

УДК 519.63

ТЕЧЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ РАЗРУШЕНИИ ПЛОТИНЫ НАД СТУПЕНЬКОЙ ДНА

В. В. Остапенко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

В рамках однослойной модели теории мелкой воды изучается разрешимость задачи о течениях, возникающих при разрушении плотины над разрывом отметки дна, представляющем собой ступеньку, на которую натекает вода. Рассмотрены решения, в которых полная энергия потока сохраняется на ступеньке, и решения, в которых она на ступеньке теряется.

Ключевые слова: мелкая вода, разрушение плотины, ступенька дна.

1. Постановка задачи. Дифференциальные уравнения однослойной мелкой воды (уравнения Сен-Венана) [1, 2] в случае прямоугольного русла постоянной ширины и переменной глубины без учета влияния трения имеют вид

$$h_t + q_x = 0, \quad q_t + (qv + h^2/2)_x = -hb_x, \quad (1.1)$$

где $h(x, t)$, $q(x, t)$, $v = q/h$ — глубина, расход и скорость потока; $b(x)$ — отметка дна. Ускорение свободного падения $g = 1$. Для системы (1.1) рассмотрим задачу о распаде начального разрыва уровня $z = b + h$

$$z(x, 0) = \begin{cases} z_0, & x > 0, \\ z_1, & x < 0, \end{cases} \quad z_1 > z_0 \quad (1.2)$$

над скачком отметки дна

$$b(x) = \begin{cases} \delta, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \delta > 0 \quad (1.3)$$

в первоначально покоящейся воде:

$$v(x, 0) = 0. \quad (1.4)$$

Поскольку $z_1 > z_0$, то $q(0, t) > 0$ при $t > 0$ и разрыв (1.3) с учетом терминологии, принятой в [3], представляет собой ступеньку дна, на которую натекает вода. Учитывая также, что задача о распаде разрыва (1.1), (1.2), (1.4) над ровным дном называется задачей о разрушении плотины [4], задачу (1.1)–(1.4) будем называть задачей о разрушении плотины над ступенькой дна. При этом значения точного решения на разрыве (1.3) в точке $x = 0 - 0$ будем называть течением перед ступенькой, а в точке $x = 0 + 0$ — течением на ступеньке. Решение при $x < 0$ будем называть течением слева от ступеньки, а решение при $x > 0$ — течением справа от ступеньки.

Задача (1.1)–(1.4) представляет собой частный случай общей задачи о распаде произвольного разрыва над скачком отметки дна, которая изучалась в работе [5], где приведены различные примеры ее решения в предположении, что на разрыве (1.3) сохраняется полная энергия потока. Однако в [5] не исследована однозначность этих решений и не выделены области их существования. Задача (1.1)–(1.4) при $\delta < 0$, когда возникающее на разрыве отметки дна течение представляет собой уступ, с которого стекает вода, исследовалась в работе [6] в рамках теоретического анализа гидравлических процессов, возникающих при разрушении ворот многокамерного судоходного шлюза. Задача (1.1)–(1.4) изучалась также в работе [7] в предположении, что полная энергия потока на разрыве (1.3) сохраняется. Однако в [7] однозначная разрешимость этой задачи была показана лишь приближенно путем численного расчета, из которого следует строгая монотонность соответствующей функциональной зависимости.

Целью настоящей работы является анализ однозначной разрешимости задачи о распаде разрыва (1.1)–(1.4) как в предположении, что полная энергия потока сохраняется при переходе через ступеньку дна, так и в предположении, что она теряется на ней. При проведении анализа будем использовать результаты работы [8], в которой решалась задача о распаде разрыва в мелкой воде над горизонтальным дном, результаты работ [9, 10], в которых рассматривалась задача о распаде газодинамического разрыва на скачке площади сечения в трубопроводе, а также результаты работы [7], в которой изучались допустимые устойчивые течения на разрыве (1.3).

Прежде чем перейти к решению задачи (1.1)–(1.4), напомним, как доказывается однозначная разрешимость классической задачи о распаде разрыва

$$h(x, 0) = \begin{cases} h_0, & x > 0, \\ h_1, & x < 0, \end{cases} \quad v(x, 0) = \begin{cases} v_0, & x > 0, \\ v_1, & x < 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

над горизонтальным дном $b(x) = \text{const}$.

