

УДК 533.546:517.957

О ТОЧНЫХ И ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ С ОСОБЕННОСТЬЮ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

А. Л. Казаков, Л. Ф. Спевак*

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН,
664033 Иркутск, Россия

* Институт машиноведения УрО РАН, 620049 Екатеринбург, Россия
E-mails: kazakov@icc.ru, lfs@imach.uran.ru

Построены решения нелинейного параболического уравнения конвекции-диффузии, имеющие вид диффузионной волны, которая распространяется по нулевому фону с конечной скоростью. Доказана теорема существования и единственности решения. Построено решение в виде характеристического ряда, коэффициенты которого определяются с использованием рекуррентной процедуры. Найдены точные решения рассматриваемого типа и их характеристики включая область существования, исследовано поведение этих решений на ее границах. С использованием метода граничных элементов и метода двойственной взаимности разработан, реализован и протестирован алгоритм построения приближенных решений.

Ключевые слова: нелинейное уравнение конвекции-диффузии, диффузионная волна, характеристический ряд, точное решение, метод граничных элементов.

DOI: 10.15372/PMTF20210103

Введение. Рассмотрим нелинейное параболическое уравнение

$$c_\tau = A(c^\sigma c_x)_x + B(c^q)_x \quad (1)$$

($A > 0$, $B > 0$, $\sigma > 0$, $q > 0$ — константы), которое обычно называется уравнением конвекции-диффузии [1, 2]. К уравнению (1) сводится ряд математических моделей механики жидкости и газа, которые одновременно описывают диффузионный и конвективный [3] механизмы переноса энергии и вещества. Частными случаями (1) являются нелинейное параболическое уравнение теплопроводности и уравнение Бюргерса [4].

Выполнив замену $u = c^\sigma(\tau, x)$, $t = A\tau$, уравнение (1) приведем к виду

$$u_t = uu_{xx} + u_x^2/\sigma + \alpha u^\beta u_x, \quad (2)$$

где $\alpha = Bq/A > 0$; $\beta = (q - 1)/\sigma$. Далее будем полагать, что $\beta > 0$, тогда, в частности, уравнение (2) имеет тривиальное решение $u \equiv 0$. Отличительной чертой уравнения (2) можно назвать наличие особенности перед старшей производной при $u = 0$, следствием чего является существование решений типа диффузионных волн, распространяющихся по

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 20-07-00407), Российского фонда фундаментальных исследований и Министерства науки и технологии Тайваня (код проекта 20-51-S52003).

покоящемуся (нулевому) фону с конечной скоростью [5]. В данной работе при заданном законе движения нулевого фронта (фронта волны) изучаются решения уравнения (2) следующего вида:

$$u(t, x)|_{x=a(t)} = 0. \quad (3)$$

Это исследование является продолжением исследований [6–8], выполненных для нелинейного уравнения теплопроводности, к которому сводится уравнение (1) при $\alpha = 0$. В этом случае конвективный член отсутствует или вместо него имеется источник [9, 10].

В настоящей работе для задачи (2), (3) доказана теорема существования и единственности нетривиального аналитического решения. Доказательство является конструктивным, решение строится в виде степенного ряда с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами. При этом используется подход научной школы А. Ф. Сидорова, при котором решения нелинейных уравнений математической физики представляются в виде специальных рядов [5, 11]. Также разработан алгоритм численного решения задачи (2), (3) для конечного промежутка времени с использованием метода граничных элементов (МГЭ) и метода двойственной взаимности [12]. Тестирование алгоритма проведено путем сравнения результатов численных расчетов с построенными точными решениями, имеющими вид диффузионных волн, движущихся с постоянной скоростью, построение которых сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

1. Теорема существования. Сформулируем и докажем для задачи (2), (3) теорему существования и единственности нетривиального локально-аналитического решения. Здесь и далее под аналитической в точке функцией (на прямой, плоскости и т. п.) понимается функция, совпадающая в некоторой ее окрестности со своим разложением в ряд Тейлора. Для упрощения в дальнейшем будем использовать термин “аналитическая в точке”.

Теорема 1. Пусть $\beta \in \mathbb{N}$, функция $a(t)$ является аналитической в точке $t = 0$, $a'(0) \neq 0$. Тогда задача (2), (3) имеет в точке $(t = 0, x = a(0))$ нетривиальное аналитическое решение, причем единственное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве теоремы используются стандартные подходы, изложенные в [5, 6]. Доказательство проводится в два этапа. На первом этапе строится решение, имеющее вид степенного ряда, на втором — с использованием метода мажорант доказывается сходимость последнего.

