

УДК 532.59:539.3:534.1

ДИФРАКЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ

И. В. Стурова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Исследовано косое набежание волн малой амплитуды на упругую полубезграничную составную пластину, плавающую на свободной поверхности жидкости конечной глубины. Передний участок пластины постоянной ширины шарнирно скреплен с основной частью и имеет отличные от нее характеристики. Определены коэффициенты отражения и прохождения волн, а также вертикальные смещения пластины. Показано существенное влияние неоднородности материала пластины на дифракцию поверхностных волн. Предложены способы уменьшения упругих деформаций основной части пластины.

Задача о рассеянии поверхностных волн тонкой упругой пластиной, расположенной на свободной поверхности жидкости, представляет интерес для изучения поведения ледяного покрова и искусственных сооружений типа плавающих платформ. В линейном приближении эта задача достаточно полно исследована для однородной пластины в виде полуплоскости или полосы [1, 2]. В ледяном покрове неоднородности появляются в результате трещин, разломов, торосов. Влияние этих неоднородностей рассмотрено в работах [3–6]. Для искусственных сооружений неоднородности материала могут быть более разнообразными и даже созданными специально с целью уменьшения упругих деформаций срединной части плавающей платформы.

В данной работе исследовано косое набежание монохроматических поверхностных волн на полубезграничную упругую пластину, передний участок которой представляет собой шарнирно прикрепленную полосу с отличными от основной пластины характеристиками.

Постановка задачи. На свободной поверхности бассейна постоянной глубины H плавает упругая полубесконечная составная пластина, осадка которой предполагается пренебрежимо малой. Из области свободной поверхности бассейна под углом к прямолинейной кромке пластины набегают прогрессивная волна с частотой ω . Система координат выбрана так, что начало координат расположено на дне бассейна под кромкой пластины, ось x перпендикулярна, а ось y параллельна ей, ось z направлена вертикально вверх. Пластина состоит из двух частей: передний участок постоянной ширины L характеризуется модулем Юнга E_1 , толщиной h_1 , плотностью ρ_1 и коэффициентом Пуассона ν_1 , остальная часть пластины имеет соответственно характеристики E_2 , h_2 , ρ_2 , ν_2 . Края составных частей пластины на линии $x = L$, $z = H$ соединены упругим шарниром.

Набегающая волна распространяется под углом θ к оси x и определяется потенциалом скоростей

$$\Phi_0(\mathbf{x}, t) = \varphi_0(x, z) \exp[i(\omega t - \beta y)],$$

где

$$\varphi_0 = \frac{ia g \operatorname{ch}(k_0 z)}{\omega \operatorname{ch}(k_0 H)} \exp(-i\alpha x); \quad (\alpha, \beta) = k_0(\cos \theta, \sin \theta); \quad \mathbf{x} = (x, y, z);$$

a — амплитуда волны; g — ускорение свободного падения; волновое число k_0 — положительный корень уравнения $\omega^2 = gk_0 \operatorname{th}(k_0 H)$. Здесь и далее во всех выражениях, содержащих множитель $\exp(i\omega t)$, физический смысл имеет только вещественная часть.

Рассматриваются установившиеся волны, и в связи с бесконечной длиной упругой пластины потенциал скоростей возмущенного движения жидкости ищется в виде

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \varphi(x, z) \exp[i(\omega t - \beta y)].$$

Для определения $\varphi(x, z)$ необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \beta^2 \varphi = 0$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \varphi = 0 \quad (x < 0, \quad z = H),$$

$$\left[D_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta^2 \right)^2 + 1 - \mu_1 \omega^2 \right] \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \varphi = 0 \quad (0 < x < L, \quad z = H),$$

$$\left[D_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta^2 \right)^2 + 1 - \mu_2 \omega^2 \right] \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \varphi = 0 \quad (x > L, \quad z = H),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (z = 0),$$

где $D_j = E_j h_j^3 / (12 \rho g (1 - \nu_j^2))$; $\mu_j = \rho_j h_j / (\rho g)$ ($j = 1, 2$); ρ — плотность воды. Предполагается, что пластина контактирует с водой во всех точках и во все моменты времени. На краях отдельных частей пластины должны выполняться контактно-граничные условия, сводящиеся к заданию перерезывающих усилий, изгибающих моментов и вертикальных смещений.

