ние толщины теплового слоя (без химических реакций) вплоть до температуры горения является математическим приемом, примененным одновременно с соответствующим определением интеграла скорости тепловыделения. Как следует из результатов численного интегрирования, процесс химических превращений охватывает достаточно большой интервал изменения температуры.

Поступила в редакцию
27/VIII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович и Д. А. Франк-Каменецкий. ЖФХ, 1938, **XII**, 1.
2. И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ОГИЗ, 1948.
3. Е. С. Щетинков. Физика горения газов. М., «Наука», 1965.
4. Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, 1942, **XII**, 11.

УДК 536.46

ОБ ОДНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ГОРЕНИЯ

Д. А. Ваганов, С. И. Худяев

(Москва)

Рассматривается система уравнений

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \omega \frac{du}{dx} - u_0 \eta^n F(u) = 0,$$
$$-\omega \frac{d\eta}{dx} + \eta^n F(u) = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\text{при } x = -\infty \quad u = 0, \qquad \eta = 0,$$
$$\text{при } x = +\infty \quad u = u_0 > 0, \quad \eta = 1, \tag{2}$$

которая описывает распространение фронта экзотермической реакции в конденсированной фазе [1]. Здесь η — относительная концентрация; u — безразмерная температура; $F(u)$ — температурный член скорости химической реакции; n — порядок реакции; x — координата. Координаты $x = \pm\infty$ отвечают соответственно начальному и конечному состоянию. Значения параметра $\omega > 0$, при которых задача (1)—(2) имеет решение, по аналогии с линейными уравнениями будем называть собственными значениями задачи. Собственные значения представляют собой безразмерную скорость распространения фронта. Свойства среды (теплопроводность, теплоемкость и плотность) считаются постоянными.

Система имеет первый интеграл

$$-\frac{du}{dx} + \omega (u_0 \eta - u) = \text{const}, \tag{3}$$

причем, как следует из (2), const=0. С его помощью задача (1)—(2) сводится к решению одного уравнения

$$\frac{d\eta}{du}=\frac{\eta^n}{u_0\eta-u}\,\frac{F(u)}{\omega^2} \tag{4}$$

с граничными условиями

$$u=0,\quad \eta=0;\quad u=u_0,\quad \eta=1 \tag{5}$$

и одной квадратуре.

Исследуем поведение интегральных кривых уравнения (4), выходящих из начала координат. При этом, в соответствии с (5), будем рассматривать только те кривые, у которых $\eta>\frac{u}{u_0}$ при $u>0$.

Рассмотрим сначала поведение интегральных кривых при $u\to 0$. Этот вопрос возникает вследствие того, что уравнение (4) имеет особенность при $\eta=u=0$. Переходя в (4) к пределу, получим при $n=1$

$$\eta'(0)=\frac{1}{u_0}\left(1+\frac{F(0)}{\omega^2}\right). \tag{6}$$

В остальных случаях для представления зависимостей удобно рассматривать в качестве независимой переменной η, а не u. При этом получаем

$$\frac{u}{u_0}=\begin{cases}\dfrac{\omega^2}{(2-n)F(0)}\,\eta^{2-n}\,v(\eta) & \text{при } n<1\\[2mm] \eta-\dfrac{F(0)}{\omega^2}\,\eta^n v(\eta) & \text{при } n>1,\end{cases} \tag{7}$$

где $v(0)=1$, причем

$$v'(\eta)=-\frac{\omega^2}{(3-n)F(0)}\,\eta^{-n}+O\left(\eta^{\frac{1-n}{2}}\right)\ \text{при } n<1$$

и

$$\left(1+\frac{F(0)}{\omega^2}\,\eta^{n-1}\right)v'(\eta)=-n\,\frac{F(0)}{\omega^2}\,\eta^{n-2}+\frac{F'(0)}{F(0)}\,u_0+$$
$$+O(\eta^{\varepsilon})\ \text{при } n>1.$$

Здесь $\varepsilon=\min\left(\frac{n-1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, т. е. $v'(\eta)$ имеет при $\eta\to 0$ интегрируемую особенность.

