ вполне непрерывен. Наконец, применение теоремы Шаудера показывает, что Φ имеет неподвижную точку $\xi = \Phi(\xi)$ в F, которая является решением уравнения Вольтерра (1), и его производные удовлетворяют уравнениям (2) и (3). □

3. Доказательство единственности

Очевидно, что при использовании теоремы Шаудера о неподвижной точке гарантируется только существование решения предыдущего уравнения (1). Итак, для доказательства единственности этого решения нам необходима следующая вспомогательная лемма.

Лемма. *Пусть $\gamma(t)$ — непрерывная и положительная функция на $[a,b]$, которая удовлетворяет следующим соотношениям*:

$$\exists L > 0,\;\; \gamma(t) \leq L \int_a^t \gamma(s)ds,$$

тогда $\gamma(t) = 0\ \forall t \in [a,b]$.

Доказательство. См. [30]. □

С другой стороны, нам также необходимо ввести следующее предположение:

($\mathcal{A}_3$): существуют постоянные A, B, C, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{C} > 0$ такие, что $\forall t,s \in \mathcal{I}$, $\forall x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
|\varphi(t,s,x,y,z) - \varphi(t,s,\overline{x},\overline{y},\overline{z})| &\leq A|x-\overline{x}| + B|y-\overline{y}| + C|z-\overline{z}|,\\
|\partial_t\varphi(t,s,x,y,z) - \partial_t\varphi(t,s,\overline{x},\overline{y},\overline{z})| &\leq \overline{A}|x-\overline{x}| + \overline{B}|y-\overline{y}| + \overline{C}|z-\overline{z}|,\\
|\partial_t^2\varphi(t,s,x,y,z) - \partial_t^2\varphi(t,s,\overline{x},\overline{y},\overline{z})| &\leq \widetilde{A}|x-\overline{x}| + \widetilde{B}|y-\overline{y}| + \widetilde{C}|z-\overline{z}|.
\end{aligned}$$

Теорема 2. *Пусть условия* ($\mathcal{A}_1$)–($\mathcal{A}_3$) *выполнены. Кроме того, предположим, что*

$$|\lambda|C < 1,$$

тогда уравнение Вольтерра (1) *имеет единственное решение в пространстве* $C^2(\mathcal{I})$.

Доказательство. Предположим, что $u(t), v(t) \in C^2(\mathcal{I})$ — два решения уравнения (1). Пусть $\gamma(t)$ — положительная функция:

$$\gamma\,(t) = |u(t) - v(t)| + |u'(t) - v'(t)| + |u''(t) - v''(t)|.$$

Теперь докажем, что $\gamma\,(t) = 0$ на основании леммы. Это означает, что $u(t) = v(t)$, $u'(t) = v'(t)$ и $u''(t) = v''(t)$.

Сначала положим

$$\theta = M_2 \max(A,B,C),\quad \overline{\theta} = M_2 \max(\overline{A},\overline{B},\overline{C}),\quad \widetilde{\theta} = M_2 \max(\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C}).$$

Для всех $t \in \mathcal{I}$ имеем

$$
\begin{aligned}
|u(t)-v(t)| &= \left| \int_a^t g(t-s)\left(\varphi(t,s,u(s),u'(s),u''(s)) - \varphi(t,s,v(s),v'(s),v''(s))\right) ds \right| \\
&\le M_2 \int_a^t \left(A|u(s)-v(s)| + B|u'(s)-v'(s)| + C|u''(s)-v''(s)|\right) ds \\
&\le M_2 \max(A,B,C) \int_a^t \left(|u(s)-v(s)| + |u'(s)-v'(s)| + |u''(s)-v''(s)|\right) ds \\
&= \theta \int_a^t \gamma(s) ds. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Таким же образом получим

$$
\begin{aligned}
|u'(t)-v'(t)| \le{} & \left| \int_a^t \partial_t g(t-s)\big(\varphi\big(t,s,u(s),u'(s),u''(s)\big) - \varphi\big(t,s,v(s),v'(s),v''(s)\big)\big) ds \right| + \\
& \left| \int_a^t g(t-s)\left(\partial_t\varphi\big(t,s,u(s),u'(s),u''(s)\big) - \partial_t\varphi\big(t,s,v(s),v'(s),v''(s)\big)\right) ds \right| \\
\le{} & M_2 \int_a^t \left(A|u(s)-v(s)| + B|u'(s)-v'(s)| + C|u''(s)-v''(s)|\right) ds + \\
& M_2 \int_a^t \left(\overline{A}|u(s)-v(s)| + \overline{B}|u'(s)-v'(s)| + \overline{C}|u''(s)-v''(s)|\right) ds \\
\le{} & M_2 \max(A,B,C) \int_a^t (|u(s)-v(s)| + |u'(s)-v'(s)| + |u''(s)-v''(s)|) ds + \\
& M_2 \max(\overline{A},\overline{B},\overline{C}) \int_a^t \left(|u(s)-v(s)| + |u'(s)-v'(s)| + |u''(s)-v''(s)|\right) ds \\
={} & \left(\theta + \overline{\theta}\right) \int_a^t \gamma(s) ds. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Тогда, аналогично предыдущему, получим