Контактно-граничные условия. Согласно [4, 6] на линии шарнирного соединения участков пластины при $x = L, z = H$ выполняются следующие условия для вертикальных смещений пластины $\eta(x, y, t)$:

$$\eta^+ = \eta^-; \quad (1)$$

$$D_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \eta^- = D_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \eta^+; \quad (2)$$

$$D_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu_1' \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \eta^- = D_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu_2' \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \eta^+; \quad (3)$$

$$D_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \eta^+ = \chi \left(\frac{\partial \eta^+}{\partial x} - \frac{\partial \eta^-}{\partial x} \right), \quad (4)$$

где $\eta^\pm = \lim_{x \rightarrow L \pm 0} \eta$; χ — коэффициент жесткости шарнира; $\nu_j' = 2 - \nu_j$ ($j = 1, 2$). Условие (1) означает непрерывность вертикальных смещений участков пластины на линии контакта, (2) — равенство изгибающих моментов на гранях контактирующих участков, (3) — равенство нулю суммы перерезывающих сил, (4) — соединение типа упругого шарнира.

Рассмотрим некоторые частные случаи. При $\chi \rightarrow \infty$ имеет место жесткое сцепление участков пластины (для ледяного покрова это случай сmerzшихся льдин [3]) и согласно условию (4)

$$\frac{\partial \eta^+}{\partial x} = \frac{\partial \eta^-}{\partial x}.$$

Условия (1)–(3) сохраняют прежний вид.

При $\chi = 0$ имеем свободный шарнир, что в случае ледяного покрова соответствует налеганию льдин [5], условия (2), (4) принимают вид

$$D_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \eta^- = D_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \eta^+ = 0.$$

Это условие свободного края, означающее равенство нулю изгибающего момента. На передней кромке пластины должно выполняться также второе условие свободного края, заключающееся в равенстве нулю перерезывающей силы:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \eta = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu'_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \eta = 0 \quad (x = 0, \quad z = H).$$

Метод решения. Для решения поставленной задачи используем метод сопряжения [2]. Область S , занятая жидкостью, разбивается на три части: S_1 ($-\infty < x < 0$), S_2 ($0 < x < L$), S_3 ($L < x < \infty$); в каждой из областей $\varphi(x, z)$ обозначим через $\varphi_l(x, z)$ ($l = \overline{1, 3}$).

Используя соотношение $\partial\eta/\partial t = \partial\Phi/\partial z|_{z=H}$, выразим контактно-граничные условия через значения потенциалов на краях соответствующих участков пластины при $z = H$:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \nu_1 \beta^2 \varphi_2 \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \nu'_1 \beta^2 \varphi_2 \right) = 0 \quad (x = 0),$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \quad (x = L),$$

$$D_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \nu_1 \beta^2 \varphi_2 \right) = D_2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} - \nu_2 \beta^2 \varphi_3 \right) \quad (x = L),$$

$$D_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \nu'_1 \beta^2 \varphi_2 \right) = D_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} - \nu'_2 \beta^2 \varphi_3 \right) \quad (x = L),$$

$$D_2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} - \nu_2 \beta^2 \varphi_3 \right) = \chi \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (\varphi_3 - \varphi_2) \quad (x = L).$$

Далее перейдем к безразмерным переменным, выбрав за масштаб длины глубину бассейна H , а за масштаб времени $\sqrt{H/g}$.