2. Решение классической задачи о распаде произвольного разрыва. В [8] задача о распаде произвольного разрыва (1.1), (1.5) при $b_x = 0$ по аналогии с газодинамическим случаем [11] решается с использованием s - и r -адиабат. Роль s -адиабаты, проходящей через начальное состояние h_0, v_0 , выполняет функция

$$v = v_s(h, h_0, v_0) = v_0 + a(h, h_0), \quad (2.1)$$

а роль r -адиабаты, проходящей через начальное состояние h_1, v_1 , — функция

$$v = v_r(h, h_1, v_1) = v_1 - a(h, h_1), \quad (2.2)$$

где

$$a(h, h_i) = \begin{cases} \sqrt{(h + h_i)/(2hh_i)}(h - h_i), & h \geq h_i, \\ 2(\sqrt{h} - \sqrt{h_i}), & h \leq h_i. \end{cases} \quad (2.3)$$

При $h > h_i$ уравнения адиабат (2.1)–(2.3), получаемые из условий Гюгонио

$$D[h] = [q], \quad D[q] = [qv + h^2/2] \quad (2.4)$$

(D — скорость ударной волны; $[f]$ — скачок функции f на ее фронте), связывают начальные значения h_i, v_i перед фронтом прерывной волны с возможными состояниями h, v за ее фронтом. При $h < h_i$ эти уравнения, получаемые из условий

$$s = v + 2c = \text{const}, \quad r = v - 2c = \text{const} \quad (2.5)$$

($c = \sqrt{h}$ — скорость распространения малых возмущений в неподвижной воде), связывают начальные значения h_i, v_i перед центрированной волной понижения с возможными

состояниями h, v за ней. Условия Гюгонио (2.4) получаются из законов сохранения массы и полного импульса (1.1), а условия (2.5) следуют из постоянства s -инварианта в r -волне понижения и постоянства r -инварианта в s -волне понижения [11].

Однозначная разрешимость классической задачи о распаде разрыва (1.1), (1.5) следует из монотонного возрастания s -адиабаты (2.1) и монотонного убывания r -адиабаты (2.2) (см. [8]), что в общем случае приводит к образованию простой s -волны, распространяющейся по фону h_0, v_0 , и простой r -волны, распространяющейся по фону h_1, v_1 , соединенных областью постоянного течения. В частности, в решении классической задачи о течении, возникающем при разрушении плотины (1.1), (1.2), (1.4) над горизонтальным дном $b(x) = \text{const}$, по фону h_0, v_0 будет распространяться прерывная s -волна, а по фону h_1, v_1 — центрированная r -волна понижения.

В решении обобщенной задачи о распаде разрыва над ступенькой (1.1)–(1.4) получаемая картина течений является более сложной, однако, как показано в [10], в подобных случаях графический метод адиабат также является достаточно эффективным. Для его применения прежде всего необходимо задать соотношения, которым удовлетворяют параметры потока по обе стороны от разрыва (1.3).

Предположим, что на разрыве (1.3) выполнены законы сохранения массы и локального импульса

$$h_t + q_x = 0, \quad v_t + (v^2/2 + z)_x = 0, \quad (2.6)$$

а значит, и закон сохранения полной энергии [7]. Из (2.6) следует непрерывность на ступеньке расхода и константы Бернулли:

$$[q] = 0, \quad [v^2/2 + z] = 0. \quad (2.7)$$

Это означает, что для эволюционности [2, 12] неподвижного разрыва над ступенькой необходимо, чтобы две характеристики приходили на него и две строго уходили (при этом в число входящих включаются характеристики, распространяющиеся с нулевой скоростью вдоль линии разрыва (1.3), а в число строго уходящих они не включаются). В [7] показано, что в рамках таких эволюционно-устойчивых разрывных решений глубина H и скорость потока V перед ступенькой однозначно определяются по их значениям h и v на ступеньке. При этом разрыву отметки дна (1.3) в модели мелкой воды соответствует переходная зона $[-\varepsilon, \varepsilon]$ достаточно быстрого, но гладкого и монотонного изменения отметки дна реального русла (см. [7, ш. 4, 5]).