$$
\begin{aligned}
\left|u''(t)-v''(t)\right| \le{} & |\lambda| \left| \left(\varphi\big(t,t,u(t),u'(t),u''(t)\big) - \varphi\big(t,t,v(t),v'(t),v''(t)\big)\right) \right| + \\
& \left| \int_a^t 2\partial_t g(t-s)\left(\partial_t\varphi\big(t,s,u(s),u'(s),u''(s)\big) - \partial_t\varphi\big(t,s,v(s),v'(s),v''(s)\big)\right) ds \right| + \\
& \left| \int_a^t \partial_t^2 g(t-s)\left(\varphi\big(t,s,u(s),u'(s),u''(s)\big) - \varphi\big(t,s,v(s),v'(s),v''(s)\big)\right) ds \right| + \\
& \left| \int_a^t g(t-s)\left(\partial_t^2\varphi\big(t,s,u(s),u'(s),u''(s)\big) - \partial_t^2\varphi\big(t,s,v(s),v'(s),v''(s)\big)\right) ds \right| \\
\le{} & |\lambda| \left(A|u(t)-v(t)| + B|u'(t)-v'(t)| + C|u''(t)-v''(t)|\right) + \\
& 2M_2 \int_a^t \left(\overline{A}|u(s)-v(s)| + \overline{B}|u'(s)-v'(s)| + \overline{C}|u''(s)-v''(s)|\right) ds + \\
& M_2 \int_a^t \left(A|u(s)-v(s)| + B|u'(s)-v'(s)| + C|u''(s)-v''(s)|\right) ds + \\
& M_2 \int_a^t \left(\widetilde{A}|u(s)-v(s)| + \widetilde{B}|u'(s)-v'(s)| + \widetilde{C}|u''(s)-v''(s)|\right) ds.
\end{aligned}
$$

Таким образом

$$
\begin{aligned}
|u''(t)-v''(t)| \le{}& |\lambda|A|u(t)-v(t)|+|\lambda|B|u'(t)-v'(t)|+|\lambda|C|u''(t)-v''(t)|+\\
& 2M_2\max(\overline{A},\overline{B},\overline{C})\int_a^t \big(|u(s)-v(s)|+|u'(s)-v'(s)|+|u''(s)-v''(s)|\big)\,ds+\\
& M_2\max(A,B,C)\int_a^t \big(|u(s)-v(s)|+|u'(s)-v'(s)|+|u''(s)-v''(s)|\big)\,ds+\\
& M_2\max(\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C})\int_a^t \big(|u(s)-v(s)|+|u'(s)-v'(s)|+|u''(s)-v''(s)|\big)\,ds\\
={}& |\lambda|A|u(t)-v(t)|+|\lambda|B|u'(t)-v'(t)|+|\lambda|C|u''(t)-v''(t)|+(2\overline{\theta}+\theta+\widetilde{\theta})\int_a^t \gamma(s)ds.
\end{aligned}
$$

Из неравенств (4) и (5) следует, что

$$
\big|u''(t)-v''(t)\big| \le |\lambda|C\big|u''(t)-v''(t)\big|+\Big(|\lambda|A\theta+|\lambda|B(\theta+\overline{\theta})+2\overline{\theta}+\theta+\widetilde{\theta}\Big)\int_a^t \gamma(s)\,ds.
$$

Используя свойство $|\lambda|C<1$, находим

$$
\big|u''(t)-v''(t)\big| \le \left(\frac{\theta(|\lambda|A+|\lambda|B+1)+\overline{\theta}(|\lambda|B+2)+\widetilde{\theta}}{1-|\lambda|C}\right)\int_a^t \gamma(s)\,ds. \tag{6}
$$

Кроме того, в соответствии с неравенствами (4), (5) и (6), мы можем подтвердить, что существует положительный параметр L, который удовлетворяет следующему неравенству:

$$
\gamma(t) \le L\int_a^t \gamma(s)\,ds,
$$

где L задается следующим образом:

$$
L=\left(2\theta+\overline{\theta}+\frac{\theta(|\lambda|A+|\lambda|B+1)+\overline{\theta}(|\lambda|B+2)+\widetilde{\theta}}{1-|\lambda|C}\right).
$$