Функции φ_l будем искать в виде разложения по собственным функциям соответствующих краевых задач:

$$\varphi_1 = [E_0 \exp(-i\alpha x) + A_0 \exp(i\alpha x)] Y_0(k_0, z) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(\alpha_n x) Y_1(k_n, z),$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 = [B_0 \exp(-iq_0^{(1)} x) + C_0 \exp(iq_0^{(1)} x)] Y_0(r_0^{(1)}, z) + \sum_{m=1}^4 G_m \exp(s_m^{(1)} x) \cos(p_m^{(1)} z) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [B_n \exp(-q_n^{(1)} x) + C_n \exp(q_n^{(1)} x)] Y_1(r_n^{(1)}, z), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\varphi_3 = F_0 \exp(-iq_0^{(2)} x) Y_0(r_0^{(2)}, z) + \sum_{m=3}^4 K_m \exp(s_m^{(2)} x) \cos(p_m^{(2)} z) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \exp(-q_n^{(2)} x) Y_1(r_n^{(2)}, z).$$

Здесь $E_0 = ia\sqrt{\Lambda_0(k_0)}/(\omega \operatorname{ch} k_0)$; k_n ($n = 1, 2, \dots$) — вещественные корни уравнения $\omega^2 = -k_n \operatorname{tg} k_n$; $\alpha_n = \sqrt{k_n^2 + \beta^2}$; $r_0^{(j)}$ ($j = 1, 2$) — положительные корни уравнения

$$\omega^2 = \frac{(1 + \delta_j r^4) r \operatorname{th} r}{1 + \gamma_j r \operatorname{th} r}; \quad (6)$$

$$q_0^{(j)} = \sqrt{(r_0^{(j)})^2 - \beta^2}; \quad (7)$$

$\delta_j = D_j/H^4$; $\gamma_j = \mu_j g/H$. Уравнение (6) имеет также бесконечное число чисто мнимых корней $\pm ir_n^{(j)}$ ($n = 1, 2, \dots$), $q_n^{(j)} = \sqrt{(r_n^{(j)})^2 + \beta^2}$ и четыре комплексных корня $\pm \sigma^{(j)} \pm i\lambda^{(j)}$ ($\sigma^{(j)} > 0$, $\lambda^{(j)} > 0$). Величины $p_m^{(j)} = \pm \lambda^{(j)} \mp i\sigma^{(j)}$, $s_m^{(j)} = \sqrt{(p_m^{(j)})^2 + \beta^2}$. Пронумеруем $s_m^{(j)}$ следующим образом: $s_{1,2}^{(j)} = c^{(j)} \pm id^{(j)}$, $s_{3,4}^{(j)} = -c^{(j)} \pm id^{(j)}$ ($c^{(j)} > 0$, $d^{(j)} > 0$). Функции Y_0 , Y_n ($n = 1, 2, \dots$) имеют вид

$$Y_0(\xi, z) = \frac{\operatorname{ch}(\xi z)}{\sqrt{\Lambda_0(\xi)}}, \quad \Lambda_0(\xi) = \int_0^1 \operatorname{ch}^2(\xi z) dz = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sh}(2\xi)}{4\xi},$$

$$Y_1(\xi, z) = \frac{\cos(\xi z)}{\sqrt{\Lambda_1(\xi)}}, \quad \Lambda_1(\xi) = \int_0^1 \cos^2(\xi z) dz = \frac{1}{2} + \frac{\sin(2\xi)}{4\xi}.$$

Свойства собственных значений и собственных функций подробно изучены (см., например, [2]). Моды, связанные с k_n и $r_n^{(j)}$, называются краевыми, а моды, определяемые комплексными корнями $p_m^{(j)}$, — растущими или затухающими прогрессивными волнами в зависимости от знака $\operatorname{Re}(s_m^{(j)})$. При введенной нумерации растущими являются моды, определяемые $s_1^{(j)}$ и $s_2^{(j)}$, а затухающими — $s_3^{(j)}$ и $s_4^{(j)}$. Соотношения (5) записаны с учетом условия излучения, означающего отсутствие набегающей волны из области $x > L$, и ограниченности потенциалов φ_1 при $x \rightarrow -\infty$ и φ_3 при $x \rightarrow \infty$. Моды, связанные с $r_0^{(j)}$, являются прогрессивными изгибно-гравитационными волнами при вещественных значениях $q_0^{(j)}$ в (7). Однако при $r_0^{(j)} < \beta$ значения $q_0^{(j)}$ становятся мнимыми, что соответствует краевой моде. Значение угла $\theta = \theta_j$, где