3. О сохранении монотонности функции $v(h)$ при переходе через ступеньку дна. Рассмотрим однопараметрическое семейство устойчивых разрывных течений с глубинами и скоростями $h, v(h)$ на ступеньке и $H(h), V(h)$ перед ней и выясним, при каких условиях из монотонности функции $v(h)$ следует монотонность функций $H(h)$ и $V(h)$, влекущая за собой монотонность функции $\tilde{V}(H) = V(h(H))$ ($h(H)$ — функция, обратная к $H(h)$).

Теорема 1. *Если функция $v(h)$, удовлетворяющая условиям $v > 0$ и $v_h > 0$, принимает значения в области докритических и критических течений $v \leq \sqrt{h}$ (в области сверхкритических течений $v > \sqrt{h}$), то соответствующие ей функции $H(h)$ и $V(h)$ удовлетворяют неравенствам*

$$H_h > 0, \quad V > 0, \quad V_h > 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{V}_H > 0,$$

а функция $V = \tilde{V}(H)$ принимает значения в области докритических течений $V < \sqrt{H}$ (в области сверхкритических течений $V > \sqrt{H}$).

Доказательство теоремы начнем с доказательства неравенства $H_h > 0$. Из условий Гюгонио (2.7) следует соотношение

$$J(H, q) = J(h, q) + \delta, \quad (3.1)$$

в котором

$$J(H, q) = q^2/(2H^2) + H, \quad J(h, q) = q^2/(2h^2) + h, \quad q = hv = HV.$$

Поскольку полный дифференциал уравнения (3.1) можно записать в виде

$$\alpha_1 dH = \alpha_0 dh + (v/h - V/H) dq,$$

где

$$\alpha_0 = J_h(h, q) = 1 - v^2/h, \quad \alpha_1 = J_H(H, q) = 1 - V^2/H, \quad (3.2)$$

то, учитывая, что течение слева от разрыва (1.3) не может быть критическим [7] и поэтому $\alpha_1 \neq 0$, получим

$$H_h = \frac{1}{\alpha_1} \left(\alpha_0 + \left(\frac{v}{h} - \frac{V}{H} \right) q_h \right) = \frac{1}{\alpha_1} \left(\alpha_0 + \frac{q(H^2 - h^2)}{h^2 H^2} q_h \right), \quad (3.3)$$

где

$$q_h = (hv)_h = v + hv_h. \quad (3.4)$$

По условию теоремы $v > 0$, $v_h > 0$, поэтому с учетом (3.4) $q > 0$, $q_h > 0$. Следовательно, для допустимых конфигураций течения на ступеньке, полученных в [7], для первой из которых

$$H > h + \delta, \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_0 \geq 0, \quad (3.5)$$

а для второй

$$H < h, \quad \alpha_1 < 0, \quad \alpha_0 \leq 0, \quad (3.6)$$

из (3.3) имеем $H_h > 0$.

Для определения знака производной V_h запишем ее в виде

$$V_h = (q/H)_h = (Hq_h - qH_h)/H^2.$$

Отсюда с учетом (3.3), а затем (3.2) и (3.4) найдем

$$\begin{aligned} V_h &= ((\alpha_1 H + V^2 - v^2)q_h - \alpha_0 q)/(\alpha_1 H^2) = \\ &= ((H - v^2)q_h - \alpha_0 q)/(\alpha_1 H^2) = ((H - h)q_h + \alpha_0 h^2 v_h)/(\alpha_1 H^2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Так как $v_h > 0$ и $q_h > 0$, то из формулы (3.7) следует, что $V_h > 0$ как при условиях (3.5), когда значения функции $\tilde{V}(H)$ принадлежат области докритических течений, так и при условиях (3.6), когда значения функции $\tilde{V}(H)$ принадлежат области сверхкритических течений. Теорема доказана.