1. Для удобства построения ряда выполним замену независимых переменных в задаче (2), (3). Пусть $z = x - a(t)$, $t^* = t$. Получаем

$$u_t = uu_{zz} + u_z^2/\sigma + a'(t)u_z + \alpha u^\beta u_z, \quad u|_{z=0} = 0. \quad (4)$$

Здесь и далее символ “*” опускается. Решение задачи (4) будем строить в виде ряда по степеням z с коэффициентами, зависящими от t :

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(t)z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(t)[x - a(t)]^k}{k!}, \quad u_k(t) = \frac{\partial^k u}{\partial z^k} \Big|_{z=0}. \quad (5)$$

Поскольку для рассматриваемой задачи фронт диффузионной волны $x = a(t)$ является характеристикой, ряд (5) является характеристическим [13].

Коэффициенты u_k определяются с использованием рекуррентной процедуры. Из условия при $z = 0$ следует, что $u_0 \equiv 0$. Для того чтобы найти u_1 , в обеих частях уравнения (4) положим $z = u = 0$. Получаем

$$u_1^2/\sigma + a'(t)u_1 = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) имеет два корня: $u_1 \equiv 0$, при котором решение этого уравнения тривиально, и $u_1 = -\sigma a'(t)$, который будем рассматривать. Таким образом, база индукции обоснована.

Пусть найдены коэффициенты (производные) до k -го порядка включительно. Для поиска u_{k+1} продифференцируем обе части (4) k раз по z и положим $z = 0$. Разрешив полученное уравнение относительно искомой величины, получаем следующую формулу:

$$u_{k+1} = \frac{1}{a'(k\sigma + 1)} \left[\sum_{i=2}^k \left(C_k^i + \frac{1}{\sigma} C_k^{i-1} \right) u_i u_{k+2-i} + \frac{\alpha}{\beta + 1} \Phi_{k+1} - u'_k \right], \quad (7)$$

где

$$\Phi_{k+1} = \frac{\partial^{k+1} u^{\beta+1}}{\partial z^{k+1}} \Big|_{z=u=0} = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{\beta+1}=k+1} C_{k+1}^{i_1, i_2, \dots, i_{\beta+1}} u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_{\beta+1}}.$$

Поскольку $\beta \in \mathbb{N}$, $u_0 = 0$, величину Φ_{k+1} , как и остальные величины в правой части (7), можно однозначно определить в силу предположения метода индукции. Таким образом, ряд (5) построен, причем функции $u_k(t)$ являются аналитическими в точке $t = 0$. Первый этап доказательства завершен.

2. Доказательство сходимости ряда проводится с использованием метода мажорант и теоремы Коши — Ковалевской [13]. Для того чтобы раскрыть особенность, введем новую искомую функцию V :

$$u(t, z) = u_0 + u_1 z + z^2 V(t, z) = -\sigma a'(t) z + z^2 V(t, z). \quad (8)$$

Очевидно, что из аналитичности $V(t, z)$ в точке $t = 0$ следует аналитичность $u(t, z)$, и обратно.

Подставляя (8) в уравнение (4) и выполняя некоторые элементарные алгебраические преобразования, получаем

$$2(1 + \sigma)V + (1 + 4\sigma)zV_z + \sigma z^2 V_{zz} = g_0 + z g_1 + z^2 g_2 + z^3 g_3. \quad (9)$$

Явные выражения для функций g_i , $i = 0, \dots, 3$ не приводятся, поскольку они не имеют существенного значения для дальнейшего доказательства. Заметим лишь, что все функции являются аналитическими в точке $t = 0$ и

$$g_0 = g_0(t), \quad g_1 = g_1(t, V, V_t), \quad g_2 = g_2(t, V, V_t, V_z), \quad g_3 = g_3(t, z, V, V_t, V_z, V_{zz}).$$

Дальнейшее доказательство практически дословно приведено в работе [6]. Заметим только, что мажорантная задача для уравнения (9) имеет вид

$$W_{zz} = \frac{1}{\sigma} \left(z G_3 + G_2 + \frac{\partial G_1}{\partial W} W_z + \frac{\partial G_1}{\partial W_t} W_{tz} \right), \quad W|_{z=0} = W_0(t), \quad W_z|_{z=0} = W_1(t). \quad (10)$$