$$\theta_j = \arcsin(r_0^{(j)}/k_0), \quad (8)$$

называется критическим для соответствующих частей пластины.

В силу непрерывности движения жидкости в области S на границах областей S_l ставятся условия непрерывности потенциалов и скоростей горизонтальных волновых течений

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \quad (x = 0, \quad 0 \leq z \leq 1); \quad (9)$$

$$\varphi_2 = \varphi_3, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \quad (x = L, \quad 0 \leq z \leq 1). \quad (10)$$

Используя метод редукции, бесконечные ряды в (5) заменим конечными суммами с числом членов N . Условия согласования (9), (10) выполняются в интегральном смысле (они последовательно умножаются на функции $Y_0(k_0, z)$, $Y_0(r_0^{(j)}, z)$, $Y_1(k_n, z)$, $Y_1(r_n^{(j)}, z)$ ($n = \overline{1, N}$) и интегрируются в интервале $0 \leq z \leq 1$). В результате задача сводится к линейной системе $4N + 10$ уравнений, которая решается численно.

После вычисления всех неизвестных комплексных коэффициентов в (5) можно определить волновое движение жидкости и деформации пластины. Как отмечено в [4], контактно-граничные условия (1)–(4) бездиссипационные, поэтому поток энергии должен сохраняться при переходе через плоскость $x = L$. Следовательно, должно выполняться энергетическое соотношение [7]

$$|R|^2 + Q|T|^2 = 1, \quad (11)$$

свойственное полубезграничной однородной пластине, где коэффициенты отражения поверхностной волны R и прохождения изгибно-гравитационной волны T соответственно равны

$$R = \frac{A_0}{E_0}, \quad T = \frac{r_0^{(2)} F_0 \operatorname{sh} r_0^{(2)}}{k_0 E_0 \operatorname{sh} k_0} \sqrt{\frac{\Lambda_0(k_0)}{\Lambda_0(r_0^{(2)})}},$$

$$Q = \operatorname{Re}(q_0^{(2)}) k_0^2 \operatorname{sh}(2k_0) \frac{2r_0^{(2)} (\delta_2(r_0^{(2)}))^4 + 1 - \gamma_2 \omega^2 + \operatorname{sh}(2r_0^{(2)}) (5\delta_2(r_0^{(2)}))^4 + 1 - \gamma_2 \omega^2}{\operatorname{Re}(\alpha) (r_0^{(2)})^2 \operatorname{sh}(2r_0^{(2)}) [2k_0 + \operatorname{sh}(2k_0)]}.$$

Приближенным методом определения коэффициентов отражения и прохождения является решение рассматриваемой задачи без учета краевых волн, т. е. без учета бесконечных сумм в представлениях (5). Решение такой задачи проще, так как сводится к системе только 10 линейных уравнений.

Численные расчеты. В расчетах выбраны те же характеристики пластины, что и в эксперименте [8] (далее вернемся к размерным переменным): $E_2 = 103$ МПа, $h_2 = 3,8$ см, $\rho_2 = 220$ кг/м³. Толщина слоя воды в канале составляла $H = 1,1$ м. При этих значениях $\delta_2 = 3,6 \cdot 10^{-2}$, $\gamma_2 = 7,6 \cdot 10^{-3}$. Сравнение численных и экспериментальных значений вертикальных смещений и изгибных моментов при нормальном падении поверхностных волн на однородную полосу шириной 10 м представлено в [9].