Поскольку, как показано в [7], каждая ударная s -адиабата

$$v_s(h, h_0, 0) = a(h, h_0) = \sqrt{(h + h_0)/(2hh_0)}(h - h_0), \quad (3.8)$$

выходящая из точки h_0 на оси h (рис. 1), пересекает кривую критических течений $v = \sqrt{h}$ в единственной точке $A_2 = (x^* h_0, \sqrt{x^* h_0})$, где

$$x^* = 1 + \frac{4}{\sqrt{3}} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \approx 3,214 \text{ —} \quad (3.9)$$

максимальный корень кубического уравнения $x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0$, то в силу теоремы 1 докритическая часть $A_1 A_2$ этой адиабаты при переходе через ступеньку переводится в монотонную кривую, показанную на рис. 1 линией $B_1 B_2$, лежащей в области докритических

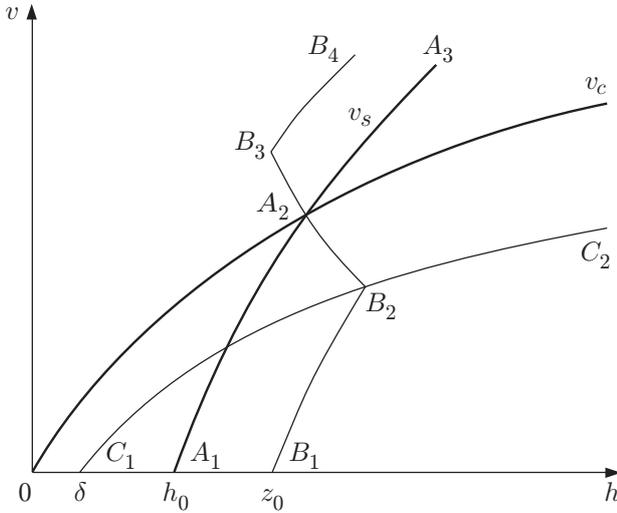


Рис. 1

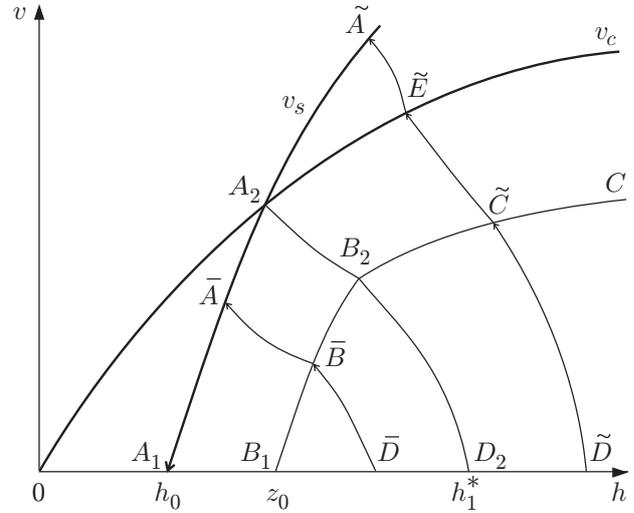


Рис. 2

течений, а ее сверхкритическая часть A_2A_3 переводится в монотонную кривую, изображенную на рис. 1 линией B_3B_4 , лежащей в области сверхкритических течений. При этом переходе $A_1A_2 \rightarrow B_1B_2$ соответствует конфигурация (3.5), а переходу $A_2A_3 \rightarrow B_3B_4$ — конфигурация (3.6). Сама линия критических течений $v = v_c(h) = \sqrt{h}$ переводится в монотонную кривую, показанную на рис. 1 линией $C_1B_2C_2$, расположенной в области докритических течений.

4. Разрешимость задачи о распаде разрыва (1.1)–(1.4). Однозначная разрешимость задачи о распаде разрыва (1.1)–(1.4) при условиях (2.7) на ступеньке дна следует из монотонного убывания волновой r -адиабаты

$$v_r(h, h_1, 0) = -a(h, h_1) = 2(\sqrt{h_1} - \sqrt{h}), \quad (4.1)$$

выходящей из точки $h_1 > z_0 = h_0 + \delta$ на оси h (рис. 2), и монотонного возрастания кусочно-гладкой линии B_1B_2C , участок B_1B_2 которой является образом докритической части A_1A_2 ударной s -адиабаты (3.8), а участок B_2C — образом части линии критических течений $v = \sqrt{h}$, расположенной правее точки A_2 , т. е. при $h > h_0^* = x^*h_0$.