Здесь $G_i \gg g_i$, $i = 0, \dots, 3$; $W_i \gg V_i = \partial V^i / \partial z^i|_{z=0}$, $i = 0, 1$. Полагая в уравнении (10) $z = 0$, найдем $W_{zz}|_{z=0}$. Наконец, продифференцировав (10) по z и выразив W_{zzz} , получаем задачу типа задачи Коши — Ковалевской с аналитическими данными. Согласно одноименной теореме существует единственное аналитическое в точке $t = 0$ решение задачи, которое мажорирует нуль при соответствующем выборе правой части в уравнении (10). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из приведенного выше доказательства (см. (4)) следует, что случай $\beta = 0$ фактически сводится к рассмотрению нелинейного уравнения теплопроводности (т. е. без учета конвективного члена) [7], для которого фронт тепловой волны задан уравнением $x = a(t) + \alpha t$.

2. Построение и исследование точных решений. Полученные в п. 1 результаты помимо теоретического имеют прикладное значение, поскольку отрезки ряда (5) могут быть использованы при проведении численных расчетов. Однако при этом возникают две

проблемы. Во-первых, радиус сходимости ряда неизвестен и, как правило, невелик. Во-вторых, ряд может быть построен только при целых положительных значениях β . В общем случае данные проблемы пока не решены, однако в одном частном случае эти трудности удалось преодолеть.

Будем искать решения задачи (2), (3) в виде бегущей волны, т. е. как $u = v(z)$, $z = \mu t + \eta - x$. Для определенности примем $\mu > 0$, $\eta = 0$ (случай $\mu < 0$ рассматривается аналогично). После подстановки в (2) получаем ОДУ

$$vv'' + (v')^2/\sigma - (\mu + \alpha v^\beta)v' = 0. \quad (11)$$

При условии $v(0) = 0$ решение (11) определяет решение исходной задачи (2), (3), являющееся тепловой волной с фронтом $x = \mu t$. Поскольку уравнение (11) является уравнением второго порядка, для корректного задания условий Коши необходимо также записать условие для производной. При этом вследствие вырождения рассматриваемого уравнения при $v = 0$ условие для производной может быть двух видов: $v'(0) = 0$ и $v'(0) = \sigma\mu$ (при всех прочих значениях $v'(0)$ задача Коши является несовместной). При выполнении первого условия уравнение имеет тривиальное решение $v \equiv 0$. При выполнении второго условия поток на фронте диффузионной волны является ненулевым и уравнение имеет содержательное нетривиальное решение. Итак, будем рассматривать для уравнения (11) следующие условия Коши:

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = \sigma\mu. \quad (12)$$

Очевидно, что при $\beta \in \mathbb{N}$ задача (11), (12) удовлетворяет условию теоремы 1 и имеет единственное локально-аналитическое решение в виде ряда (5), причем коэффициенты являются не функциями t , а константами. При прочих значениях $\beta > 0$ вопрос существования решения требует дополнительного исследования, поскольку для рассматриваемой задачи Коши классические теоремы (Коши, Пеано, Пикара и т. п.) неприменимы вследствие наличия вырождения в уравнении.

Теорема 2. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\sigma > 0$, $\mu > 0$. Тогда задача (11), (12) имеет единственное решение $v(z) \in C^2_{[0, z_*)}$, которое обладает следующими свойствами: $v'(z) > 0$, $\lim_{z \rightarrow z_*} v(z) = +\infty$. При этом $z_* = +\infty$ в случае $0 < \beta < 2$; $0 < z_* < +\infty$ в случае $\beta \geq 2$.

Доказательство. Понижим порядок уравнения (11) с помощью замены $v' = p$. Тогда задача (11), (12) принимает вид

$$vpp'(v) + p^2(v)/\sigma - (\mu + \alpha v^\beta)p(v) = 0, \quad p(0) = \mu\sigma. \quad (13)$$

В уравнении (13) выполним замену независимой переменной $w = v^\beta$ и запишем его в виде

$$\beta wp \frac{dp}{dw} + \frac{p^2}{\sigma} - p(\mu + \alpha w) = 0. \quad (14)$$

Поскольку $p \neq 0$, обе части (14) можно разделить на p и при $\beta > 0$ справедливо равенство $v^\beta|_{v=0} = 0$, получаем задачу Коши

$$\beta wp' + p/\sigma - \mu - \alpha w = 0, \quad p(0) = \mu\sigma. \quad (15)$$