Предположим, что передний участок пластины шириной $L = 1$ м шарнирно скреплен с основной пластиной, при этом модуль Юнга может быть либо равен E_2 , либо отличен от него. Остальные параметры этого участка соответствуют основной пластине: $h_1 = h_2$, $\rho_1 = \rho_2$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$.

На рис. 1 представлена зависимость модуля коэффициента отражения $|R|$ от $\bar{\omega} = \omega \sqrt{H/g}$ при нормальном падении волн ($\theta = 0$) и $E_1 = E_2$. Кривая 1 соответствует жесткому сцеплению пластин, 2 — свободному шарниру, 3–5 — упругому шарниру с безразмерными коэффициентами жесткости $\vartheta = \chi/H^3 = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$. Приближенные решения без краевых мод представлены кривыми 6, 7 для жесткого и свободного шарниров соответственно. Аналогично [2] эти решения могут быть применены только для достаточно длинных волн.

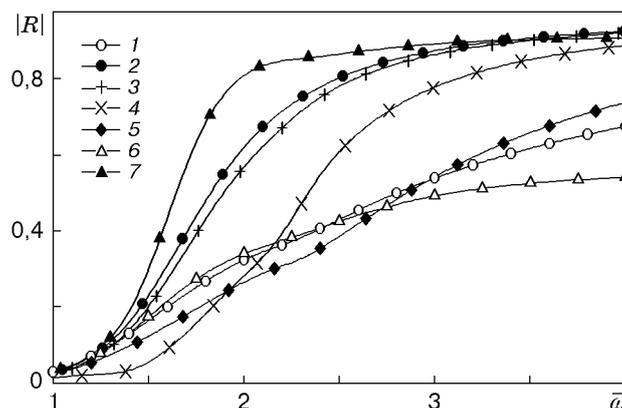


Рис. 1

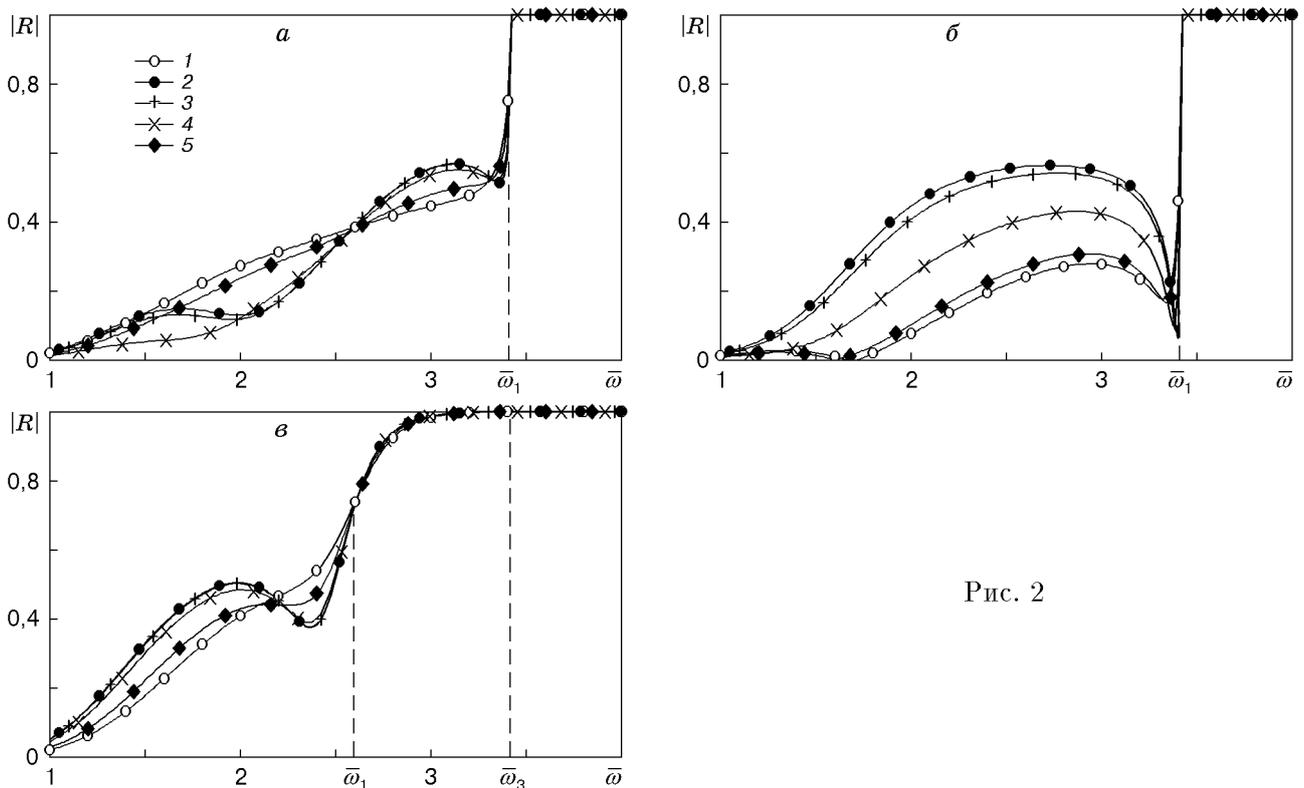


Рис. 2

Влияние косо́го набегания ($\theta = 15^\circ$) показано на рис. 2, *a-в* соответственно при $E_1 = E_2$; $E_1/E_2 = 0,1$; $E_1/E_2 = 10$. Обозначения кривых 1–5 на рис. 2 те же, что на рис. 1. Значения $|R|$ при $\bar{\omega} < 1$ на рис. 1, 2 не показаны, так как они не превышают 0,1. Согласно (8) критический угол $\theta_2 = 15^\circ$ соответствует $\bar{\omega}_1 \approx 3,413$, а $\theta_1 = 15^\circ$ — $\bar{\omega}_2 \approx 4,560$ ($E_1/E_2 = 0,1$) и $\bar{\omega}_3 \approx 2,580$ ($E_1/E_2 = 10$). Видно, что, изменяя свойства упругости переднего участка, а также характеристики шарнирного