Обозначим через h_1^* точку на оси h , из которой выходит волновая r -адиабата (4.1), приходящая в точку B_2 излома линии B_1B_2C . Тогда при $h_1 \in (z_0, h_1^*]$ r -адиабата (4.1) пересекает эту линию на участке B_1B_2 , что приводит к формированию картины течения, показанной на рис. 5,а в [7], волне понижения R на котором соответствует участок $\bar{D}\bar{B}$ волновой r -адиабаты (4.1), разрыву L на ступеньке — ударный переход $\bar{B}\bar{A}$ по гиперболе $v = \bar{q}/h$ и прерывной волне S — участок $\bar{A}A_1$ ударной s -адиабаты (3.8). При $h_1 > h_1^*$ r -адиабата (4.1) пересекает линию B_1B_2C на участке B_2C , что приводит к формированию картины течения, показанной на рис. 5,б в [7], на котором волне понижения R , расположенной слева от ступеньки, соответствует участок $\tilde{D}\tilde{C}$ волновой r -адиабаты (4.1), разрыву L — ударный переход $\tilde{C}\tilde{E}$, волне понижения R_1 , расположенной справа от ступеньки, — участок $\tilde{E}\tilde{A}$ волновой r -адиабаты (2.2), выходящей из точки \tilde{E} , и прерывной волне S — участок $\tilde{A}A_1$ ударной s -адиабаты (3.8). При этом течение справа от ступеньки получается в результате решения классической задачи о распаде разрыва с начальными данными, лежащими в точках A_1 и \tilde{E} на рис. 2.

Точка h_1^* , разделяющая два указанных типа течения, определяется следующим образом. Сначала по формулам

$$h_2 = x^* h_0, \quad v_2 = \sqrt{h_2} = \sqrt{x^* h_0}, \quad (4.2)$$

где x^* задается соотношением (3.9), находятся координаты точки A_2 , в которой пересекаются ударная s -адиабата (3.8) и линия критических течений $v = \sqrt{h}$. Затем по формулам

$$h_3 = a \left(1 + 2 \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \frac{a^3 - q^2/4}{a^3} \right) \right), \quad v_3 = \frac{q}{h_3}, \quad (4.3)$$

где

$$a = (v_2^2 + 2z_2)/6, \quad q = h_2 v_2, \quad z_2 = h_2 + \delta \quad (4.4)$$

(эти формулы получены в [7]), определяются координаты точки B_2 , в которую отражается точка A_2 при переходе через ступеньку. Наконец, по следующей из (4.1) формуле

$$h_1^* = (\sqrt{h_3} + v_3/2)^2 \quad (4.5)$$

вычисляется координата точки D_2 , из которой выходит волновая r -адиабата (4.1), проходящая через точку B_2 .

5. Метод адиабат в переменных расхода q и константы Бернулли Q . Аналогично уравнениям газовой динамики [11], для которых метод адиабат применяется в переменных давления p и скорости v , являющихся непрерывными на контактном разрыве, при решении обобщенной задачи о распаде разрыва (1.2)–(1.4) для уравнений мелкой воды (1.1) метод адиабат удобно применять в переменных расхода q и константы Бернулли $Q = v^2/2 + z$, остающихся непрерывными на разрыве над ступенькой (1.3). При решении задачи о распаде граничного разрыва над ровным дном аналогичный подход использован в [8]. Для применения такого подхода к решению задачи (1.1)–(1.4) необходимо показать, что ударная s -адиабата (3.8) и волновая r -адиабата (4.1) сохраняют свойства монотонности при записи в виде функций

$$q = q_s(Q, z_0), \quad q = q_r(Q, z_1), \quad (5.1)$$

где z_0, z_1 — начальные уровни, входящие в формулу (1.2).

