

AMS subject classification: 74S05, 35J25, 65N99

Идентификация параметров данных с ограничениями с помощью нового класса рациональных фрактальных функций

С.К. Катияр, А.К.Б. Чанд, С. Джха

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Madras, Chennai, 600036, India

E-mails: sbhkatiyar@gmail.com (Катияр С.К.), chand@iitm.ac.in (Чанд А.К.Б.), sangitajha285@gmail.com (Джха С.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 3, Vol. 14, 2021.

Катияр С.К., Чанд А.К.Б., Джха С. Идентификация параметров данных с ограничениями с помощью нового класса рациональных фрактальных функций // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 3. — С. 261–276.

Данная статья дает теоретическую основу для приложений фрактальных интерполяционных функций (ФИФ). Мы строим рациональные кубические сплайновые ФИФ (РКСФИФ) с квадратичным знаменателем, включающим два параметра формы. Элементы итерированной функциональной системы (ИФС) в каждом подынтервале идентифицируются соответствующим образом, так что график результирующей C^1 -РКСФИФ лежит в заданном прямоугольнике. К этим параметрам, в частности, относятся условия положительности C^1 -РКСФИФ. Проблема визуализации данных с ограничениями также рассматривается, когда данные лежат выше прямой линии; предлагаемая фрактальная кривая должна лежать на той же стороне линии. Мы проиллюстрируем нашу схему интерполяции некоторыми численными примерами.

DOI: 10.15372/SJNM20210303

Ключевые слова: итерированная функциональная система, фрактальные интерполяционные функции, рациональные кубические фрактальные функции, рациональная кубическая интерполяция, интерполяция с ограничениями, положительность.

Katiyar S.K., Chand A.K.B., Jha S. Parameter identification of constrained data by a new class of rational fractal function // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 3. — P. 261–276.

This paper sets a theoretical foundation for applications of fractal interpolation functions (FIFs). We construct rational cubic spline FIFs (RCSFIFs) with a quadratic denominator involving two shape parameters. The elements of the iterated function system (IFS) in each subinterval are identified befittingly so that the graph of the resulting C^1 -RCSFIF lies within a prescribed rectangle. These parameters include, in particular, conditions on the positivity of the C^1 -RCSFIF. The problem of visualization of constrained data is also addressed when the data is lying above a straight line, the proposed fractal curve is required to lie on the same side of the line. We illustrate our interpolation scheme with some numerical examples.

Keywords: iterated function system, fractal interpolation functions, rational cubic fractal functions, rational cubic interpolation, constrained interpolation, positivity.

1. Введение

Часто для физической интерпретации желательно или даже необходимо, чтобы интерполирующая функция сохраняла определенные типичные свойства формы научных

данных, такие как выпуклость, монотонность, положительность и ограниченность линей или поверхностью. Эта проблема поиска достаточно гладкой функции, которая гарантирует сохранение свойств геометрической формы заданных данных, обычно называется интерполяцией/аппроксимацией с сохранением формы; ей уделяется значительное внимание в области математики, информатики и инженерного проектирования. Без изменения заданных данных или добавления дополнительных узлов рациональные сплайны (см., например, [10–12, 14, 29–31] и имеющиеся в них ссылки) успешно заменили обычные многочлены в сохраняющей форму среде, благодаря их способности изменять форму кривых и поверхностей с помощью параметров натяжения. Кроме того, они обеспечивают мощные методы среди различных методов классического численного анализа для построения кривых, поверхностей и некоторых аналитических примитивных элементов, таких как конические сечения, которые широко используются в инженерном проектировании, визуализации данных, картографии и различных приложениях компьютерной графики. Многие авторы внесли значительный вклад в это направление, и в литературе имеется множество статей на эту тему.

Термин фрактальная интерполяционная функция был введен Барнсли [1] в 1986 г. на основе теории ИФС. Он создал способ определения ФИФ как фиксированной точки оператора Рида–Байрактаревича, определяемого на соответствующем пространстве функций, что стало мощным средством аппроксимации объектов неправильной формы. ФИФ отличаются от традиционных интерполяционных функций тем, что их графики являются типичными фракталами или самоподобными множествами. Новизна фрактальных интерполянтов заключается в их способности моделировать множество данных с помощью класса гладких или негладких функций в зависимости от решаемой задачи. Кроме того, дифференцируемые ФИФ [2] положили начало замечательной взаимосвязи между фрактальными функциями и традиционными нерекурсивными интерполянтами. Впоследствии многие авторы занялись построением различных типов ФИФ, включая сплайновые ФИФ (см., например, [9, 24–26, 32, 34] и ФИФ со скрытыми переменными [3, 5, 7, 16]). Таким образом, фрактальные методы обеспечивают большую гибкость и разнообразие при выборе интерполянта. Следовательно, этот класс функций может использоваться для математических и инженерных задач, где классический подход сплайновой интерполяции может не быть удовлетворительным. Чтобы расширить их перспективы, был введен специальный класс фрактальных интерполянтов, и в последнее время аспекты сохранения их формы исследуются в литературе. Следуя этой цели, Чанд с коллегами инициировали исследование фрактальной интерполяции и аппроксимации с сохранением формы с использованием различных семейств полиномиальных и рациональных ИФС (см., например, [6, 8, 15–22]).

Схемы фрактальной интерполяции и схемы разбиения, похоже, развиваются независимо и параллельно. Схемы рекурсивного разбиения, которые состоят из повторных применений некоторых простых правил, определяющих последовательное измельчение первоначальных сеток, могут давать сохраняющие форму интерполянты с фрактальностью производной интерполянта, поскольку все функции аппроксимируются линейными комбинациями сдвигов одной фрактальной функции. Заинтересованный читатель может обратиться к обзорной статье [13] и приведенным в ней ссылкам. В последнее время было замечено, что схемы разбиения могут быть выражены в терминах фракталов с использованием локальных ИФС [4]. Понятие фрактального объекта и самоподобия интенсивно изучается в литературе и применяется в различных областях математики. Любое конечное семейство аффинных операторов и любое разбиение интервала $[0, 1]$ дают уравнение самоподобия, суммируемым решением которого (если оно существует) является фрак-

тальная кривая. Понятие общих Lp -фрактальных кривых, которые являются решениями уравнений самоподобия в пространстве $Lp [0, 1]$ [27], и точный анализ регулярности фрактальных функций могут иметь прямое отношение к этой работе. Аппроксимацию решений обыкновенного дифференциального уравнения фрактальными функциями можно найти в [33].

Ограничение интерполяции с целью сохранения формы — хорошо зарекомендовавший себя метод моделирования научных данных. Существующие исследования ФИФ с сохранением формы, в основном, связаны с тремя важными свойствами формы, а именно положительность, монотонность и выпуклость. Фрактальные функции недостаточно хорошо изучены в области интерполяции с ограничениями, и данная статья является попыткой исследования в этом направлении. В статье представлены описание и анализ РКСФИФ, которая имеет два параметра формы, связанные с каждым интервалом. Элементы ИФС в каждом подынтервале идентифицируются соответствующим образом, так что граф результирующей C^1 -РКСФИФ лежит в заданном прямоугольнике. Задача удержания графика C^1 -РКСФИФ в пределах прямоугольника включает, в частности, проблему положительности C^1 -РКСФИФ и, следовательно, улучшает достаточные условия положительности, уже рассматривавшиеся в [31]. Проблема визуализации данных с ограничениями также решается, когда данные лежат выше прямой линии; соответствующие фрактальные кривые должны лежать на одной стороне линии. Чтобы получить визуально желаемую форму, коэффициенты масштабирования и параметры формы могут корректироваться с помощью методов оптимизации. Схема C^1 -РКСФИФ является, вообще говоря, глобальной, поскольку вариации коэффициента масштабирования конкретного подынтервала могут влиять на всю конфигурацию. Однако она восстанавливает традиционную схему рациональной интерполяции [31], когда коэффициент масштабирования в каждом подынтервале берется равным нулю.