Исходя из леммы получим $\gamma(t)=0$. Это означает, что уравнение (1) имеет единственное решение в пространстве $C^2(\mathcal{I})$. □

4. Численное исследование

В предыдущих пунктах, при предположениях $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_3)$ мы показали, что уравнение (1) имеет единственное решение в $C^2(\mathcal{I})$. В действительности это решение не может быть найдено точно. По этой причине для этого решения необходимо рассмотреть некоторые численные методы. В данном пункте мы будем использовать метод Нистрема, описанный в [9], который позволит нам получить приближенное решение нашего уравнения (1). Прежде всего вспомним метод Нистрема. Для $N\in\mathbb{N}$ и с использованием шага дискретизации $h=\frac{b-a}{N}$, определим равноудаленное деление интервала $\mathcal{I}$ следующим образом:

$$
s_j=a+jh,\quad 0\le j\le N.
$$

Метод Нистрема — это метод поиска приближенного решения интегрального уравнения путем замены интеграла выбранной квадратурной формулой, например

$$\int_a^b \xi(s)ds \simeq h\sum_{j=0}^{N}\omega_j\xi(s_j),$$

где ω_i — реальные веса такие, что $\max_{0\le j\le N}|\omega_j| \le \varpi < \infty$.

Теперь, используя коллокацию уравнений (1), (2) и (3) в точках сетки $t_i = a + ih$, $0 \le i \le N$, а затем метод Нистрема, мы получим следующую алгебраическую систему: для $i = 0$: (начальные значения)

$$U_0 = f(a), \quad V_0 = f'(a), \quad W_0 = f''(a) + \lambda\varphi(a, a, U_0, V_0, W_0); \tag{7}$$

для $1 \le i \le N$:

$$U_i = f(t_i) + h\sum_{j=0}^{i}\omega_j g(t_i - t_j)\varphi(t_i, t_j, U_j, V_j, W_j), \tag{8}$$

$$V_i = f'(t_i) + h\sum_{j=0}^{i}\omega_j\big(\partial_t g(t_i - t_j)\varphi(t_i, t_j, U_j, V_j, W_j) + g(t_i - t_j)\partial_t\varphi(t_i, t_j, U_j, V_j, W_j)\big), \tag{9}$$

$$W_i = f''(t_i) + \lambda\varphi(t_i, t_i, U_i, V_i, W_i) + h\sum_{j=0}^{i}2\omega_j\partial_t g(t_i - t_j)\partial_t\varphi(t_i, t_j, U_j, V_j, W_j) +$$
$$h\sum_{j=0}^{i}\omega_j\left(\partial_t^2 g(t_i - t_j)\varphi(t_i, t_j, U_j, V_j, W_j) + g(t_i - t_j)\partial_t^2\varphi(t_i, t_j, U_j, V_j, W_j)\right), \tag{10}$$

где U_i, V_i и W_i — приближенные значения в точках сетки для $u(t_i), u'(t_i)$ и $u''(t_i)$ соответственно.

Мы видим, что полученная система является нелинейной. Итак, на практике мы использовали вычислительную среду, такую как программное обеспечение MATLAB, чтобы получить корни этой системы. Это означает, что мы нашли приближенное решение нашего уравнения (1).

С другой стороны, остается важный вопрос: являются ли предыдущие предположения $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_3)$ достаточными для существования и единственности решения системы (7)–(10)? Об этом мы узнаем в следующем подпункте.

4.1. Исследование системы

Вообще говоря, гипотезы, подтверждающие существование и единственность решения уравнения в бесконечномерном пространстве, не являются теми же гипотезами в конечномерном пространстве. Поэтому в следующей теореме мы добавим необходимые условия для того, чтобы система (7)–(10) имела единственное решение.

Теорема 3. *Пусть условия* $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_3)$ *выполнены. Предположим, что*

$$|\lambda|C < 1, \quad |\lambda|A < 1, \quad |\lambda|B < 1$$

для всех достаточно малых h, *тогда система* (7)–(10) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Очевидно, что уравнение (7) имеет единственное решение W_0 вследствие условия $|\lambda|C < 1$.