Теорема 2. *Каждая положительная монотонно возрастающая функция $v(h)$, выходящая из точки $h_0 \geq 0$ на оси h , допускает запись в виде функции $q = \tilde{q}(Q)$, являющейся строго монотонно возрастающей при $Q > z_0 = h_0 + \delta$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функция $v(h)$ удовлетворяет условиям

$$v > 0, \quad v_h > 0 \quad \forall h > h_0 \geq 0, \quad v(h_0) = 0,$$

то соответствующие ей функции

$$q(h) = hv(h), \quad Q(h) = v^2(h)/2 + h + \delta$$

удовлетворяют условиям

$$q > 0, \quad q_h > 0, \quad Q_h > 0 \quad \forall h > h_0.$$

Это означает, что при $Q \geq z_0 = h_0 + \delta > 0$ определена функция $h(Q)$, обратная к $Q(h)$, и, следовательно, определена функция $\tilde{q}(Q) = q(h(Q))$ такая, что

$$\tilde{q} > 0, \quad \tilde{q}_Q = q_h/Q_h = (v + hv_h)/(1 + vv_h) > 0 \quad \forall Q > z_0, \quad \tilde{q}(z_0) = 0.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует, что ударная s -адиабата (3.8) и линия критических течений $v = \sqrt{h}$ изображаются на плоскости переменных (Q, q) в виде графиков строго монотонно возрастающих функций $q = q_s(Q)$ и $q = q_c(Q)$, которые приведены на рис. 3.

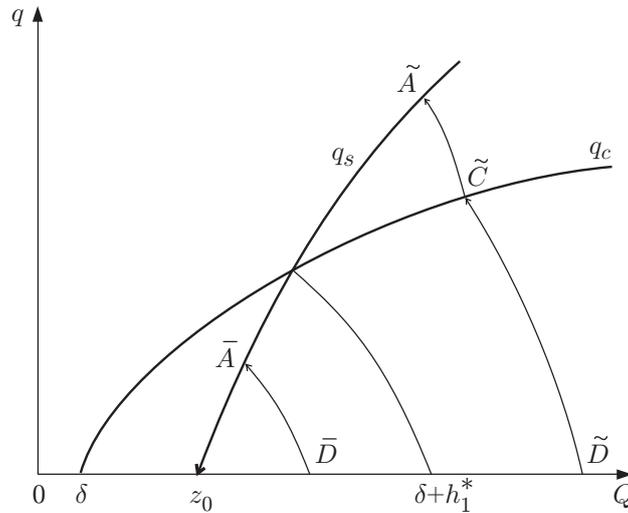


Рис. 3

В отличие от монотонно возрастающих монотонно убывающие функции $v(h)$ в общем случае теряют свойство монотонности при записи в переменных Q, q . Например, монотонно убывающая линейная функция $v = 1 - h$, записанная в виде

$$q = h(1 - h), \quad h = \sqrt{2(Q - \delta) - 1},$$

становится монотонно возрастающей при $h \in (0, 1/2) \Leftrightarrow Q \in (\delta + 1/2, \delta + 5/8)$ и остается монотонно убывающей при $h \in (1/2, 1) \Leftrightarrow Q \in (\delta + 5/8, \delta + 1)$. Несмотря на это, для волновой r -адиабаты (4.1) имеет место формула

$$\tilde{q}_Q = \frac{q_h}{Q_h} = \frac{1 + v_r(v_r)_h}{v_r + h(v_r)_h} = \frac{1 - 2(\sqrt{h_1} - \sqrt{h})/\sqrt{h}}{2(\sqrt{h_1} - \sqrt{h}) - h/\sqrt{h}} = -\frac{1}{\sqrt{h}} < 0,$$

в силу которой она остается монотонно убывающей при записи в переменных Q, q .

Из монотонности адиабат (5.1) следует, что однозначная разрешимость задачи о распаде разрыва (1.1)–(1.4) может быть показана в переменных Q, q . В зависимости от того, пересекаются адиабаты (5.1) в докритической или сверхкритической области (точки \bar{A} и \tilde{A} на рис. 3), формирующееся течение имеет вид, показанный на рис. 5,а или на рис. 5,б в работе [7]. В точках \bar{A} и \tilde{C} на рис. 3 сосредоточены ударные переходы над ступенькой, показанные линиями $\bar{B}\bar{A}$ и $\tilde{C}\tilde{E}$ на рис. 2.