Чтобы сократить число констант, выполним в (15) замену переменных $p^* = \beta p/\mu$, $w^* = \alpha w/\mu$, в результате чего задача принимает вид (символ “*” опускается)

$$wp' + \gamma p - w - 1 = 0, \quad p(0) = 1/\gamma, \quad (16)$$

где $\gamma = 1/(\sigma\beta) > 0$. Уравнение (16) является линейным ОДУ первого порядка и интегрируется в квадратурах. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$p = \frac{w}{\gamma + 1} + \frac{1}{\gamma} + \frac{C}{w^\gamma},$$

где C — произвольная постоянная. Заметим, что условиям Коши удовлетворяет решение $p = w/(\gamma + 1) + 1/\gamma$, которое получается при $C = 0$. Возвращаясь к пространственным переменным z, v , получаем следующую задачу:

$$\frac{dv}{dz} = \frac{v^\beta}{\gamma + 1} + \frac{1}{\gamma}, \quad v(0) = 0. \quad (17)$$

Путем разделения переменных решение (17) можно получить в виде разрешенной относительно z функции

$$z = (\gamma + 1) \int_0^v \frac{ds}{s^\beta + (\gamma + 1)/\gamma}. \quad (18)$$

Правая часть (18) (обозначим ее через $\Psi(v)$) при $\beta > 0, \gamma > 0$ является непрерывно-дифференцируемой монотонно возрастающей функцией на $[0, +\infty)$, следовательно, она обратима и существует функция $v = v_*(z) = \Psi^{-1}(v)$, которая является искомой. Таким образом, доказано существование и единственность решения задачи (11), (12), более того, доказательство получено для всей области определения. Свойства решения, приведенные в условии теоремы, непосредственно следуют из свойств интеграла $\Psi(v)$. Вопрос о том, какое значение имеет z_* в случае конечности решения, в общем случае пока не решен, однако при конкретных значениях β и γ ответ легко можно получить численно. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При рациональных значениях β функция $\Psi(v)$ может быть получена в явном виде.

Теорема 2 описывает класс решений уравнения (2), имеющих вид диффузионной волны

$$u(t, x) = Pv_*(\mu Qt - Qx), \quad (19)$$

где для параметров $P = (\mu/\alpha)^{1/\beta}$, $Q = \beta P/\mu$ известны область существования и основные свойства. Заметим, что в случае, когда в уравнении (1) вместо конвективного члена присутствует источник (соответствующее слагаемое не содержит производной), аналогичные решения имеют вид солитонов [9], чего, очевидно, не наблюдается в рассматриваемом случае. В то же время при $\alpha = 0$, т. е. в отсутствие конвективного члена и источника, соответствующее решение можно записать в явном виде $u = \mu\sigma(\mu t - x)$. По своим свойствам оно близко к решению “полной” задачи при $\alpha > 0, 0 < \beta < 2$.

Рассмотрим два простых случая, когда решение задачи (11), (12) можно получить в явном виде.

Пример 1. Пусть $\beta = 1$. Тогда $\Psi(v) = (\gamma + 1) \ln [\gamma v/(\gamma + 1) + 1]$. Отсюда получаем

$$v = \frac{\gamma + 1}{\gamma} \left[\exp\left(\frac{z}{\gamma + 1}\right) - 1 \right]. \quad (20)$$

Таким образом, решение не имеет особых точек, при удалении от фронта диффузионной волны увеличивается с экспоненциальной скоростью и может быть продолжено влево от точки $z = 0$.

Пример 2. Пусть $\beta = 2$. Тогда $\Psi(v) = \lambda \operatorname{arctg}(\lambda v)$, где $\lambda^2 = \gamma/(\gamma + 1)$. Отсюда находим

$$v = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma}} \operatorname{tg}\left(\frac{z}{\sqrt{\gamma(\gamma + 1)}}\right). \quad (21)$$

Решение определено на интервале $-\sqrt{\gamma(\gamma + 1)}\pi/2 < z < \sqrt{\gamma(\gamma + 1)}\pi/2$, при этом $v(-z) = v(z)$.