Теперь рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^3$, имеющее следующую стандартную норму:

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \right\|_1 = |X| + |Y| + |Z|.$$

Для простоты выкладок определим преобразование $\Psi_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ для всех $1 \leq i \leq N$ следующим образом:

$$\Psi_i \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Upsilon_1(X,Y,Z) \\ \Upsilon_2(X,Y,Z) \\ \Upsilon_3(X,Y,Z) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
\Upsilon_1(X,Y,Z) &= f(t_i) + h\omega_i g(t_i - t_i)\varphi(t_i, t_i, X, Y, Z) + h\sum_{j=0}^{i-1} \omega_j g(t_i - t_j)\varphi(t_i, t_j, U_j, V_J, W_j) \\
&= f(t_i) + h\sum_{j=0}^{i-1} \omega_j g(t_i - t_j)\varphi(t_i, t_j, U_j, V_j, W_j) = \vartheta_i^1, \\
\Upsilon_2(X,Y,Z) &= f'(t_i) + h\omega_i \partial_t g(t_i - t_i)\varphi(t_i, t_i, X, Y, Z) + h\omega_i g(t_i - t_i)\partial_t \varphi(t_i, t_i, X, Y, Z) + \\
&\quad h\sum_{j=0}^{i-1} \omega_j \left(\partial_t g(t_i - t_j)\varphi(t_i, t_j, U_j, V_j, W_j) + g(t_i - t_j)\partial_t \varphi(t_i, t_j, U_j, V_j, W_j)\right) \\
&= f'(t_i) + \lambda\omega_i h\varphi(t_i, t_i, X, Y, Z) + \vartheta_i^2
\end{aligned}$$

при

$$\vartheta_i^2 = h\sum_{j=0}^{i-1} \omega_j \left(\partial_t g(t_i - t_j)\varphi(t_i, t_j, U_j, V_j, W_j) + g(t_i - t_j)\partial_t \varphi(t_i, t_j, U_j, V_j, W_j)\right)$$

и

$$\begin{aligned}
\Upsilon_3(X,Y,Z) &= f''(t_i) + \lambda\varphi(t_i, t_i, X, Y, Z) + 2h\omega_i \partial_t g(t_i - t_i)\partial_t \varphi(t_i, t_i, X, Y, Z) + \\
&\quad h\omega_i \partial_t^2 g(t_i - t_i)\varphi(t_i, t_i, X, Y, Z) + h\omega_i g(t_i - t_i)\partial_t^2 \varphi(t_i, t_i, X, Y, Z) + \vartheta_i^3 \\
&= f''(t_i) + \lambda\varphi(t_i, t_i, X, Y, Z) + 2h\lambda\omega_i \partial_t \varphi(t_i, t_i, X, Y, Z) + \\
&\quad h\omega_i \partial_t^2 g(0)\varphi(t_i, t_i, X, Y, Z) + \vartheta_i^3,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\vartheta_i^3 &= h\sum_{j=0}^{i-1} \omega_j \left(\partial_t^2 g(t_i - t_j)\varphi(t_i, t_j, U_j, V_j, W_j) + g(t_i - t_j)\partial_t^2 \varphi(t_i, t_j, U_j, V_j, W_j)\right) + \\
&\quad h\sum_{j=0}^{i-1} 2\omega_j \partial_t g(t_i - t_j)\partial_t \varphi(t_i, t_j, U_j, V_j, W_j).
\end{aligned}$$

Поэтому мы видим, что

$$\Psi_i \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} - \Psi_i \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix},$$

где β_1, β_2 и β_3 задаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\beta_1 = 0,\\
&\beta_2 = h\lambda\omega_i\left(\varphi(t_i,t_i,X_1,Y_1,Z_1) - \varphi(t_i,t_i,X_2,Y_2,Z_2)\right),\\
&\beta_3 = \lambda\left(\varphi(t_i,t_i,X_1,Y_1,Z_1) - \varphi(t_i,t_i,X_2,Y_2,Z_2)\right) +\\
&\qquad 2\lambda h\omega_i\left(\partial_t\varphi(t_i,t_i,X_1,Y_1,Z_1) - \partial_t\varphi(t_i,t_i,X_2,Y_2,Z_2)\right) +\\
&\qquad h\omega_i\partial_t^2 g(0)\left(\varphi(t_i,t_i,X_1,Y_1,Z_1) - \varphi(t_i,t_i,X_2,Y_2,Z_2)\right).
\end{aligned}$$