2. Основные факты

В этом пункте мы вводим основные термины, необходимые для нашей работы. Сформулируем также промежуточные утверждения, соответствующие основным шагам. Для более детального изложения читатель может обратиться к [1, 2, 23].

2.1. ИФС для фрактальных функций

Пусть \mathbb{N}_r обозначает подмножество $\{1, 2, \dots, r\}$ множества \mathbb{N} , $r \in \mathbb{N}$. И пусть дано множество точек данных $\mathcal{D} = \{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 : i \in \mathbb{N}_N\}$, удовлетворяющее $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_N$, $N > 2$. Положим $I = [x_1, x_N]$, $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ для $i \in \mathbb{N}_{N-1}$. Предположим, что $L_i : I \rightarrow I_i$, $i \in \mathbb{N}_{N-1}$, — сжимающие гомеоморфизмы такие, что

$$L_i(x_1) = x_i, \quad L_i(x_N) = x_{i+1}. \quad (1)$$

Например, если $L_i(x) = a_i x + b_i$, то условия в (1) дают:

$$a_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_N - x_1}, \quad b_i = \frac{x_N x_i - x_1 x_{i+1}}{x_N - x_1}, \quad i \in \mathbb{N}_{N-1}. \quad (2)$$

Пусть $0 < r_i < 1$, $i \in \mathbb{N}_{N-1}$, и $X := I \times \mathbb{R}$. Пусть дано $N - 1$ непрерывных отображений $F_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

$$F_i(x_1, y_1) = y_i, \quad F_i(x_N, y_N) = y_{i+1}, \quad |F_i(x, y) - F_i(x, y^*)| \leq r_i |y - y^*|, \quad (3)$$

где $(x, y), (x, y^*) \in X$. Определим $w_i : X \rightarrow I_i \times \mathbb{R} \subseteq X$, $w_i(x, y) = (L_i(x), F_i(x, y))$ $\forall i \in \mathbb{N}_{N-1}$. Известно [1], что существует метрика на \mathbb{R}^2 , эквивалентная евклидовой метрике, относительно которой w_i , $i \in \mathbb{N}_{N-1}$, являются сжатиями. Множество $\mathcal{I} = \{X; w_i : i \in \mathbb{N}_{N-1}\}$ является ИФС. Имеется множественнозначное отображение Хатчинсона $W : H(X) \rightarrow H(X)$, связанное с ИФС \mathcal{I} и определяемое как $W(B) = \bigcup_{i=1}^{N-1} w_i(B)$ для $B \in H(X)$, где $H(X)$ — множество всех непустых компактных подмножеств X с метрикой Хаусдорфа h_d . Расстояние Хаусдорфа между A и B в $H(X)$ определяется как $h_d(A, B) = \max \{ \max_{a \in A} \min_{b \in B} d(a, b), \max_{b \in B} \min_{a \in A} d(b, a) \}$. Полное метрическое пространство $(H(X), h_d)$ называется *пространством фракталов*. Кроме того, W является сжимающим отображением на полном метрическом пространстве $(H(X), h_d)$. По теореме Банаха о неподвижной точке существует единственное множество $G \in H(X)$ такое, что $W(G) = G$. Это множество G называется *аттрактором* или *детерминированным фракталом*, соответствующим ИФС \mathcal{I} . Для любого выбора L_i и F_i , удовлетворяющего условиям в (1)–(3), имеет место следующий результат.

Предложение 1 (Барнсли [1]). *ИФС $\{X; w_i : i \in \mathbb{N}_{N-1}\}$, определенная выше, допускает единственный аттрактор G , и G является графиком непрерывной функции $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, подчиняющейся $g(x_i) = y_i$ для $i \in \mathbb{N}_N$.*

Определение 1. Вышеупомянутая функция g , график которой является аттрактором некоторой ИФС, называется *ФИФ* или *самоподобной функцией*, соответствующей этой ИФС $\{X; w_i : i \in \mathbb{N}_{N-1}\}$.

Приведенная выше ФИФ g получается как неподвижная точка оператора Рида–Байрактаревиича (РВ) T , определенного на полном метрическом пространстве (\mathcal{G}, ρ) :

$$(Th^*)(x) = F_i(L_i^{-1}(x), h^* \circ L_i^{-1}(x)) \quad \forall x \in I_i, \quad i \in \mathbb{N}_{N-1},$$

где $\mathcal{G} := \{h^* : I \rightarrow \mathbb{R} : h^* \text{ является непрерывной на } I, h^*(x_1) = y_1, h^*(x_N) = y_N\}$ снабжена равномерной метрикой ρ . Можно видеть, что T — сжимающее отображение на (\mathcal{G}, ρ) с коэффициентом сжатия $r^* := \max\{r_i : i \in \mathbb{N}_{N-1}\} < 1$. Неподвижной точкой T является ФИФ g , соответствующая ИФС \mathcal{I} . Поэтому g удовлетворяет функциональному уравнению

$$g(x) = F_i(L_i^{-1}(x), g \circ L_i^{-1}(x)), \quad x \in I_i, \quad i \in \mathbb{N}_{N-1}. \quad (4)$$

Наиболее широко изученные в литературе ФИФ получены из ИФС

$$\mathcal{I} = \{X; w_i(x, y) \equiv (L_i(x) = a_i x + b_i, F_i(x, y) = \alpha_i y + q_i(x)) : i \in \mathbb{N}_{N-1}\}. \quad (5)$$

Здесь $q_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ — подходящие непрерывные функции, как правило, многочлены, удовлетворяющие (3). Если q_i — многочлены, то ИФС и соответствующая ФИФ называются полиномиальными. Аналогично, если q_i являются рациональными функциями, то соответствующая ФИФ называется рациональной. Параметр $-1 < \alpha_i < 1$ называется коэффициентом масштабирования преобразования w_i , а $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1})$ — масштабным вектором, соответствующим ИФС. Коэффициенты масштабирования обеспечивают гибкость в выборе интерполянта в отличие от единственности интерполянта в традиционных методах, а также определяют размерность интерполянта. Для получения рациональной ФИФ с C^p -непрерывностью нам понадобится следующее предложение, которое было дано в [6]. Его можно получить с помощью теоремы Барнсли–Харрингтона [2].

Предложение 2. Пусть $\{(x_i, y_i) : i \in \mathbb{N}_N\}$ — заданные данные интерполяции со строго возрастающими абсциссами. Рассмотрим ИФС \mathcal{I} , где $L_i(x) = a_i x + b_i$ удовлетворяет (1) и $F_i(x, y) = \alpha_i y + q_i(x)$, $q_i(x) = \frac{P_i(x)}{Q_i(x)}$; $P_i(x)$, $Q_i(x)$ — подходящим образом выбранные многочлены по x степени M и N соответственно, и $Q_i(x) \neq 0$ для каждого $x \in [x_1, x_N]$. Предположим, что для некоторого целого числа $p \geq 0$, $|\alpha_i| < a_i^p$, $i \in \mathbb{N}_{N-1}$. Пусть $F_{i,m}(x, y) = \frac{\alpha_i y + q_i^{(m)}(x)}{a_i^m}$, $q_i^{(m)}$ представляет m -ю производную от $q_i(x)$ относительно x , $y_{1,m} = \frac{q_1^{(m)}(x_1)}{a_1^m - \alpha_1}$, $y_{N,m} = \frac{q_{N-1}^{(m)}(x_N)}{a_{N-1}^m - \alpha_{N-1}}$, $m \in \mathbb{N}_p$. Если $F_{i-1,m}(x_N, y_{N,m}) = F_{i,m}(x_1, y_{1,m})$ для $i = 2, 3, \dots, N-1$ и $m \in \mathbb{N}_p$, то ИФС $\{X; (L_i(x), F_i(x, y)) : i \in \mathbb{N}_{N-1}\}$ определяет рациональный ФИФ $\Psi \in C^p[x_1, x_N]$, и $\Psi^{(m)}$ является рациональным ФИФ, определяемой ИФС $\{X; (L_i(x), F_{i,m}(x, y)) : i \in \mathbb{N}_{N-1}\}$ для $m \in \mathbb{N}_p$.