6. Задача о распаде разрыва (1.1)–(1.4) при условии потери энергии на ступеньке дна. Как отмечалось в работе [7], рассмотренная выше модель мелкой воды с условиями (2.7) на разрыве (1.3), из которых следует сохранение полной энергии потока на ступеньке, в общем случае описывает реальные течения, для которых разрыв (1.3) в модели представляет собой переходную зону достаточно быстрого, но гладкого и монотонного изменения отметки дна реального русла. В то же время представляет интерес изучение возможностей описания в рамках модели мелкой воды течений над разрывом отметки дна реального русла, когда полная энергия потока на ступеньке (1.3) не сохраняется. В этом случае на разрыве (1.3) выполнен лишь закон сохранения массы $[q] = 0$ и для замыкания условий на таком разрыве недостаточно двух приходящих на него характеристик; необходимо либо задание еще одного скалярного соотношения, либо наличие третьей приходящей характеристики.

Предположим сначала, что на разрыв (1.3), на котором $[Q] \neq 0$, приходят две характеристики, тогда на нем необходимо задать еще одно скалярное соотношение. В аналогичной

ситуации при изучении газодинамических течений в трубе с разрывом площади поперечного сечения [9, 10] в качестве дополнительного соотношения на скачке сечения использовалось недивергентное уравнение полного импульса, в котором исходя из различных физических соображений (выходящих за рамки чисто одномерной модели) учитывалась реакция стенки, соединяющей трубопроводы различных диаметров.

Применим другой подход, при котором в качестве второго соотношения на ступеньке используется модифицированное уравнение баланса энергии (3.1)

$$\sigma J(H, q) = J(h, q) + \delta, \quad (6.1)$$

в левую часть которого введен эвристический параметр $\sigma \in (0, 1]$, представляющий собой часть полной энергии потока, сохраняющуюся при переходе через разрыв (1.3). Преимущество такого подхода заключается в том, что он представляет собой непосредственное обобщение рассмотренного выше случая с сохранением полной энергии на ступеньке. Конкретное значение параметра σ должно выбираться в результате изучения тонкой структуры течения в окрестности реальной ступеньки, что невозможно в рамках модели мелкой воды. Поэтому будем предполагать, что параметр σ , входящий в условие (6.1), заранее известен, и с учетом этого проанализируем разрешимость обобщенной задачи о распаде разрыва (1.1)–(1.4).

Поскольку из (6.1) следует

$$q^2 = 2h^2 H^2 (\sigma H - h - \delta) / (H^2 - \sigma h^2),$$

на разрыве (1.3) возможны лишь такие течения, для которых

$$(\sigma H - h - \delta)(H - \sqrt{\sigma}h) > 0.$$

Это неравенство выделяет две допустимые конфигурации потока над ступенькой, для первой из которых

$$H > (h + \delta)/\sigma, \quad V^2 < H, \quad (6.2)$$

для второй

$$H < \sqrt{\sigma}h, \quad V^2 > H. \quad (6.3)$$

Здесь $V^2 = 2h^2(\sigma H - h - \delta)/(H^2 - \sigma h^2)$ — квадрат скорости потока перед ступенькой.

Так же как в работе [7], можно показать, что в рамках устойчивых разрывных течений, для которых две характеристики приходят на разрыв (1.3), уравнение (6.1) однозначно разрешимо относительно H при $h > 0$ и относительно h при H , удовлетворяющих неравенству $J(H, q) = q^2/(2H^2) + H > \delta/\sigma$. При этом, если $q > 0$, то течение на ступеньке в случае условий (6.2) является докритическим или критическим ($v^2 \leq h$), а в случае условий (6.3) — сверхкритическим ($v^2 > h$). С учетом этого для устойчивых течений над ступенькой дна верна теорема 1. Для доказательства этой теоремы при $\sigma < 1$ достаточно заметить, что в случае энергетического соотношения (6.1) формулы (3.3) и (3.7) примут вид

$$H_h = \frac{1}{\sigma\alpha_1} \left(\alpha_0 + \frac{q(H^2 - \sigma h^2)}{h^2 H^2} q_h \right), \quad V_h = \frac{(\sigma H - h)q_h + \alpha_0 h^2 v_h}{\sigma\alpha_1 H^2},$$