В результате, используя предположение $(\mathcal{A}_3)$ и взяв $\varrho = |\partial_t^2 g(0)|$, получим

$$\begin{aligned}
&|\beta_2| \le h|\lambda|\varpi\left(A|X_1 - X_2| + B|Y_1 - Y_2| + C|Z_1 - Z_2|\right),\\
&|\beta_3| \le |\lambda|\left(A|X_1 - X_2| + B|Y_1 - Y_2| + C|Z_1 - Z_2|\right) +\\
&\qquad 2|\lambda|h\varpi\left(\overline{A}|X_1 - X_2| + \overline{B}|Y_1 - Y_2| + \overline{C}|Z_1 - Z_2|\right) +\\
&\qquad h\varpi\varrho\left(A|X_1 - X_2| + B|Y_1 - Y_2| + C|Z_1 - Z_2|\right).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| \le \eta_1|X_1 - X_2| + \eta_2|Y_1 - Y_2| + \eta_3|Z_1 - Z_2|,$$

где

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= h|\lambda|\varpi A + |\lambda|A + 2|\lambda|h\varpi\overline{A} + h\varpi\varrho A,\\
\eta_2 &= h|\lambda|\varpi B + |\lambda|B + 2|\lambda|h\varpi\overline{B} + h\varpi\varrho B,\\
\eta_3 &= h|\lambda|\varpi C + |\lambda|C + 2|\lambda|h\varpi\overline{C} + h\varpi\varrho C.
\end{aligned}$$

Используя обозначение $\eta = \max(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$, найдем

$$\left\|\Psi_i\begin{pmatrix}X_1\\Y_1\\Z_1\end{pmatrix} - \Psi_i\begin{pmatrix}X_2\\Y_2\\Z_2\end{pmatrix}\right\|_1 \le \eta\left\|\begin{pmatrix}X_1\\Y_1\\Z_1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}X_2\\Y_2\\Z_2\end{pmatrix}\right\|_1.$$

Для всех достаточно малых h и при условиях $|\lambda|C < 1$, $|\lambda|A < 1$ и $|\lambda|B < 1$ мы получим $0 < \eta < 1$. Таким образом, мы заключаем, что Ψ_i — сжатие $\mathbb{R}^3$ в себя. Следовательно, теорема Банаха о неподвижной точке подтверждает, что система (8)–(10) имеет единственное решение. □

5. Иллюстративные примеры

В данном пункте мы обсудим два основных примера, чтобы проверить точность и практичность результатов, полученных в данной работе.

Пример 1. Рассмотрим первое уравнение

$$u(t) = \int_0^t \ln(1 + t - s)\frac{t((s+1)^4 + 2s^2 + 4s + 2)}{(1 + u(s) + u'(s) + u''(s))^2}ds + f(t), \ \ t \in [0,1],$$

если мы возьмем $f(t) = 2t^2 - (t^2 + t)\ln(t+1)$, то получим точное решение $u(t) = t^2$.

Пример 2. Рассмотрим второе уравнение

$$u(t) = \int_0^t \left(\frac{t-s}{5}\right) \cos\big(s + t - 12\cos(4s)e^s + 13\sin(4s)e^s + u(s) + u'(s) + u''(s)\big)\, ds + f(t),$$

если мы возьмем

$$f(t) = \sin(4t)\exp(t) - 0.2(\cos(t) - 2\cos^2(t) - t\sin(t) + 1),\ \ t \in [0,1],$$

то получим точное решение $u(t) = \sin(4t)\exp(t)$.

Во-первых, мы видим, что ядра $g(t,s)$ и $\varphi(t,s,x,y,z)$ примера 1 удовлетворяют предположениям $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_3)$. Кроме того, $g(t-s) = \ln(1+t-s)$, поэтому $g(0) = \ln(1) = 0$ и $\partial_t g(0) = \lambda = 1$, а также постоянные Липшица A, B и C ядра φ удовлетворяют $A = B = C = \frac{1}{4}$. Тогда мы приходим к выводу, что предложенные выше необходимые условия $|\lambda|A < 1$, $|\lambda|B < 1$ и $|\lambda|C < 1$ также выполняются. Что касается второго примера, то ядра $g(t,s)$, $\varphi(t,s,x,y,z)$ также удовлетворяют предположениям $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_3)$. Функция $g(t-s) = \frac{t-s}{5}$ дает $g(0) = 0$ и $\partial_t g(0) = \frac{1}{5}$, а постоянные Липшица A, B и C удовлетворяют $A = B = C = 1$, они подтверждают, что условия $|\lambda|A < 1$, $|\lambda|B < 1$ и $|\lambda|C < 1$ выполняются. Следовательно, каждый из этих двух примеров имеет единственное решение. Теперь подойдем к их решению, рассмотрев систему (7)–(10). Заметим, что для всех моделирований мы выбрали метод трапеций в качестве правила квадратур и использовали метод Пикара в качестве итерационной схемы. Для сравнения нам необходимо ввести следующие функции ошибок:

$$E_1 = \max_{0\le i\le N} |u(t_i) - U_i|, \quad E_2 = \max_{0\le i\le N} |u'(t_i) - V_i|, \quad E_3 = \max_{0\le i\le N} |u''(t_i) - W_i|.$$

Используя различные значения N, представим полученные результаты в таблицах и графических иллюстрациях.