Определение 2. Пусть дано множество точек данных $\mathcal{D} = \{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 : i \in \mathbb{N}_N\}$. Если значения функции в узлах удовлетворяют условию $y_i > 0$ для $i \in \mathbb{N}_N$, они называются положительными (неотрицательными) данными. Функция $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ считается положительной на I , если $h(x) \geq 0$ для всех $x \in I$.

На этом подготовка к данному исследованию завершена, и теперь мы готовы приступить к нашему основному пункту.

3. \mathcal{C}^1 -РКСФИФ с двумя семействами параметров формы

Пусть $\{(x_i, y_i) : i \in \mathbb{N}_N\}$, $x_1 < x_2 < \dots < x_N$, — заданное множество точек данных. Пусть y_i и d_i обозначают значение функции и значение производной в узле x_i , $i \in \mathbb{N}_N$. Требуемая РКСФИФ с двумя семействами параметров формы может быть получена с помощью ИФС, приведенной в (5), с

$$q_i(x) \equiv q_i^*(\theta) = \frac{U_i(1-\theta)^3 + V_i(1-\theta)^2\theta + W_i(1-\theta)\theta^2 + Z_i\theta^3}{u_i + v_i\theta(1-\theta)}, \quad \theta = \frac{x - x_1}{x_N - x_1}, \quad x \in I,$$

где неизвестные U_i , V_i , W_i и Z_i должны быть определены из условий интерполяции Эрмита. Здесь $u_i > 0$, $v_i > 0$ — свободные параметры, называемые параметрами формы. При этом специальном выборе $q_i(x)$ предположим, что сжимающее отображение T имеет единственную неподвижную точку $\Psi \in \mathcal{G}$, удовлетворяющую

$$\begin{aligned} \Psi(L_i(x)) &= F_i(x, \Psi(x)) = \alpha_i \Psi(x) + q_i(x) \\ &= \alpha_i \Psi(x) + \frac{U_i(1-\theta)^3 + V_i(1-\theta)^2\theta + W_i(1-\theta)\theta^2 + Z_i\theta^3}{u_i + v_i\theta(1-\theta)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Условия $F_i(x_1, y_1) = y_i$ и $F_i(x_N, y_N) = y_{i+1}$ можно переформулировать как условия интерполяции: $\Psi(x_i) = y_i$, $\Psi(x_{i+1}) = y_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}_{N-1}$. Условия интерполяции определяют коэффициенты U_i и Z_i следующим образом: подставив $x = x_1$ в (6), получим

$$\Psi(L_i(x_1)) = \alpha_i \Psi(x_1) + \frac{U_i}{u_i} \implies y_i = \alpha_i y_1 + \frac{U_i}{u_i} \implies U_i = u_i(y_i - \alpha_i y_1).$$

Аналогичным образом, если мы возьмем $x = x_N$ в (6), то получим $Z_i = u_i(y_{i+1} - \alpha_i y_N)$.

Теперь получим $\Psi \in \mathcal{C}^1(I)$, налагая условия из предложения 2. По предположению предложения 2 $|\alpha_i| \leq \kappa a_i$, $i \in \mathbb{N}_{N-1}$, где $0 \leq \kappa < 1$. Мы также имеем $q_i \in \mathcal{C}^1(I)$. В терминологии предложения 2 для $i \in \mathbb{N}_{N-1}$ пусть

$$F_{i,1}(x, y) = \frac{\alpha_i y + q_i^{(1)}(x)}{a_i}, \quad y_{1,1} = d_1, \quad y_{N,1} = d_N, \quad F_{i,1}(x_1, d_1) = d_i, \quad F_{i,1}(x_N, d_N) = d_{i+1}.$$

Тогда, согласно предложению 2, ФИФ $\Psi \in \mathcal{C}^1(I)$. Кроме того, $\Psi^{(1)}$ — фрактальная функция, определяемая ИФС $\mathcal{T}^* \equiv \{\mathbb{R}^2; (L_i(x), F_{i,1}(x, y)) : i \in \mathbb{N}_{N-1}\}$. Рассмотрим $\mathcal{G}^* := \{h^* \in \mathcal{C}^1(I) : h^*(x_1) = d_1, h^*(x_N) = d_N\}$ с равномерной метрикой. ИФС \mathcal{T}^* дает сжимающее отображение $T^* : \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{G}^*$, определяемое как $(T^*g^*)(L_i(x)) = F_{i,1}(x, g^*(x))$, $x \in I$. неподвижной точкой T^* является $\Psi^{(1)}$. Следовательно, $\Psi^{(1)}$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Psi^{(1)}(L_i(x)) = F_{i,1}(x, \Psi^{(1)}(x)) = \frac{\alpha_i \Psi^{(1)}(x) + q_i^{(1)}(x)}{a_i}. \quad (7)$$

Условия $F_{i,1}(x_1, d_1) = d_i$ и $F_{i,1}(x_N, d_N) = d_{i+1}$ можно переформулировать как условия интерполяции производной: $\Psi^{(1)}(x_i) = d_i$, $\Psi^{(1)}(x_{i+1}) = d_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}_{N-1}$. Используя $x = x_1$ в (7), получим

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)}(L_i(x_1)) &= \frac{\alpha_i \Psi^{(1)}(x_1) + u_i V_i - (3u_i + v_i)U_i}{a_i} \\ &\quad \Downarrow \\ V_i &= (3u_i + v_i)(y_i - \alpha_i y_1) + u_i h_i d_i - \alpha_i u_i (x_N - x_1) d_1. \end{aligned}$$

Аналогичным образом подстановка $x = x_N$ в (7) дает

$$W_i = (3u_i + v_i)(y_{i+1} - \alpha_i y_N) - u_i h_i d_{i+1} + \alpha_i u_i (x_N - x_1) d_N.$$

С этими значениями U_i , V_i , W_i , и Z_i мы переформулируем искомую \mathcal{C}^1 -РКСФИФ (6) следующим образом:

$$\Psi(L_i(x)) = \alpha_i \Psi(x) + \frac{P_i(x)}{Q_i(x)}, \quad (8)$$

где $P_i(x) \equiv P_i^*(\theta) = u_i(y_i - \alpha_i y_1)(1 - \theta)^3 + \{(3u_i + v_i)(y_i - \alpha_i y_1) + u_i h_i d_i - \alpha_i u_i (x_N - x_1) d_1\}(1 - \theta)^2 \theta + \{(3u_i + v_i)(y_{i+1} - \alpha_i y_N) - u_i h_i d_{i+1} + \alpha_i u_i (x_N - x_1) d_N\}(1 - \theta) \theta^2 + u_i (y_{i+1} - \alpha_i y_N) \theta^3$, $Q_i(x) \equiv Q_i^*(\theta) = u_i + v_i \theta (1 - \theta)$, $\theta = \frac{x - x_1}{x_N - x_1}$.

Поскольку РКСФИФ Ψ в (8) получается как решение уравнения с неподвижной точкой $Tg = g$, она является единственной для фиксированного выбора коэффициентов масштабирования и параметров формы.