3. Решение с помощью метода граничных элементов. Для приближенного решения задачи (2), (3) уравнение (2) в произвольный момент времени представим в виде уравнения Пуассона

$$u_{xx} = [u_t - u_x^2/\sigma - \alpha u^\beta u_x]/u. \quad (22)$$

Разбив заданный интервал времени на шаги величиной h , построим непрерывное по x решение уравнения (22) в каждой узловой точке. При $t_k = kh$ гладкое неотрицательное решение определено на отрезке $x \in [0, a(t_k)]$. На этом отрезке получаем задачу для уравнения (22) со следующими граничными условиями:

$$u(t, x)|_{x=L} = 0; \quad (23)$$

$$q|_{x=L} = -\sigma a'(t_k). \quad (24)$$

Здесь $L = a(t_k)$; $q(x) = u_x(x)n(x)$ — поток в граничных точках; $n(x)$ — внешняя нормаль; $n(0) = -1, n(L) = 1$. Условие (24) следует из соотношения (6).

Итерационная процедура решения задачи (22)–(24) с помощью МГЭ при начальном приближении $u^{(0)} \equiv 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} u_1^{(n)} &= 2I^{(n-1)}(L) + \sigma a'(t_k)L, \\ q_1^{(n)} &= 2(I^{(n-1)}(0) + I^{(n-1)}(L))/L + \sigma a'(t_k), \\ u^{(n)}(\xi) &= q_1^{(n)}u^*(\xi, 0) - \sigma a'(t_k)u^*(\xi, L) - u_1^{(n)}q^*(\xi, 0) - I^{(n-1)}(\xi). \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь $u_1^{(n)}, q_1^{(n)}$ — n -е итерации граничных значений искомой функции и потока при $x = 0$; $u^{(n)}(\xi), \xi \in (0, L)$ — n -я итерация решения; $u^*(\xi, x), q^*(\xi, x)$ — фундаментальное решение и его нормальная производная [14],

$$I^{(n)}(\xi) = \int_0^L \frac{u^*(\xi, x)}{u^{(n)}} \left[u_t^{(n)} - \frac{(u_x^{(n)})^2}{\sigma} - \alpha (u^{(n)})^\beta u_x^{(n)} \right] dx.$$

Интегралы $I^{(n)}$ вычисляются с помощью метода двойственной взаимности. Используя разложение правой части уравнения (22) по системе радиальных базисных функций (РБФ) [15]

$$\frac{1}{u^{(n)}} \left[u_t^{(n)} - \frac{1}{\sigma} (u_x^{(n)})^2 - \alpha (u^{(n)})^\beta u_x^{(n)} \right] = \sum_{i=1}^m \alpha_i^{(n)} f_i(x), \quad (26)$$

получаем равенство

$$I^{(n)}(\xi) = \sum_{i=1}^m \alpha_i^{(n)} [\hat{q}_i(0)u^*(\xi, 0) + \hat{q}_i(L)u^*(\xi, L) - \hat{u}_i(0)q^*(\xi, 0) - \hat{u}_i(L)q^*(\xi, L) - \hat{u}_i(\xi)]. \quad (27)$$

В уравнениях (26), (27) $f_i(x) = f_i(|x-x_i|)$ — РБФ, значения которых зависят от расстояния между текущей точкой и заданными точками коллокации x_1, x_2, \dots, x_m , принадлежащими отрезку $[0, L]$; для каждой функции $f_i(x)$ существует функция \hat{u}_i , такая что $f_i = \partial^2 \hat{u}_i / \partial x^2$; $\hat{q}_i(x) = \hat{u}_i'(x)n(x)$; коэффициенты $\alpha_i^{(n)}, i = 1, \dots, m$ определяются из системы уравнений, получаемой из равенства (26), записанного в точках коллокации для $(n-1)$ -й итерации. Производная по времени вычисляется с помощью метода конечных разностей. Итерационный процесс останавливается, когда выполнено условие $|u_1^{(n)} - u_1^{(n-1)}|/|u_1^{(n)}| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ —

Таблица 1

Погрешности пошагового решения задачи (2), (3)

| h | t | Погрешность | | | | |
|------|-----|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | | $x = 0$ | $x = 0,2\mu t$ | $x = 0,4\mu t$ | $x = 0,6\mu t$ | $x = 0,8\mu t$ |
| 0,10 | 0,5 | $2,23 \cdot 10^{-5}$ | $1,61 \cdot 10^{-5}$ | $1,05 \cdot 10^{-5}$ | $5,55 \cdot 10^{-6}$ | $1,75 \cdot 10^{-6}$ |
| 0,10 | 1,0 | $6,21 \cdot 10^{-5}$ | $4,63 \cdot 10^{-5}$ | $3,15 \cdot 10^{-5}$ | $1,81 \cdot 10^{-5}$ | $6,69 \cdot 10^{-6}$ |
| 0,01 | 0,5 | $5,78 \cdot 10^{-6}$ | $4,55 \cdot 10^{-6}$ | $3,34 \cdot 10^{-6}$ | $2,17 \cdot 10^{-6}$ | $1,04 \cdot 10^{-6}$ |
| 0,01 | 1,0 | $1,13 \cdot 10^{-5}$ | $1,21 \cdot 10^{-5}$ | $9,70 \cdot 10^{-6}$ | $6,59 \cdot 10^{-6}$ | $3,37 \cdot 10^{-6}$ |

заданное число). Тогда в качестве приближенного решения задачи (2), (3) в момент $t = t_k$ принимается $u(t_k, \xi) = u^{(n)}(\xi)$.