Таблица 1. Анализ ошибок настоящего метода для примера 1

Ошибка	N=10	N=100	N=250	N=500	N=1000
E_1	4.37E–4	4.38E–6	7.01E–7	1.75E–7	4.38E–8
E_2	1.87E–4	1.86E–6	2.99E–7	7.47E–8	1.87E–8
E_3	3.27E–4	3.26E–6	5.22E–7	1.30E–7	3.33E–8

Таблица 2. Анализ ошибок настоящего метода для примера 2

Ошибка	N=10	N=100	N=250	N=500	N=1000
E_1	2.90E–4	2.90E–6	4.64E–7	1.16E–7	2.90E–8
E_2	7.51E–5	7.51E–7	1.20E–7	3.00E–8	7.51E–9
E_3	2.95E–5	2.97E–7	4.81E–8	1.26E–8	3.76E–9

На рисунках 1–6 показаны точные и приближенные решения для примеров 1 и 2, а также их производные, которые являются почти идентичными только при $N = 20$. Кроме того, в таблицах 1 и 2 показано, что функции ошибок E_1, E_2 и E_3 близки к нулю при увеличении N, а это означает, что приближенные решения и их производные сходятся к точным решениям и их производным соответственно.

Таким образом, результаты моделирования подтверждают точность и эффективность нашей работы.