Замечание 1 (Свойство интервального натяжения). Пусть $\Delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$. Тогда (8) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi(L_i(x)) &= \alpha_i \Psi(x) + (y_i - \alpha_i y_1)(1 - \theta) + (y_{i+1} - \alpha_i y_N) \theta + \\ &\quad \frac{u_i h_i \theta (1 - \theta) [(2\theta - 1) \Delta_i^* + (1 - \theta) d_i^* - \theta d_{i+1}^*]}{Q_i(\theta)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $d_i^* = d_i - \frac{\alpha_i d_1}{a_i}$, $d_{i+1}^* = d_{i+1} - \frac{\alpha_i d_N}{a_i}$, $\Delta_i^* = \Delta_i - \alpha_i \frac{y_N - y_1}{h_i}$. Когда $v_i \rightarrow \infty$ в (9), Ψ сходится к следующей аффинной ФИФ:

$$\Psi(L_i(x)) = \alpha_i \Psi(x) + (y_i - \alpha_i y_1)(1 - \theta) + (y_{i+1} - \alpha_i y_N)\theta. \quad (10)$$

Опять же, если $\alpha_i \rightarrow 0^+$ при $v_i \rightarrow \infty$, то РКСФИФ преобразуется в классический аффинный интерполянт. Следовательно, параметр формы v_i имеет очень важное значение для графического отображения данных, в то время как u_i может принимать любое положительное значение. Увеличение значения параметра v_i в $[x_i, x_{i+1}]$ преобразует рациональные кубические функции в прямую $y_i(1 - \theta) + y_{i+1}\theta$.

Замечание 2. Если $\alpha_i = 0$, $i \in \mathbb{N}_{N-1}$, то получаемая в результате РКСФИФ совпадает с кусочно определенным рекурсивным классическим рациональным кубическим интерполянтом C следующим образом:

$$\Psi(L_i(x)) = \frac{P_i^*(\theta)}{Q_i^*(\theta)}, \quad (11)$$

где $P_i^*(\theta) = u_i y_i (1 - \theta)^3 + [(3u_i + v_i)y_i + u_i h_i d_i](1 - \theta)^2 \theta + [(3u_i + v_i)y_{i+1} - u_i h_i d_{i+1}](1 - \theta)\theta^2 + u_i y_{i+1} \theta^3$, $Q_i^*(\theta) = u_i + v_i \theta(1 - \theta)$. Поскольку $\frac{L_i^{-1}(x) - x_1}{x_N - x_1} = \frac{x - x_i}{h_i} = v$ (например), из (11) для $x \in I_i = [x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$\Psi(x) = \frac{P_i^*(v)}{Q_i^*(v)} \equiv C_i(x) \text{ (например)}, \quad (12)$$

где v — локализованная переменная. Рациональный кубический сплайн $C \in \mathcal{C}^1(I)$ определяется путем $C|_{I_i} = C_i$, $i \in \mathbb{N}_{N-1}$. Это показывает, что если мы позволим $\alpha_i \rightarrow 0$, то график нашей РКСФИФ на $[x_i, x_{i+1}]$ приближается к графику классического рационального кубического интерполянта, описанного Сарфразом и Хуссейном [31].

Замечание 3. Интересно отметить, что когда $u_i = 1$, $v_i = 0$ и $|\alpha_i| \leq \kappa a_i$ для $i \in \mathbb{N}_{N-1}$, $\kappa \in (0, 1)$ в уравнении (8), то получаемая в результате РКСФИФ совпадает с \mathcal{C}^1 -кубической эрмитовой ФИФ. Если возьмем $u_i = 1$, $v_i = 0$ и $\alpha_i = 0$, то для $x \in [x_i, x_{i+1}]$ получим $\Psi(x) = (2\theta^3 - 3\theta^2 + 1)y_i + (\theta^3 - 2\theta^2 + \theta)h_i d_i + (-2\theta^3 + 3\theta^2)y_{i+1} + (\theta^3 - \theta^2)h_i d_{i+1}$. Следовательно, Ψ восстанавливает классический кусочный \mathcal{C}^1 -кубический эрмитовый интерполянт на I .

4. Идентификация параметров РКСФИФ

В этом пункте мы рассмотрим проблему идентификации параметров РКСФИФ, чтобы соответствующие \mathcal{C}^1 -РКСФИФ имели желаемые свойства формы. В подпункте 4.1 получим достаточное условие для параметров, чтобы РКСФИФ генерировала положительные кривые для заданного положительного множества данных. В подпункте 4.2 рассмотрим несколько общую проблему, а именно проблему определения условий параметров ИФС для включения графика соответствующей РКСФИФ в заданный прямоугольник. Мы определим подходящие значения параметров, которые воспроизводят РКСФИФ с графиками, расположенными выше заданной прямой линии, в подпункте 4.3.

4.1. \mathcal{C}^1 -РКСФИФ, сохраняющие положительность

Для произвольного выбора коэффициентов масштабирования и параметров формы РКСФИФ Ψ , описанные выше, могут не быть положительными, если множество данных положительное. Это подобно обычным сплайн-схемам, которые не обеспечивают

желаемых характеристик формы данных. Мы должны ограничить коэффициенты масштабирования и параметры формы для РКСФИФ, сохраняющей положительность, как описано в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $\{(x_i, y_i, d_i) : i \in \mathbb{N}_N\}$ — заданные положительные данные. Если (i) выбирается коэффициент масштабирования α_i в виде:

$$\alpha_i \in \left[0, \min \left\{ a_i, \frac{y_i}{y_1}, \frac{y_{i+1}}{y_N} \right\} \right), \quad i \in \mathbb{N}_{N-1}, \quad (13)$$

(ii) для $i \in \mathbb{N}_{N-1}$ параметры формы u_i и v_i ограничиваются следующим образом:

$$u_i > 0, \\ v_i \geq \max \left\{ 0, -u_i \left[3 + \frac{h_i d_i - \alpha_i (x_N - x_1) d_1}{y_i - \alpha_i y_1} \right], -u_i \left[3 + \frac{-h_i d_{i+1} + \alpha_i (x_N - x_1) d_N}{y_{i+1} - \alpha_i y_N} \right] \right\}, \quad (14)$$

тогда мы получим C^1 -РКСФИФ Ψ , сохраняющую положительность.

Доказательство. Мы имеем $\Psi(L_i(x)) = \alpha_i \Psi(x) + \frac{P_i^*(\theta)}{Q_i^*(\theta)}$, $\theta = \frac{x - x_1}{x_N - x_1}$, $x \in I$. Если $\psi(x) \geq 0$, легко убедиться в том, что для $i \in \mathbb{N}_{N-1}$ когда $\alpha_i \geq 0$, $i \in \mathbb{N}_{N-1}$, достаточное условие для $\Psi(L_i(x)) > 0$ для всех $x \in I$ следующее: $\frac{P_i^*(\theta)}{Q_i^*(\theta)} > 0 \forall \theta \in [0, 1]$. Таким образом, $\alpha_i \geq 0$, $i \in \mathbb{N}_{N-1}$, — начальные условия для коэффициентов масштабирования. Поскольку $Q_i^*(\theta) > 0 \forall \theta \in [0, 1]$, $u_i > 0$, $v_i > 0$, $i \in \mathbb{N}_{N-1}$, положительность РКСФИФ $\frac{P_i^*(\theta)}{Q_i^*(\theta)}$ зависит от положительности $P_i^*(\theta)$. Для удобства запишем $P_i^*(\theta)$ в виде:

$$P_i^*(\theta) = U_i(1 - \theta)^3 + V_i(1 - \theta)^2\theta + W_i(1 - \theta)\theta^2 + Z_i\theta^3.$$

Теперь $P_i^*(\theta) > 0$, если $U_i > 0$, $V_i > 0$, $W_i > 0$, $Z_i > 0$ (см. пункт 3). Теперь $U_i > 0$ и $Z_i > 0$, если верно (13). Кроме того, $V_i > 0$ и $W_i > 0$, когда верно (14). Поскольку $\Psi(x)$ строится итеративно, то $\Psi(L_i(\cdot)) \geq 0 \forall \psi(\cdot) \geq 0$ означает, что $\Psi(x) \geq 0 \forall x \in I$. \square

Следствие. Положив $\alpha_i = 0$ в (14), получим $u_i > 0$, $v_i \geq \max \left\{ 0, -u_i \left[3 + \frac{h_i d_i}{y_i} \right], -u_i \left[3 + \frac{-h_i d_{i+1}}{y_{i+1}} \right] \right\}$, которые обеспечивают достаточные условия положительности рационального кубического сплайна S . Следует отметить, что эти условия, налагаемые на параметры формы, более слабые, чем те, которые были получены Сарфразом с соавторами [31].