Покажем теперь, что интегральные кривые $\eta(u,\omega)$ монотонно убывают с ростом ω. Действительно, как следует из (6) и (7), это утверждение справедливо при $u\to 0$, а из (4) видно, что если $\eta(u,\omega_1)=\eta(u,\omega_2)$, то $\eta'(u,\omega_1)>\eta(u,\omega_2)$ при $\omega_1<\omega_2$. Следовательно, кривые, соответствующие разным ω, не могут пересекаться при $u>0$:

$$\eta(u,\omega_1)\geqslant\eta(u,\omega_2)\quad\text{при}\quad \omega_1<\omega_2. \tag{8}$$

Вопрос о существовании и единственности решения удобно исследовать в переменных

$$t=\frac{u}{u_0},\qquad v=\omega\left(\eta-\frac{u}{u_0}\right), \tag{9}$$

в которых задача (4)—(5) принимает вид

$$v' = \frac{dv}{dt} = -\omega + \frac{\left(t+\frac{v}{\omega}\right)^n}{v}\cdot f(t), \tag{10}$$

$$t=0,\ v=0;\ t=1,\ v=0, \tag{11}$$

где $f(t)=F(u_0t)$. Будем обозначать через $v(t,\ \omega)$ интегральные кривые уравнения (10), выходящие из начала координат в первый квадрант. Отметим, что, как следует из (8) и (9),

$$\frac{v(t,\ \omega_1)}{\omega_1} \geqslant \frac{v(t,\ \omega_2)}{\omega_2} \text{ при } \omega_1 < \omega_2. \tag{12}$$

Используя (8) и (6)—(7), тем же способом, что и при выводе (8) нетрудно показать, что и

$$v(t,\ \omega_1) \geqslant v(t,\ \omega_2) \text{ при } \omega_1<\omega_2. \tag{13}$$

Легко видеть, что граничные условия не могут быть удовлетворены, если $f(1) \neq 0$. Рассмотрим отдельно два вида функции $f(t)$, удовлетворяющих требованию $f(1)=0$, для которых получаются различные результаты, а именно, случай, когда $f(t)=0$ на некотором конечном интервале (усеченная задача) [2], и случай, когда $f(t)$ обращается в ноль лишь при $t=1$ (неусеченная задача) [3].

Рассмотрим усеченную задачу. Пусть $f(t)>0$ при $0\leqslant t<\beta$ и $f(t)=0$ при $\beta\leqslant t\leqslant 1, \beta<1$. Тогда решение существует и единственно.

Действительно, при $t\geqslant\beta$

$$v(t,\ \omega)=v(\beta,\ \omega)-\omega(t-\beta). \tag{14}$$

Пусть $v(1,\ \omega_1)\neq 0$. Рассмотрим тогда $v(t,\ \omega_2)$, где

$$\omega_2 = \frac{v(\beta,\ \omega_1)}{1-\beta} = \omega_1 + \frac{v(1,\ \omega_1)}{1-\beta}. \tag{15}$$

Пусть, например, для определенности, $v(1,\ \omega_1)>0$. Тогда $\omega_2>\omega_1$ и из (14), (15) и (13) имеем $v(1,\ \omega_2)=v(\beta,\ \omega_2)-\omega_2(1-\beta)=v(\beta,\ \omega_2)-$ $-v(\beta,\ \omega_1)\leqslant 0$, откуда вытекает, что существует ω_0, $\omega_1<\omega_0\leqslant\omega_2$, такое что $v(1,\ \omega_0)=0$, т. е. $v(t,\ \omega_0)$ является решением, а так как из (14) и (13) следует, что $v(1,\ \omega)=v(1,\ \omega)-v(1,\ \omega_0)=v(\beta,\ \omega)-v(\beta,\ \omega_0)+$ $+(\omega_0-\omega)(1-\beta)\neq 0$ при $\omega\neq\omega_0$, то решение единственно. Отметим здесь, что в общем случае стационарных уравнений теории горения решение усеченной задачи, вообще говоря, неединственно [4].