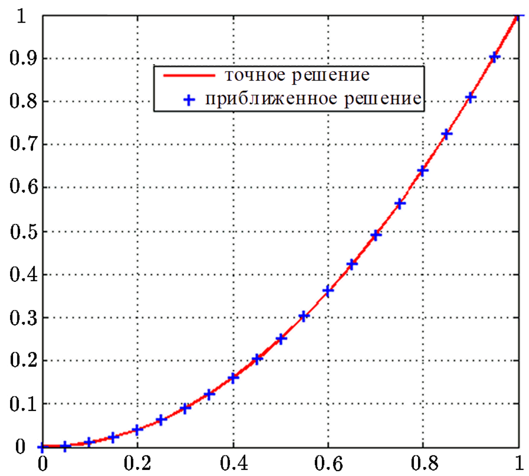

Рис. 1. График точного и численного решения примера 1

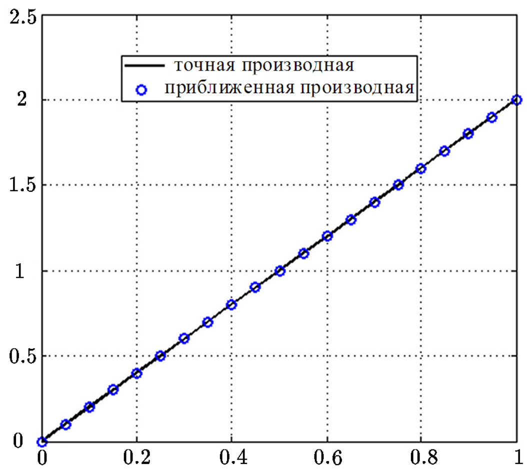

Рис. 2. График точной и численной производной примера 1

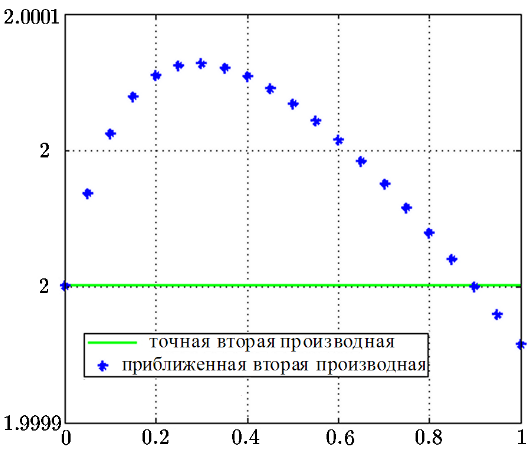

Рис. 3. График точной и численной второй производной решения примера 1

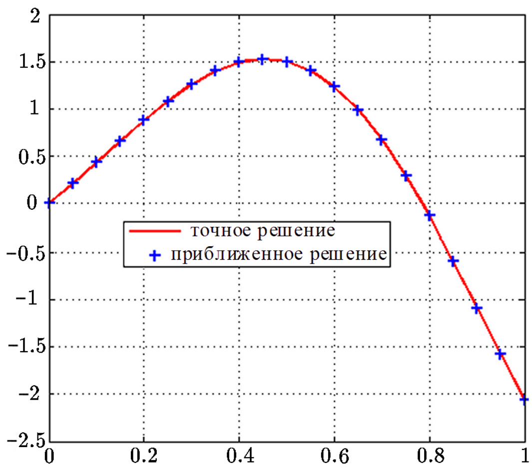

Рис. 4. График точного и численного решения примера 2

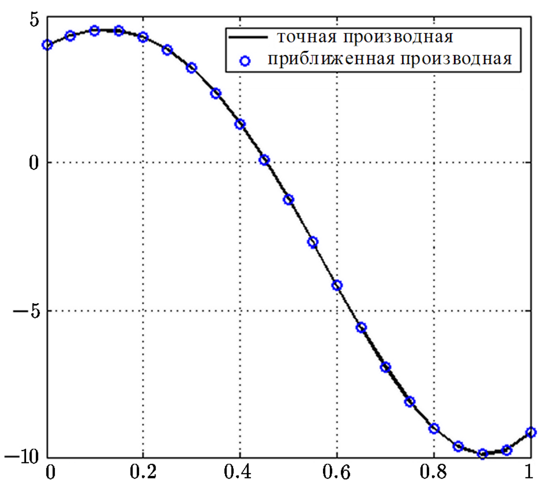

Рис. 5. График точной и численной производной решения примера 2

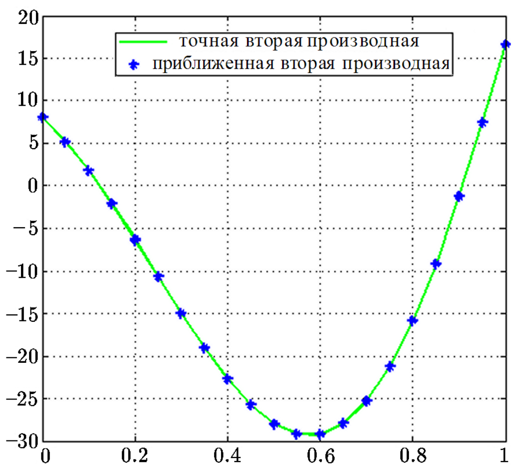

Рис. 6. График точной и численной второй производной решения примера 2

Выводы

В данной статье мы предложили класс нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с ядром типа свертки. Сначала мы обсудили необходимые и достаточные условия, гарантирующие существование и единственность решения предложенного уравнения. Затем мы построили численный процесс на основе метода Нистрема для получения приближенного решения этого уравнения. Мы также подтвердили наши результаты некоторыми наглядными примерами.

Литература

1. **Lakshmikantham V., Rao M.** Theory of Integro-Differential Equations. — London: Gordon & Breach, 1995.
2. **He J.H.** Some applications of nonlinear fractional differential equations and their approximations // Bull. Sci. Technol. — 1999. — Vol. 15, № 2. — P. 86–90.
3. **Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J.** Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006.
4. **Abdou M.A.** On a symptotic methods for Fredholm–Volterra integral equation of the second kind in contact problems // J. Comput. Appl. Math. — 2003. — Vol. 154, iss. 2. — P. 431–446.
5. **Le T.D., Moyne C., Murad M.A., Lima S.A.** A two-scale non-local model of swelling porous media incorporating ion size correlation effects // J. Mech. Phys. Solids. — 2013. — Vol. 61, iss. 12. — P. 2493–2521.
6. **Hu S., Khavanin M., Zhuang W.A.N.** Integral equations arising in the kinetic theory of gases // Appl. Anal. — 1989. — Vol. 34, № 3-4. — P. 261–266.
7. **Argyros I.K.** On a class of nonlinear integral equations arising in neutron transport // Aequ. Math. — 1988. — Vol. 36. — P. 99–111.
8. **Wazwaz A.M.** Linear and Nonlinear Integral Equations. — Berlin: Springer, 2011.
9. **Atkinson K.E.** The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind. — Cambridge University Press, 1997.
10. **Bounaya M.C., Lemita S., Ghiat M., Aissaoui M.Z.** On a nonlinear integro-differential equation of Fredholm type // Intern. J. Comput. Sci. Math. — 2021. — Vol. 13, № 2. — P. 194–205.
11. **Tamimi H., Saiedinezhad S., Ghaemi M.B.** Study on the integro-differential equations on $C^1(\mathbb{R}_+)$ // Comp. Appl. Math. — 2023. — Vol. 42, № 2. — Article № 93. — DOI:10.1007/s40314-023-02239-4.
12. **Lemita S., Touati S., Derbal K.** The approximate solution of nonlinear Fredholm implicit integro-differential equation in the complex plane // Asian-Eur. J. Math. — 2022. — Vol. 15, № 7. — Article № 2250131.
13. **Erfanian M., Zeidabadi H., Parsamanesh M.** Using of PQWs for solving NFID in the complex plane //Adv. Differ. Equ. — 2020. — Article № 52. — DOI:10.1186/s13662-020-2528-z.
14. **Touati S., Lemita S., Ghiat M., Aissaoui M.Z.** Solving a nonlinear Volterra–Fredholm integro-differential equation with weakly singular kernels // Fasc. Math. — 2019. — Vol. 62. — P. 155–168.
15. **Ghiat M., Guebbai H., Kurulay M., Segni S.** On the weakly singular integro-differential nonlinear Volterra equation depending in acceleration term // Comp. Appl. Math. — 2020. — Vol. 39, № 3. — Article № 206. — https://doi.org/10.1007/s40314-020-01235-2.
16. **Altürk A., Sahin S.** An application of the weighted mean value method to Fredholm integral equations with Toeplitz plus Hankel kernels // J. Interpolat. Approx. Sci. Comput. — 2017. — Vol. 2. — P. 9–17.