Строго доказать сходимость предложенного выше метода не представляется возможным вследствие нелинейности и сингулярности правой части уравнения (22). Однако в случае сходимости процесс сходится к решению в рассматриваемый момент времени, поскольку он основан на методе простой итерации. Точность решения можно оценить путем сравнения с точными решениями и (или) отрезками ряда (5).

Использование подобного подхода для решения нелинейного уравнения теплопроводности в отсутствие [8] и при наличии источника [10] показало хорошую сходимость итерационных процедур и удовлетворительную точность решения. При этом наличие дополнительного слагаемого (источника) потребовало дополнительного выбора РБФ и положения точек коллокации. При $\beta < 1$ имеет место сингулярность конвективного слагаемого в правой части уравнения (22), поэтому при проведении вычислительного эксперимента дополнительно исследуется сходимость решения.

4. Анализ численных решений. Для оценки эффективности пошагового алгоритма решения МГЭ, представленного выше, численные решения задачи (2), (3) сравнивались с точными решениями вида (19). В табл. 1 приведены погрешности решения с помощью МГЭ относительно точного решения (20) в отдельных точках и в отдельные моменты времени при двух значениях шага h и значениях параметров $\sigma = 3$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\mu = 0,1$, $m = 51$ (число точек коллокации). Во всех рассмотренных случаях в качестве РБФ приняты мультиквадратичные функции, точки коллокации равномерно распределены на отрезке $[0, L]$. Поскольку вдоль нулевого фронта $x = \mu t$ задано краевое условие, погрешность уменьшается при приближении к нему. Результаты расчетов свидетельствуют о достаточно высокой точности решения с помощью МГЭ и сходимости относительно шага по времени.

Для произвольного значения β построить точное решение задачи (11), (12) в явном виде невозможно. Однако, представив ее в виде

$$v'' = \frac{1}{v} \left((\mu + \alpha v^\beta) v' - \frac{(v')^2}{\sigma} \right), \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = \sigma \mu, \quad (28)$$

можно построить непрерывное решение на заданном отрезке $x \in [0, L]$ с помощью МГЭ, применив итерационную процедуру, подобную (25). Заметим, что для построения решения задачи (2), (3) на интервале времени $t \in [0, t_*]$ нужно решить задачу (28) на отрезке $x \in [0, \mu t_*]$. Точность решения задачи (28) с помощью итерационного МГЭ оценивалась путем сравнения с точным решением (21). В табл. 2 приведены относительные погрешности решений с помощью МГЭ при $\beta = 2$ и различном количестве точек коллокации. Длина L отрезка, на котором решается задача, задается в зависимости от значения $L^* = \sqrt{\gamma(\gamma + 1)} \pi / 2$, определяющего положение вертикальной асимптоты решения (21). При $L \rightarrow L^*$ точность решения уменьшается вследствие возрастания значений искомой