Рассмотрим теперь неусеченную задачу. Пусть $f(t)>0$ при $0\leqslant t<1$ и $f(1)=0$, $f'(1)$ конечно. Тогда решение существует, но неединственно. (Если $f'(1)=-\infty$, то нетрудно показать, что решение не существует.)

Из конечности $f'(1)$ следует, что существует константа f_0, такая что $f(t)\leqslant(1-t)f_0$. (В качестве f_0, если $f'(t)$ конечна, можно взять $\max|f'(t)|$). Тогда при $\omega=2\sqrt{f_0}$ получим оценку поля направлений вдоль прямой $v=(1-t)\sqrt{f_0}$

$$v' = -2\sqrt{f_0} + \left(\frac{1+t}{2}\right)^n \frac{f(t)}{(1-t)\sqrt{f_0}} \leqslant -\sqrt{f_0}.$$

Отсюда следует, что $v(t,\ 2\sqrt{f_0})\leqslant(1-t)\sqrt{f_0}$, а так как из (10) и из условия $f(t)>0$ при $t<1$ вытекает, что

$$v(1,\ \omega)\geqslant 0, \tag{16}$$

то $v\left(1,\ 2\sqrt{f_0}\right)=0$ и решение существует. Пусть решение существует при $\omega=\omega_1$. Тогда из (13) и (16) будем иметь

$$0 \leqslant v(1, \omega) \leqslant v(1, \omega_1)=0 \quad \text{при} \quad \omega \geqslant \omega_1,$$

т. е. получаем, что существует такое минимальное $\omega=\omega_0$, когда задача разрешима при всех $\omega>\omega_0$ и неразрешима при $\omega<\omega_0$.

Покажем, что решение существует и при $\omega=\omega_0$, а также, что ω_0 равно пределу собственных значений последовательности соответствующих усеченных задач.

Обозначим через ω_β и $w_\beta(t)$ собственное значение и решение задачи (10)—(11), где $f(t)$ заменена на

$$g(t)=\begin{cases} f(t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \beta \\ 0 & \text{при } \beta < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$w_\beta(t)=\begin{cases} v(t, \omega_\beta) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \beta \\ \omega_\beta(1-t) & \text{при } \beta < t \leqslant 1, \end{cases} \tag{17}$$

причем

$$w_\beta(\beta)=v(\beta, \omega_\beta)=\omega_\beta(1-\beta), \tag{18}$$

а так как при $t>\beta$ $w'_\beta(t)=-\omega_\beta<v'(t, \omega_\beta)$, то

$$w_\beta(t)<v(t, \omega_\beta) \quad \text{при} \quad t>\beta. \tag{19}$$

Следовательно, $v(1, \omega_\beta)>0$, так что $\omega_\beta \leqslant \omega_0$. Покажем, что ω_β монотонно возрастает с ростом β. Пусть $\beta_1<\beta_2$ и пусть им соответствуют w_1, ω_1 и w_2, ω_2. Тогда из (17), (18) и (19) имеем

$$\frac{w_2(\beta_2)}{\omega_2}=\frac{v(\beta_2, \omega_2)}{\omega_2}=1-\beta_2=\frac{w_1(\beta_2)}{\omega_1}<\frac{v(\beta_2, \omega_1)}{\omega_1},$$

откуда, согласно (12), получаем, что действительно $\omega_2 \geqslant \omega_1$. Следовательно, ω_β имеют предел $\omega_* \leqslant \omega_0$ при $\beta \to 1$. Рассмотрим $v(t, \omega_*)$. Так как $\omega_* \geqslant \omega_\beta$, то из (12) и (18) имеем

$$\frac{v(\beta, \omega_*)}{\omega_*} \leqslant \frac{v(\beta, \omega_\beta)}{\omega_\beta}=1-\beta. \tag{20}$$

Переходя в (20) к пределу и учитывая (16), получаем, что $v(1, \omega_*)=0$, откуда $\omega_* \geqslant \omega_0$. Следовательно, $\omega_*=\omega_0$, так что действительно $\omega_0=\lim\limits_{\beta \to 1} \omega_\beta$ и является собственным значением неусеченной задачи. Тем самым показано, что в случае неусеченной задачи только ω_0 является устойчивым относительно малых возмущений $f(t)$.