17. **Dung V.T., Ha Q.T.** Approximate solution for integral equations involving linear Toeplitz plus Hankel parts // Comput. Appl. Math. — 2021. — Vol. 40, № 5. — Article № 172.
18. **Sarkar N., Sen M., Saha D.** Solution of non linear Fredholm integral equation involving constant delay by BEM with piecewise linear approximation // J. Interdiscip. Math. — 2020. — Vol. 23, iss. 2. — P. 537–544.
19. **Amin R., Shah K., Asif M., Khan I.** Efficient numerical technique for solution of delay Volterra–Fredholm integral equations using Haar wavelet // Heliyon. — 2020. — Vol. 6, iss. 10. — P. 1–6.
20. **Abdou M.A., Elhamaky M.N., Soliman A.A., Mosa G.A.** The behaviour of the maximum and minimum error for Fredholm–Volterra integral equations in two-dimensional space // J. Interdiscip. Math. — 2021. — Vol. 24, iss. 8. — P. 2049–2070.
21. **Mi J., Huang J.** Collocation method for solving two-dimensional nonlinear Volterra–Fredholm integral equations with convergence analysis // J. Comput. Appl. Math. — 2023. — Vol. 428. — Article № 115188.
22. **Cardinali T., Matucci S., Rubbioni P.** Controllability of nonlinear integral equations of Chandrasekhar type // J. Fixed Point Theory Appl. — 2022. — Vol. 24, iss. 3. — Article № 58.
23. **Hernández-Verón M.A., Martínez E.** Iterative schemes for solving the Chandrasekhar H-equation using the Bernstein polynomials // J. Comput. Appl. Math. — 2022. — Vol. 404. — Article № 113391.
24. **Ashpazzadeh E., Chu Y.M., Hashemi M.S., Moharrami M., Inc M.** Hermite multiwavelets representation for the sparse solution of nonlinear Abel's integral equation // Appl. Math. Comput. — 2022. — Vol. 427. — Article № 127171.
25. **Wang T., Liu S., Zhang Z.** Singular expansions and collocation methods for generalized Abel integral equations // J. Comput. Appl. Math. — 2023. — Vol. 429. — Article № 115240.
26. **Fariborzi Araghi M.A., Noeiaghdam S.** Finding optimal results in the homotopy analysis method to solve fuzzy integral equations // Adv. Fuzzy Int. Differ. Equ. — 2022. — Vol. 412. — P. 173–195. — https://doi.org/10.1007/978-3-030-73711-5_7.
27. **Alijani Z., Kangro U.** Numerical solution of a linear fuzzy Volterra integral equation of the second kind with weakly singular kernels // Soft. Comput. — 2022. — Vol. 26. — P. 12009–12022.
28. **Kazemi M., Deep A., Nieto J.** An existence result with numerical solution of nonlinear fractional integral equations // Math. Methods Appl. Sci. — 2023. — Vol. 46, iss. 9. — P. 10384–10390.
29. **Pu T., Fasondini M.** The numerical solution of fractional integral equations via orthogonal polynomials in fractional powers // Adv. Comput. Math. — 2023. — Vol. 49. — Article № 7.
30. **Linz P.** Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. — Philadelphia: SIAM, 1985.

Поступила в редакцию 21 ноября 2023 г.
После исправления 2 апреля 2024 г.
Принята к печати 19 апреля 2024 г.