4.2. Удерживание графика РКСФИФ в прямоугольнике

Пусть имеются данные $\{(x_i, y_i) : i \in \mathbb{N}_N\}$. Мы хотим найти условия, налагаемые на параметры рациональной ИФС, чтобы график G , соответствующей РКСФИФ Ψ , лежал в заданном прямоугольнике $K = I \times [c, d]$, где $c < \min \{y_i : i \in \mathbb{N}_N\}$ и $d > \max \{y_i : i \in \mathbb{N}_N\}$. Здесь график G является аттрактором ИФС $\mathcal{I} = \left\{ \mathbb{R}^2; (L_i(x), F_i(x, y) = \alpha_i y + q_i(x)) : i \in \mathbb{N}_{N-1} \right\}$. РКСФИФ Ψ получается итерацией ИФС \mathcal{I} , и $I = [x_1, x_N]$ является аттрактором ИФС $\{I; L_i(x) : i \in \mathbb{N}_{N-1}\}$. Следовательно, чтобы G лежало в K , достаточно доказать, что $\alpha_i y + q_i(x) \in [c, d] \forall (x, y) \in K$.

Случай I. Как и в случае интерполяции, сохраняющей положительность, обсуждавшейся ранее, сначала предположим, что $0 \leq \alpha_i < a_i$ для всех $i \in \mathbb{N}_{N-1}$. Пусть $(x, y) \in K$. Тогда при нашем предположении относительно α_i мы имеем $\alpha_i c \leq \alpha_i y \leq \alpha_i d$. Это означает, что $\alpha_i c + q_i(x) \leq \alpha_i y + q_i(x) \leq \alpha_i d + q_i(x)$. Следовательно, чтобы G лежало в K , достаточно иметь следующие условия для всех $i \in \mathbb{N}_{N-1}$:

$$c \leq \alpha_i c + q_i(x), \quad (15)$$

$$\alpha_i d + q_i(x) \leq d. \quad (16)$$

Теперь (15) верно, если

$$c(1 - \alpha_i) \leq \frac{U_i(1 - \theta)^3 + V_i(1 - \theta)^2\theta + W_i(1 - \theta)\theta^2 + Z_i\theta^3}{u_i + v_i\theta(1 - \theta)}, \quad (17)$$

где постоянные U_i, V_i, W_i, Z_i даны в (8). Выражение в знаменателе $q_i(x)$ можно записать в форме показателей степени следующим образом:

$$\begin{aligned} u_i + v_i\theta(1 - \theta) &\equiv u_i(1 - \theta)^2 + (2u_i + v_i)(1 - \theta)\theta + u_i\theta^2 \\ &\equiv u_i(1 - \theta)^3 + (3u_i + v_i)(1 - \theta)^2\theta + (3u_i + v_i)(1 - \theta)\theta^2 + u_i\theta^3. \end{aligned} \quad (18)$$

Чтобы сохранить симметрию выражений в числителе и знаменателе, при перекрестном умножении и перестановке может быть замечено, что (17) верно, если

$$\begin{aligned} [U_i - c(1 - \alpha_i)u_i](1 - \theta)^3 + [V_i - c(1 - \alpha_i)(3u_i + v_i)]\theta(1 - \theta)^2 + \\ [W_i - c(1 - \alpha_i)(3u_i + v_i)]\theta^2(1 - \theta) + [Z_i - c(1 - \alpha_i)u_i]\theta^3 \geq 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь (19) удовлетворяется, если верна следующая система неравенств:

$$\left. \begin{aligned} U_i - c(1 - \alpha_i)u_i &\geq 0, & V_i - c(1 - \alpha_i)(3u_i + v_i) &\geq 0, \\ W_i - c(1 - \alpha_i)(3u_i + v_i) &\geq 0, & Z_i - c(1 - \alpha_i)u_i &\geq 0. \end{aligned} \right\}$$

Поскольку $u_i > 0$, выбор α_i , удовлетворяющей

$$\alpha_i \leq \frac{y_i - c}{y_1 - c} \quad \text{и} \quad \alpha_i \leq \frac{y_{i+1} - c}{y_N - c},$$

гарантирует, что $U_i - c(1 - \alpha_i)u_i \geq 0$ и $Z_i - c(1 - \alpha_i)u_i \geq 0$. Пусть $\alpha_i < \min \left\{ \frac{y_i - c}{y_1 - c}, \frac{y_{i+1} - c}{y_N - c} \right\}$. Тогда условия $V_i - c(1 - \alpha_i)(3u_i + v_i) \geq 0$ и $W_i - c(1 - \alpha_i)(3u_i + v_i) \geq 0$ удовлетворяются, если

$$v_i \geq v_{1i} := -u_i \left[3 + \frac{h_i d_i - \alpha_i (x_N - x_1) d_1}{y_i - c - \alpha_i (y_1 - c)} \right], \quad v_i \geq v_{2i} := -u_i \left[3 + \frac{-h_i d_{i+1} + \alpha_i (x_N - x_1) d_N}{y_{i+1} - c - \alpha_i (y_N - c)} \right].$$

Следовательно, следующих условий достаточно для проверки (15):

$$0 \leq \alpha_i < \min \left\{ \frac{y_i - c}{y_1 - c}, \frac{y_{i+1} - c}{y_N - c} \right\}, \quad u_i \geq 0, \quad v_i \geq \max\{v_{1i}, v_{2i}\}.$$

Аналогично следующих условий достаточно для проверки (16):

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha_i < \min \left\{ \frac{d - y_i}{d - y_1}, \frac{d - y_{i+1}}{d - y_N} \right\}, \\ v_i \geq v_{3i} := -u_i \left[3 + \frac{-h_i d_i + \alpha_i (x_N - x_1) d_1}{d - y_i - \alpha_i (d - y_1)} \right], \\ v_i \geq v_{4i} := -u_i \left[3 + \frac{h_i d_{i+1} - \alpha_i (x_N - x_1) d_N}{d - y_{i+1} - \alpha_i (d - y_N)} \right]. \end{aligned}$$

Случай II. Рассмотрим $-a_i < \alpha_i < 0$. В этом случае (15) и (16) заменяются соответственно на

$$c \leq \alpha_i d + q_i(x) \quad \text{и} \quad \alpha_i c + q_i(x) \leq d. \quad (20)$$

Используя вычисления, аналогичные случаю $\alpha_i \geq 0$, мы видим, что (20) верно, если

$$\begin{aligned} \alpha_i^{\min} > \max \left\{ -a_i, \frac{y_i - c}{y_1 - d}, \frac{y_{i+1} - c}{y_N - d}, \frac{d - y_i}{c - y_1}, \frac{d - y_{i+1}}{c - y_N} \right\}, \\ v_i \geq \max \left\{ v_{5i} := -u_i \left[3 + \frac{h_i d_i - \alpha_i (x_N - x_1) d_1}{y_i - c - \alpha_i (y_1 - d)} \right], \right. \\ v_{6i} := -u_i \left[3 + \frac{-h_i d_{i+1} + \alpha_i (x_N - x_1) d_N}{y_{i+1} - c - \alpha_i (y_N - d)} \right], \\ v_{7i} := -u_i \left[3 + \frac{-h_i d_i + \alpha_i (x_N - x_1) d_1}{d - y_i - \alpha_i (c - y_1)} \right], \\ \left. v_{8i} := -u_i \left[3 + \frac{h_i d_{i+1} - \alpha_i (x_N - x_1) d_N}{d - y_{i+1} - \alpha_i (c - y_N)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Следующая теорема основана на приведенном выше обсуждении.