Таблица 2

Относительные погрешности решения задачи (28) итерационным МГЭ

| σ | α | μ | m | Погрешность | | |
|----------|----------|-------|-----|----------------------|----------------------|----------------------|
| | | | | $L = 0,75L^*$ | $L = 0,85L^*$ | $L = 0,95L^*$ |
| 3 | 2 | 2,0 | 51 | $4,83 \cdot 10^{-5}$ | $5,71 \cdot 10^{-4}$ | $7,70 \cdot 10^{-2}$ |
| | | | 101 | $1,06 \cdot 10^{-5}$ | $9,60 \cdot 10^{-5}$ | $6,19 \cdot 10^{-3}$ |
| 3 | 1 | 0,5 | 51 | $5,18 \cdot 10^{-5}$ | $5,27 \cdot 10^{-4}$ | $8,10 \cdot 10^{-2}$ |
| | | | 101 | $9,62 \cdot 10^{-6}$ | $6,08 \cdot 10^{-5}$ | $4,97 \cdot 10^{-3}$ |
| 3 | 1 | 1,0 | 51 | $5,00 \cdot 10^{-5}$ | $3,67 \cdot 10^{-4}$ | $7,66 \cdot 10^{-2}$ |
| | | | 101 | $8,78 \cdot 10^{-6}$ | $1,30 \cdot 10^{-4}$ | $1,85 \cdot 10^{-2}$ |
| 3 | 1 | 1,5 | 51 | $5,13 \cdot 10^{-5}$ | $5,00 \cdot 10^{-4}$ | $6,72 \cdot 10^{-2}$ |
| | | | 101 | $7,63 \cdot 10^{-6}$ | $7,30 \cdot 10^{-5}$ | $1,24 \cdot 10^{-2}$ |
| 3 | 1 | 2,0 | 51 | $5,29 \cdot 10^{-5}$ | $5,28 \cdot 10^{-4}$ | $7,01 \cdot 10^{-2}$ |
| | | | 101 | $8,33 \cdot 10^{-6}$ | $2,00 \cdot 10^{-5}$ | $2,75 \cdot 10^{-2}$ |
| 2 | 1 | 1,0 | 51 | $3,02 \cdot 10^{-5}$ | $3,80 \cdot 10^{-4}$ | $4,16 \cdot 10^{-2}$ |
| | | | 101 | $4,31 \cdot 10^{-6}$ | $5,02 \cdot 10^{-5}$ | $8,12 \cdot 10^{-3}$ |
| 1 | 1 | 1,0 | 51 | $2,28 \cdot 10^{-6}$ | $2,86 \cdot 10^{-5}$ | $6,66 \cdot 10^{-3}$ |
| | | | 101 | $3,36 \cdot 10^{-7}$ | $5,27 \cdot 10^{-6}$ | $4,92 \cdot 10^{-3}$ |

Таблица 3

Относительные погрешности решения задачи (29) итерационным МГЭ

| m | Погрешность | | |
|-----|----------------------|----------------------|----------------------|
| | $L = 0,75L^*$ | $L = 0,85L^*$ | $L = 0,95L^*$ |
| 51 | $2,49 \cdot 10^{-6}$ | $5,98 \cdot 10^{-6}$ | $1,50 \cdot 10^{-4}$ |
| 101 | $1,14 \cdot 10^{-6}$ | $6,84 \cdot 10^{-7}$ | $8,20 \cdot 10^{-5}$ |

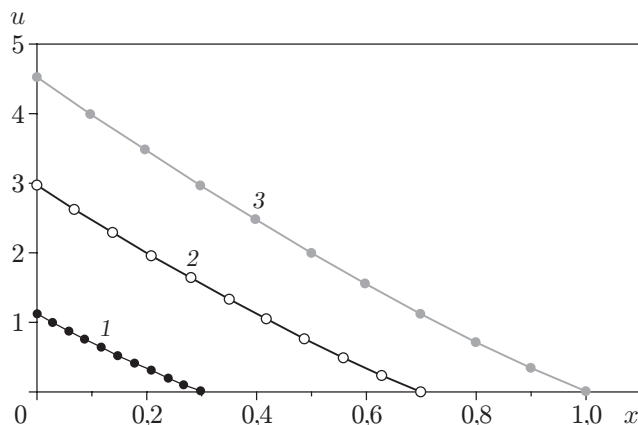
функции и ее производной на правом конце отрезка, что естественно для численного решения задачи Коши.

Повысить точность решения в случае неограниченного возрастания искомой функции можно, поменяв местами независимую переменную x и искомую функцию v . В этом случае задача (28) принимает вид

$$x'' = \frac{1}{v} \left(\frac{x'}{\sigma} - \frac{(\alpha v^\beta + \mu)(x')^2}{\sigma} \right), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = \frac{1}{\sigma\mu}. \quad (29)$$

Непрерывное решение задачи (29) можно получить с помощью итерационного МГЭ на заданном отрезке $v \in [0, V]$. При этом искомая функция при $\beta = 2$ является ограниченной. В табл. 3 приведены относительные погрешности решений задачи (29) при $\sigma = 3$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\mu = 0,5$. Параметр V определялся как значение функции (21) при $z = L$. Сравнение данных, приведенных в табл. 2, 3, показывает существенное увеличение точности, особенно при больших значениях L .