Оценим ω_0. При $n<2$ из (4) имеем

$$\eta^{1-n} \frac{d\eta}{du} \geqslant \frac{F(u)}{u_0 \omega_0^2}, \tag{21}$$

откуда, интегрируя, получаем

$$\omega_0^2 \geqslant \frac{2-n}{u_0} \int_0^{u_0} F(u)\, du. \tag{22}$$

При $n>1$ правая часть (4) имеет как функция от η минимум при $\eta=\frac{n}{n-1} \cdot \frac{u}{u_0}$, откуда получаем

$$\omega_0^2 \geqslant \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{u_0^n} \int\limits_0^{u_0} u^{n-1} F(u)\, du. \qquad (23)$$

При $n<1$ можно показать, что для усеченной задачи при достаточно малых β формула (22) дает главный член разложения по степеням $\frac{1}{u_0}$. Действительно, из (21) имеем

$$\eta^{2-n} \geqslant \frac{2-n}{u_0\,\omega_0^2} \int\limits_0^u F(v)\, dv, \qquad (24)$$

а так как правая часть (4) монотонно убывает с ростом η, то, учитывая (24), получим

$$\left(u_0\,\omega_0^2\right)^{\frac{1}{2-n}} = u_0\,\omega_0^2 \left(u_0\,\omega_0^2\right)^{\frac{n-1}{2-n}} = \left(u_0\,\omega_0^2\right)^{\frac{n-1}{2-n}} \int\limits_0^{u_*} \frac{\eta^{n-1} F(u)}{1-\dfrac{u}{u_0\,\eta}}\, du \leqslant$$

$$\leqslant (2-n)^{\frac{n-1}{2-n}} \int\limits_0^{u_*} F(u) \left(\int\limits_0^u F(v)\, dv\right)^{\frac{n-1}{2-n}} \left[1 - \frac{\omega_0^{\frac{2}{2-n}}}{u_0^{\frac{1-n}{2-n}}} \times\right.$$

$$\left.\times \frac{u}{\left(\int\limits_0^u F(v)\, dv\right)^{\frac{1}{2-n}}}\right]^{-1} du = (2-n)^{\frac{n-1}{2-n}} \int\limits_0^{u_*} \frac{F(u)}{2-n} \left(\int\limits_0^u F(v)\, dv\right)^{\frac{1}{2-n}-1} \sum_{k=0}^{\infty} \times$$

$$\times \left[\frac{\omega_0^{\frac{2}{2-n}}}{u_0^{\frac{1-n}{2-n}}} \cdot \frac{u}{\left(\int\limits_0^u F(v)\, dv\right)^{\frac{1}{2-n}}}\right]^k du, \qquad (25)$$

что справедливо при $u_*^{n-2} \int\limits_0^{u_*} F(u)\, du > \omega_0^2\, u_0^{n-1}$, $u_* = \beta\, u_0$. Отсюда видно, что так как ω_0 ограничено, то при $u_0 \to \infty$ существен только первый член ряда. Отсюда с учетом (22) получаем

$$\omega_0^2 = \frac{2-n}{u_0} \int\limits_0^{u_*} F(u)\, du + O\left(\frac{1}{u_0}\right). \qquad (26)$$

Формула (26), полученная для $n<1$, остается в силе и для $n=1$.

Отметим, что в случае аррениусовской температурной зависимости

$$\omega^2 = \frac{V^2}{a\,k_0\,e^{-E/RT_m}}, \quad u = \frac{E}{RT_m^2}(T_m - T),$$

$$F(u) = \exp\left(-\frac{u}{1-bu}\right), \quad u_0 = \frac{E}{RT_m^2}\left(T_m - T_0\right) = \frac{Q}{c\,\rho} \cdot \frac{E}{RT_m^2},$$

где V — линейная скорость распространения фронта; k_0 — предэкспонент; E — энергия активации; Q — тепловой эффект реакции, отнесенный к единице массы; a — коэффициент температуропроводности; c — удельная теплоемкость; ρ — плотность; T_0 — начальная температура;