Теорема 2. *Предположим, что дано множество данных $\{(x_i, y_i) : i \in \mathbb{N}_N\}$, и Ψ — соответствующая C^1 -КРСФИФ, описанная в (8). Тогда следующие условия, налагаемые на коэффициенты масштабирования и параметры формы в каждом подынтервале, достаточны для удержания графика Ψ в прямоугольнике $I = [x_1, x_N] \times [c, d]$:*

$$\alpha_i^{\min} < \alpha_i < \alpha_i^{\max}, \quad u_i > 0, \quad v_i > \max\{0, v_{1i}, v_{2i}, v_{3i}, v_{4i}, v_{5i}, v_{6i}, v_{7i}, v_{8i}\},$$

$$\text{где } \alpha_i^{\max} < \min \left\{ a_i, \frac{y_i - c}{y_1 - c}, \frac{y_{i+1} - c}{y_N - c}, \frac{d - y_i}{d - y_1}, \frac{d - y_{i+1}}{d - y_N} \right\}.$$

Замечание 4. Сохраняющая положительность интерполяция, обсуждаемая в теореме 1, может быть получена как частный случай нашей нынешней постановки. Идея состоит в том, чтобы считать прямоугольник увеличенным до полубесконечной полосы $K = I \times (0, \infty)$. В этом случае не требуется налагать никаких условий для ограничения графика сверху. Таким образом, нам нужно рассмотреть только (15) при специальном выборе $c = 0$. Используя обозначения и обсуждение, приведенные выше, мы получим желаемые условия положительности, как описано в теореме 1.

4.3. РКСФИФ выше линии

Теорема 3. *Предположим, что имеется множество данных $\{(x_i, y_i) : i \in \mathbb{N}_N\}$, лежащее выше линии $t = mx + k$, т. е. $y_i > t_i$ для $i \in \mathbb{N}_N$. График соответствующей РКСФИФ Ψ лежит выше линии $t = mx + k$, если коэффициенты масштабирования $|\alpha_i| < a_i$ и параметры формы $u_i > 0, v_i > 0$ удовлетворяют*

$$0 \leq \alpha_i < \min \left\{ \frac{y_i - t_i}{y_1 - t_1}, \frac{y_{i+1} - t_{i+1}}{y_N - t_N} \right\}, \quad u_i > 0, \quad v_i > \max\{0, v_{9i}, v_{10i}\},$$

где

$$v_i \geq v_{9i} := -u_i \left[\frac{2(y_i - t_i) + (y_i - t_{i+1}) + h_i d_i - \alpha_i \{2(y_1 - t_1) + (y_1 - t_N) + (x_N - x_1)d_1\}}{y_i - t_i - \alpha_i(y_1 - t_1)} \right],$$

$$v_i \geq v_{10i}$$

$$:= -u_i \left[\frac{(y_{i+1} - t_i) + 2(y_{i+1} - t_{i+1}) - h_i d_{i+1} - \alpha_i \{(y_N - t_1) + 2(y_N - t_N) - (x_N - x_1)d_N\}}{y_{i+1} - t_{i+1} - \alpha_i(y_N - t_N)} \right].$$

Доказательство. Поскольку $\Psi(x_i) = y_i > t_i$ для всех $i \in \mathbb{N}_N$, чтобы доказать, что $\Psi(\tau) > m\tau + k$ для всех $\tau \in I$, достаточно убедиться в том, что $\Psi(x) > mx + k, x \in I$, означает $\Psi(L_i(x)) > mL_i(x) + k$ для $x \in I$ и для всех $i \in \mathbb{N}_{N-1}$. Предположим, что $\Psi(x) > mx + k$. Нам нужно убедиться в том, что

$$\alpha_i \Psi(x) + \frac{P_i^*(\theta)}{Q_i^*(\theta)} > m(a_i x + b_i) + k. \quad (21)$$

Введем коэффициенты масштабирования так, чтобы $0 \leq \alpha_i < a_i$ для всех $i \in \mathbb{N}_{N-1}$. Поскольку $Q_i^*(\theta) > 0$ и при предположении $\Psi(x) > mx + k$, то при перекрестном умножении и перестановке верно (21), если

$$\alpha_i(mx + k)Q_i^*(\theta) + P_i^*(\theta) - (ma_i x + mb_i + k)Q_i^*(\theta) > 0, \quad \theta \in [0, 1]. \quad (22)$$

Используем подстановку $x = x_1 + \theta(x_N - x_1)$, выражение для $P_i^*(\theta)$ и форму показателей степени $Q_i^*(\theta)$ из (18). После перестановки (22) сводится к

$$U_i^*(1 - \theta)^3 + V_i^*(1 - \theta)^2\theta + W_i^*(1 - \theta)\theta^2 + Z_i^*\theta^3 > 0, \quad \theta \in [0, 1], \quad (23)$$

где

$$U_i^* = u_i[y_i - t_i - \alpha_i(y_1 - t_1)],$$

$$V_i^* = u_i[2(y_i - t_i) + (y_i - t_{i+1}) + h_i d_i - \alpha_i\{2(y_1 - t_1) + (y_1 - t_N) + (x_N - x_1)d_1\}] + v_i[y_i - t_i - \alpha_i(y_1 - t_1)],$$

$$W_i^* = u_i[(y_{i+1} - t_i) + 2(y_{i+1} - t_{i+1}) - h_i d_{i+1} - \alpha_i\{(y_N - t_1) + 2(y_N - t_N) - (x_N - x_1)d_N\}] + v_i[y_{i+1} - t_{i+1} - \alpha_i(y_N - t_N)],$$

$$Z_i^* = u_i[y_{i+1} - t_{i+1} - \alpha_i(y_N - t_N)].$$

После подстановки $\theta = \frac{\nu}{\nu + 1}$ (23) эквивалентно $Z_i^*\nu^3 + W_i^*\nu^2 + V_i^*\nu + U_i^* > 0$ для всех $\nu > 0$. Из [28] известно, что кубический многочлен $\rho(\xi) = a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d \geq 0$ для всех $\xi \geq 0$, если и только если $(a, b, c, d) \in R_1 \cup R_2$, где

$$R_1 = \{(a, b, c, d) : a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0\},$$

$$R_2 = \{(a, b, c, d) : a \geq 0, d \geq 0, 4ac^3 + 4db^3 + 27a^2d^2 - 18abcd - b^2c^2 \geq 0\}.$$

Поскольку условие в R_2 является громоздким с точки зрения вычислений, чтобы получить условия, достаточные для положительности $Z_i^* \nu^3 + W_i^* \nu^2 + V_i^* \nu + U_i^* > 0$, мы используем довольно эффективные и приемлемые параметры, определяемые R_1 . Таким образом, многочлен в (23) является положительным, если $U_i^* > 0$, $V_i^* > 0$, $W_i^* > 0$, $Z_i^* > 0$. Легко видно, что $U_i^* > 0$, если $\alpha_i < \frac{y_i - t_i}{y_1 - t_1}$, и $Z_i^* > 0$, если $\alpha_i < \frac{y_{i+1} - t_{i+1}}{y_N - t_N}$. Очевидно, что дополнительные условия, налагаемые на параметры формы $u_i > 0$ и $v_i > 0$, которые прописаны в теореме, обеспечивают положительность V_i^* и W_i^* . Это завершает доказательство. \square

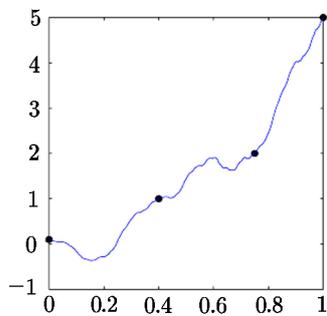
Замечание 5. Аналогичным образом можно решить проблему кривой, лежащей ниже линии. Взяв $m = k = 0$ в предыдущей теореме, мы снова получим положительность РКСФИФ, подробно изученную в теореме 1. Предположим $\alpha_i = 0$ для всех $i \in \mathbb{N}_{N-1}$, что обеспечивает условие, достаточное для того, чтобы традиционный рациональный кубический сплайн лежал над прямой (см. [31]).