Результаты проведенного анализа свидетельствуют об удовлетворительной точности решения задачи (28) с помощью МГЭ. Таким образом, построенные с его помощью точные решения исходной задачи (2), (3) также можно использовать для тестирования пошагового алгоритма. В качестве примера рассмотрен случай $\beta < 1$. Как указывалось выше, при $\beta < 1$ последнее слагаемое в правой части уравнения (22) становится сингулярным при $x = 0$. Результаты проведенных расчетов показывают, что это не оказывает влияния на сходимость итерационных процессов. Результаты сравнения пошагового решения и решения типа бегущей волны при $\sigma = 3$, $\alpha = 1$, $\beta = 0,5$, $\mu = 1$ (см. рисунок) свидетельствуют о том, что они хорошо согласуются.



Решение уравнения (22) в различные моменты времени:

линии — пошаговое решение с помощью МГЭ, точки — решение в виде бегущей волны;

1 — $t = 0,3$, 2 — $t = 0,7$, 3 — $t = 1,0$

В целом можно отметить, что проведенный вычислительный эксперимент показал хорошую точность и сходимость численных алгоритмов.

Заключение. В работе с использованием методики, разработанной ранее для построения вырождающихся решений нелинейного параболического уравнения со степенной нелинейностью, проведено исследование уравнения конвекции-диффузии. Указанный подход предполагает доказательство теоремы существования и единственности решения, имеющего вид характеристического ряда; нахождение точных решений, построение которых сводится к интегрированию задач Коши для ОДУ, для уточнения области существования решения и получения более полной информации о свойствах изучаемого объекта; разработку приближенного алгоритма на основе граничноэлементного подхода с использованием метода двойственной взаимности; тестирование результатов расчетов с использованием точных решений и (или) отрезков характеристических рядов. Результаты проведенных исследований позволяют усовершенствовать алгоритмы численного решения.

Применение методики позволило выявить новые характеристики решений рассмотренного уравнения, имеющих тип диффузионной волны, включая область существования, и исследовать поведение этих решений на ее границах. Полученные результаты предполагается использовать при решении прикладных задач, связанных с моделированием процессов, происходящих в озере Байкал.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lu Y., Klingenberg C., Koley U., Lu X. Decay rate for degenerate convection diffusion equations in both one and several space dimensions // Acta Math. Sci. 2015. V. 35, iss. 2. P. 281–302.
2. Polyanin A. D. Functional separable solutions of nonlinear convection-diffusion equations with variable coefficients // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2019. V. 73. P. 379–390.
3. Андреев В. К. Современные математические модели конвекции / В. К. Андреев, Ю. А. Гапоненко, О. Н. Гончарова, В. В. Пухначев. М.: Физматлит, 2008.
4. Vazquez J. L. The porous medium equation: mathematical theory. Oxford: Clarendon Press, 2007.
5. Сидоров А. Ф. Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.

6. **Казаков А. Л.** Применение характеристических рядов для построения решений нелинейных параболических уравнений и систем с вырождением // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 114–122.
7. **Казаков А. Л., Лемперт А. А.** О существовании и единственности решения краевой задачи для параболического уравнения нестационарной фильтрации // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 2. С. 97–105.
8. **Kazakov A. L., Spevak L. F.** Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form // Appl. Math. Modell. 2013. V. 37, iss. 10/11. P. 6918–6928.
9. **Казаков А. Л.** Построение и исследование точных решений со свободной границей нелинейного уравнения теплопроводности с источником // Мат. тр. 2019. Т. 22, № 2. С. 54–75.
10. **Kazakov A. L., Spevak L. F., Nefedova O. A., Lempert A. A.** On the analytical and numerical study of a two-dimensional nonlinear heat equation with a source term // Symmetry. 2020. V. 12, iss. 6. 921.
11. **Филимонов М. Ю.** Использование метода специальных рядов для представления решений начально-краевых задач для нелинейных уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 8. С. 1100–1107.
12. **Wrobel L. C., DeFigueiredo D. B.** Numerical analysis of convection-diffusion problems using the boundary element method // Intern. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow. 1991. V. 1, iss. 1. P. 3–18.
13. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
14. **Banerjee P. K.** Boundary element methods in engineering science / P. K. Banerjee, R. Butterfield. L.: McGraw-Hill Book Co., 1981.
15. **Golberg M. A., Chen C. S., Bowman H.** Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM // Engng Anal. Boundary Elements. 1999. V. 23. P. 285–296.

*Поступила в редакцию 28/IX 2020 г.,
после доработки — 28/IX 2020 г.
Принята к публикации 26/X 2020 г.*