соединения, можно в широких пределах варьировать коэффициент отражения поверхностных волн от пластины и, следовательно, управлять количеством энергии, проходящим внутрь основной части пластины. Увеличение коэффициента жесткости шарнирного соединения позволяет плавно переходить от режима свободного шарнира к жесткому сцеплению участков пластины.

Вертикальные смещения пластины можно представить в виде

$$\eta(x, y, t) = \operatorname{Re}\{\zeta(x) \exp[i(\omega t - \beta y)]\}.$$

Распределение амплитуды вертикальных смещений $|\zeta|/a$ на участке $0 \leq x/H \leq 2$ показано на рис. 3, *a, б* соответственно для нормального и косо́го ($\theta = 15^\circ$) набегания поверхностных волн с периодами $\tau = 2\pi/\omega = 0,7$ с при $\bar{\omega} \approx 3,006$. На рис. 3 кривыми 1–3 представлены результаты расчетов для жесткого сцепления участков пластины при $E_1/E_2 = 0,1$; 1; 10, кривыми 4–6 — результаты расчетов для свободного шарнира при тех же параметрах. Видно, что амплитуды вертикальных смещений пластины вдали от передней кромки практически не испытывают влияния составного характера пластины в тех случаях, когда имеет место неполное отражение поверхностных волн. При нормальном падении волн уменьшение амплитуды вертикальных смещений наблюдается только для свободного шарнира (кривые 5, 6 на рис. 3, *a*; $|R| \approx 0,876$; $0,882$ при $E_1/E_2 = 1$; 10). Наиболее существенное уменьшение колебаний пластины происходит при косо́м набегании волн и более жестком, чем основная пластина, переднем участке, когда угол падения волн превышает критическое значение (кривые 3, 6 на рис. 3, *б*).