5. Численные примеры

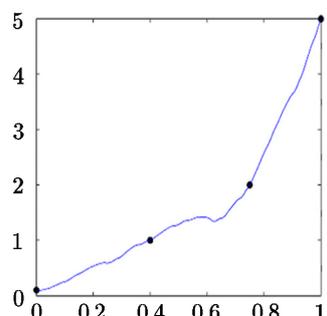
Рассмотрим положительное множество данных $\{(x_i, y_i)\} = \{(0, 0.1), (0.4, 1), (0.75, 2), (1, 5)\}$. Значения производных в узловых точках определяются методом среднего арифметического (см. [10]): $d_1 = -1.5238$, $d_2 = 1.5238$, $d_3 = 8.1905$, $d_4 = 15.8095$. Наша схема была реализована в соответствии с выбором параметров, приведенных в таблице. На рисунке 1а мы не следуем утверждению, данному в теореме 1, для которого получаем неположительную РКСФИФ. Рисунок 1б представляет положительную РКСФИФ, полученную путем выбора параметров, описанных в теореме 1. Было замечено, что возмущение в α_1 оказывает значительное влияние на РКСФИФ в первом подынтервале, а именно в $[x_1, x_2]$. Установив все коэффициенты масштабирования равными нулю, мы получим классический рациональный кубический сплайн (см. на рис. 1в). Вычислим границы коэффициентов масштабирования и параметры формы, используя теорему 2, так чтобы РКСФИФ лежала внутри прямоугольника $[0, 1] \times [0.1, 5]$. Выбранные нами коэффициенты масштабирования и значения параметров формы представлены в таблице, а соответствующие РКСФИФ показаны на рис. 1г, 1д.

Таблица. Параметры РКСФИФ на рис. 1

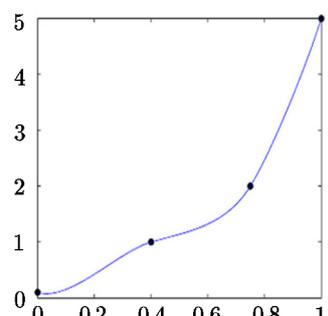
Рисунок	Коэффициенты масштабирования	Параметры формы
1 а	$\alpha = (-0.2, 0.31, 0.23)$	$u = (0.1, 0.1, 0.1)$, $v = (0.08, 0.1, 0.1)$
1 б	$\alpha = (0.2, 0.31, 0.23)$	$u = (0.1, 0.1, 0.1)$, $v = (0.08, 0.1, 0.1)$
1 в	$\alpha = (0, 0, 0)$	$u = (0.1, 0.1, 0.1)$, $v = (0.08, 0.1, 0.1)$
1 г	$\alpha = (0.1, 0.3, 0.2)$	$u = (0.1, 0.1, 0.1)$, $v = (0.26, 0.1, 0.1)$
1 д	$\alpha = (0, 0, 0)$	$u = (0.1, 0.1, 0.1)$, $v = (3.8, 0.1, 0.1)$
1 е	$\alpha = (-0.3, -0.2, -0.4)$	$u = (0.1, 0.1, 0.1)$, $v = (3.8, 0.1, 0.1)$
1 ж	$\alpha = (0.17, 0.2, 0.4)$	$u = (0.1, 0.1, 0.1)$, $v = (3.8, 0.1, 0.1)$
1 з	$\alpha = (0.17, 0.1, 0.4)$	$u = (0.1, 0.1, 0.1)$, $v = (3.8, 0.1, 0.1)$
1 и	$\alpha = (0, 0, 0)$	$u = (0.1, 0.1, 0.1)$, $v = (3.8, 0.1, 0.1)$



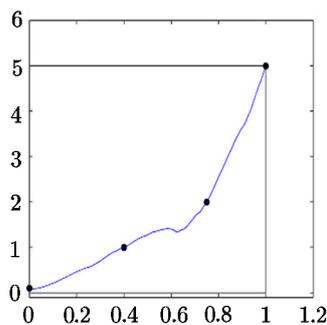
а) Неположительная РКСФИФ



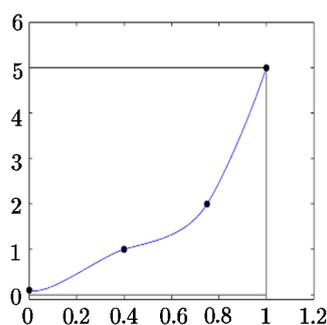
б) Положительная РКСФИФ



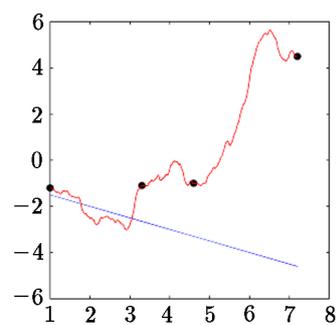
в) Классический положительный рациональный кубический сплайн



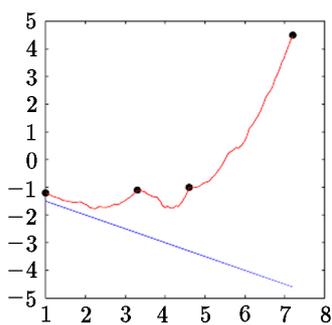
г) РКСФИФ в прямоугольнике $[0, 1] \times [0.1, 5]$



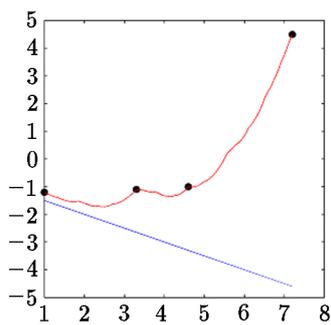
д) Классический рациональный кубический сплайн в $[0, 1] \times [0.1, 5]$



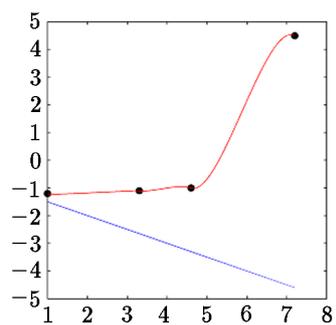
е) РКСФИФ и линия $y = -0.5x - 1$



ж) РКСФИФ выше линии $y = -0.5x - 1$



з) РКСФИФ выше линии $y = -0.5x - 1$



и) Классический рациональный кубический сплайн над линией $y = -0.5x - 1$

Рис. 1. Различные типы ограничений на РКСФИФ (точки данных интерполяции показаны кружками)

Рассмотрим эрмитово множество данных

$$\{(1, -1.2, 0.85), (3.3, -1.1, -0.15), (4.6, -1, -0.4583), (7.2, 4.5, -0.7861)\},$$

которое лежит выше линии $y = -0.5x - 1$. Выбрав коэффициенты масштабирования $|\alpha_i| < a_i$ и параметры формы $u_i > 0$, $v_i > 0$, мы получаем РКСФИФ на рис. 1 е, которая не удовлетворяет требованию быть выше линии $y = -0.5x - 1$. Это показывает важность теоремы 3. При выборе коэффициентов масштабирования и параметров формы в соответствии с утверждением теоремы 3 (см. таблицу), РКСФИФ, расположенные над линией $y = -0.5x - 1$, показаны на рис. 1 ж–1 и. Мы можем заметить эффекты формы РКСФИФ во втором подынтервале, вызванные изменениями коэффициента масштабирования на $\alpha_2 = 0.1$ при сравнении с РКСФИФ на рис. 1 ж–1 и. То же самое можно сделать и с параметрами формы. Классический рациональный кубический сплайн над линией $y = -0.5x - 1$ получен на рис. 1 и путем установки всех коэффициентов масштабирования равными нулю, в соответствии с замечанием 5.