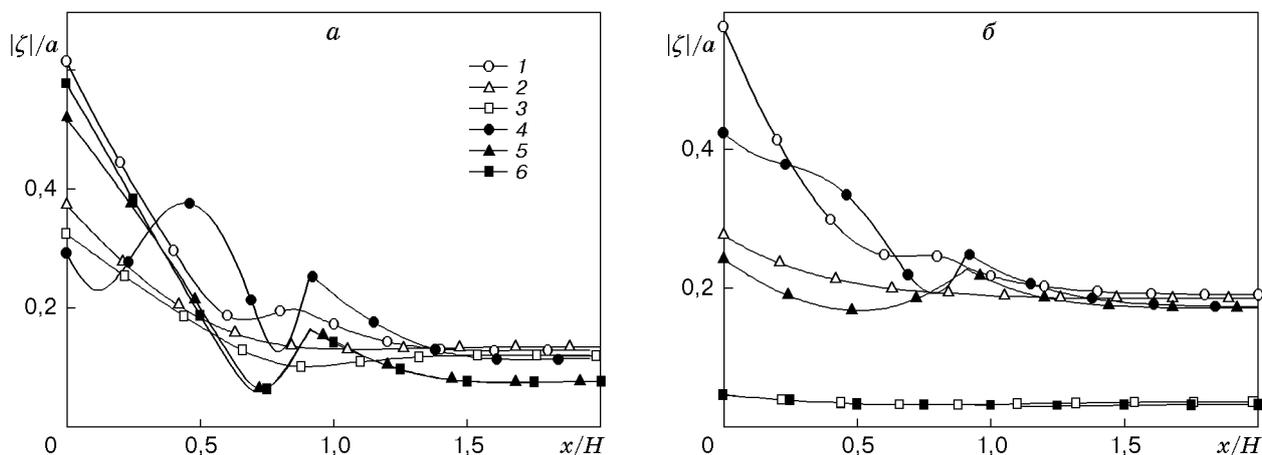


Рис. 3

Точность расчетов при учете краевых мод проверялась путем последовательного увеличения их числа, в данной работе полагалось $N = 30$, при этом погрешность выполнения энергетического соотношения (11) не превышала 3%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Squire V. A., Dugan J. P., Wadhams P., et al. Of ocean waves and sea ice // Annu. Rev. Fluid Mech. 1995. V. 27. P. 115–168.
2. Стурова И. В. Косое набегание поверхностных волн на упругую полосу // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 62–68.
3. Марченко А. В. Дифракция поверхностных волн на трещине в ледяном покрове // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1993. № 2. С. 93–102.
4. Марченко А. В. Дифракция изгибно-гравитационных волн на линейных неоднородностях в ледяном покрове // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 4. С. 97–112.
5. Букатов А. Е., Завьялов Д. Д. Набегание изгибно-гравитационных волн на линию контакта двух плавающих ледяных пластин разной толщины // Мор. гидрофиз. журн. 1998. № 1. С. 11–17.
6. Марченко А. Изгибно-гравитационные волны // Динамика волн на поверхности жидкости. М.: Наука, 1999. С. 65–111.
7. Fox C., Squire V. A. On oblique reflexion and transmission of ocean waves at shore fast sea ice // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1994. V. 347, N 1682. P. 185–218.
8. Wu C., Watanabe E., Utsunomiya T. An eigenfunction expansion-matching method for analyzing the wave-induced responses of an elastic floating plate // Appl. Ocean Res. 1995. V. 17, N 5. P. 301–310.
9. Sturova I. V. The oblique incidence of surface waves onto the elastic band // Proc. of the 2nd Intern. conf. on hydroelasticity in marine technology, Fukuoka, Japan, 1–3 Dec., 1998. Fukuoka: Res. Inst. Appl. Mech. Kyushu Univ., 1998. P. 239–245.

Поступила в редакцию 16/IX 1999 г.