6. Выводы

В этой статье мы построили РКСФИФ с двумя семействами параметров формы. Мы определили коэффициенты масштабирования и параметры формы для получения РКСФИФ, лежащей внутри прямоугольника, а также над заданной прямой линией. Коэффициенты масштабирования и параметры формы играют важную роль в определении формы РКСФИФ. Таким образом, в связи с необходимостью проведения эксперимента по моделированию объектов с гладкими геометрическими формами, наш подход предлагает большую гибкость в выборе подходящего интерполяционного гладкого фрактального интерполянта. Как и в случае широкого применения классических рациональных интерполянтов в автоматизированном проектировании, автоматизированном производстве и других математических и инженерных приложениях, ожидается, что РКСФИФ могут найти широкое применение в некоторых из этих областей. Кроме того, поскольку классический кусочно-кубический интерполянт Эрмита, C^1 -кубическая эрмитова ФИФ и C^1 -рациональный кубический сплайн [31] являются частными случаями РКСФИФ, их можно использовать для математических и инженерных задач, где эти подходы не работают удовлетворительно. Авторы завершают работу над расширением этого подхода для 3D-данных.

Литература

1. **Barnsley M.F.** Fractal functions and interpolation // *Constr. Approx.* — 1986. — Vol. 2, № 4. — P. 303–329.
2. **Barnsley M.F., Harrington A.N.** The calculus of fractal interpolation functions // *J. Approx. Theory.* — 1989. — Vol. 57, № 1. — P. 14–34.
3. **Barnsley M.F., Elton J., Hardin D., Massopust P.** Hidden variable fractal interpolation functions // *SIAM J. Math. Anal.* — 1989. — Vol. 20, № 5. — P. 1218–1242.
4. **Barnsley M.F., Hegland M., Massopust P.** Numerics and fractals // *Bull. Inst. Math. Acad. Sin.* — 2014. — Vol. 9, № 3. — P. 389–430.
5. **Bouboulis P., Dalla L.** Hidden variable vector valued fractal interpolation functions // *Fractals.* — 2005. — Vol. 13, № 3. — P. 227–232.

6. **Chand A.K.B., Vijender N., Navascués M.A.** Shape preservation of scientific data through rational fractal splines // *Calcolo.*—2013.— Vol. 51, № 2.— P. 329–362.
7. **Chand A.K.B., Katiyar S.K., Viswanathan P.** Approximation using hidden variable fractal interpolation function // *J. Fractal Geom.*—2015.— Vol. 2, № 1.— P. 81–114.
8. **Chand A.K.B., Katiyar S.K.** Quintic Hermite fractal interpolation in a strip: preserving copositivity // *Springer Proc. Math. Stat.*—2015.— Vol. 143.— P. 463–475.
9. **Chand A.K.B., Navascués M.A., Viswanathan P., Katiyar S.K.** Fractal trigonometric polynomials for restricted range approximation // *Fractals.*—2016.— Vol. 24, № 2.— P. 1650022.— <https://doi.org/10.1142/S0218348X16500225>.
10. **Delbourgo R., Gregory J.A.** Shape preserving piecewise rational interpolation // *SIAM J. Stat. Comput.*—1985.— Vol. 6, № 4.— P. 967–976.
11. **Duan Q., Djidjeli K., Price W.G., Twizell E.H.** Rational cubic spline based on function values // *Comput. & Graph.*—1998.— Vol. 22, № 4.— P. 479–486.
12. **Duan Q., Xu G., Liu A., Wang X., Cheng F.** Constrained interpolation using rational cubic spline with linear denominators // *Korean J. Comput. & Appl. Math.*—1999.— Vol. 6.— P. 203–215.
13. **Dyn N., Levin D.** Subdivision schemes in geometric modelling // *Acta Numer.*—2002.— Vol. 11.— P. 73–144.
14. **Fritsch F.N., Carlson R.E.** Monotone piecewise cubic interpolation // *SIAM J. Numer. Ana.*—1980.— Vol. 17, № 2.— P. 238–246.
15. **Katiyar S.K., Chand A.K.B.** Toward a unified methodology for fractal extension of various shape preserving spline interpolants // *Springer Proc. Math. Stat.*—2015.— Vol. 139.— P. 223–238.
16. **Katiyar S.K., Chand A.K.B., Navascués M.A.** Hidden variable A-fractal functions and their monotonicity aspects // *Rev. R. Acad. Cienc. Zaragoza.*—2016.— Vol. 71.— P. 7–30.
17. **Katiyar S.K., Reddy K.M., Chand A.K.B.** Constrained data visualization using rational bi-cubic fractal functions // *Mathematics and Computing. Proc. ICMC 2017.*—Springer, 2017.— P. 265–277.
18. **Katiyar S.K.** Shape Preserving Rational and Coalescence Fractal Interpolation Functions and Approximation by Variable Scaling Fractal Functions: Ph. D. Thesis.— Indian Institute of Technology Madras, India, 2017.
19. **Katiyar S.K., Chand A.K.B., G. Saravana Kumar.** A new class of rational cubic spline fractal interpolation function and its constrained aspects // *Appl. Math. Comp.*—2019.— Vol. 346.— P. 319–335.
20. **Katiyar S.K., Chand A.K.B.** A New Class of Monotone/Convex Rational Fractal Function.— [arXiv:1809.10682](https://arxiv.org/abs/1809.10682).
21. **Katiyar S.K., Chand A.K.B.** Shape Preserving Rational Quartic Fractal Functions // *Fractals.*—2019.— Vol. 27, № 8.— P. 1950141.— <https://doi.org/10.1142/S0218348X1950141X>.
22. **Katiyar S.K.** Bicubic Partially Blended Rational Quartic Surface.— [arXiv:1910.09822](https://arxiv.org/abs/1910.09822).
23. **Massopust P.R.** *Fractal Functions, Fractal Surfaces, and Wavelets.*— Academic Press, 1994.
24. **Navascués M.A.** Fractal polynomial interpolation // *Z. Anal. Anwend.*—2005.— Vol. 25, № 2.— P. 401–418.
25. **Navascués M.A., Sebastián M.V.** Smooth fractal interpolation // *J. Inequal. Appl.*—2006.— Article ID 78734.
26. **Navascués M.A., Viswanathan P., Chand A.K.B., Sebastián M.V., Katiyar S.K.** Fractal bases for Banach spaces of smooth functions // *Bull. Aust. Math. Soc.*—2015.— Vol. 92, № 3.— P. 405–419.

27. **Protasov V.Yu.** Extremal L_p -norms of linear operators and self-similar functions // Linear Alg. Appl. — 2008. — Vol. 428, № 10. — P. 2339–2357.
28. **Schmidt J.W., Heß W.** Positivity of cubic polynomials on intervals and positive spline interpolation // BIT Numer. Math. — 1988. — Vol. 28. — P. 340–352.
29. **Sarfraz M., Hussain M.Z.** Data visualization using rational spline interpolation // J. Comp. Appl. Math. — 2006. — Vol. 189, № 1–2. — P. 513–525.
30. **Sarfraz M., Hussain M.Z., Nisar A.** Positive data modeling using spline function // Appl. Math. Comp. — 2010. — Vol. 216, № 7. — P. 2036–2049.
31. **Sarfraz M., Hussain M.Z., Hussain M.** Modeling rational spline for visualization of shaped data // J. Numer. Math. — 2013. — Vol. 21, № 1. — P. 63–87.
32. **Tetenov A.V.** Self-similar Jordan arcs and the graph directed systems of similarities // Sib. Math. J. — 2006. — Vol. 47, № 5. — P. 940–949.
33. **Vladimirov A.A., Sheipak I.A.** Self-similar functions in $L_2[0;1]$ and the Sturm–Liouville problem with a singular indefinite weight // Sbornik: Mathematics. — 2006. — Vol. 197, № 11. — P. 15–69.
34. **Wang H.Y., Yu J.S.** Fractal interpolation functions with variable parameters and their analytical properties // J. Approx. Theory. — 2013. — Vol. 175. — P. 1–18.

*Поступила в редакцию 29 октября 2018 г.
После исправления 07 февраля 2020 г.
Принята к печати 14 апреля 2021 г.*