в силу чего положительность производных H_h и V_h (как и при $\sigma = 1$) непосредственно следует из того, что при условии (6.2) имеют место неравенства $\alpha_1 > 0$, $\alpha_0 \geq 0$, а при условии (6.3) — обратные неравенства $\alpha_1 < 0$, $\alpha_0 \leq 0$. Отсюда следует, что докритическая часть $A_1 A_2$ ударной s -адиабаты (3.8) и часть линии критических течений $v = \sqrt{h}$, которая расположена правее точки A_2 (см. рис. 1, 4), переводятся соотношением (6.1), где $\sigma < 1$,

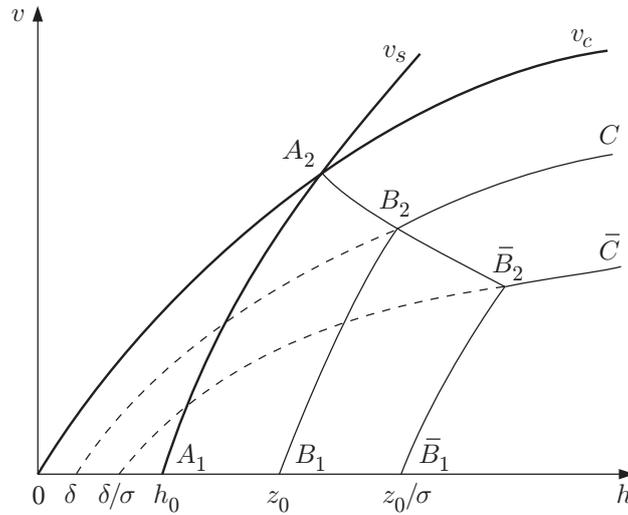


Рис. 4

в монотонно возрастающие кривые, показанные на рис. 4 соответственно кривой $\bar{B}_1\bar{B}_2$, лежащей правее линии B_1B_2 , и кривой $\bar{B}_2\bar{C}$, расположенной ниже линии B_2C .

При выполнении неравенства

$$h_1 > (h_0 + \delta)/\sigma \iff z_1 > z_0/\sigma \tag{6.4}$$

однозначная разрешимость задачи о распаде разрыва (1.1)–(1.4) с условием (6.1) на ступеньке дна следует из монотонного возрастания кусочно-гладкой линии $\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{C}$ на рис. 4 и монотонного убывания волновой r -адиабаты (4.1). Если

$$h_0 + \delta < h_1 \leq (h_0 + \delta)/\sigma \iff z_0 < z_1 \leq z_0/\sigma, \tag{6.5}$$

то эта задача решения не имеет.

Для получения соответствующей условию (6.4) диаграммы адиабат необходимо на рис. 2 линию B_1B_2C , получаемую при $\sigma = 1$, заменить на линию $\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{C}$ (см. рис. 4), получаемую при $\sigma < 1$. Отсюда следует, что, так же как при $\sigma = 1$, при $\sigma < 1$ задача о распаде разрыва (1.1)–(1.4) допускает два типа решений (см. рис. 5, а, б в [7]). Координата $h_1^*(\sigma)$ точки D_2 на рис. 2, разделяющей эти два типа течений, вычисляется по формулам (4.2)–(4.5), в которых при $\sigma < 1$ параметр a , входящий в (4.3), необходимо взять в виде $a = (v_2^2 + 2z_2)/(6\sigma^2)$; при этом функция $h_1^*(\sigma)$ является монотонно убывающей и

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} h_1^*(\sigma) = +\infty.$$

7. Устойчивые течения в случае трех характеристик, приходящих на линию разрыва над ступенькой дна. Если на линию разрыва, возникающую над ступенькой, приходят три характеристики, то условия непрерывности расхода $[q] = 0$ достаточно для замыкания условий на таком разрыве; причем из этих условий однозначно определяется та часть полной энергии потока, которая теряется при переходе через ступеньку. Отметим, что аналогичная ситуация имеет место при решении задачи о распаде граничного разрыва над ровным дном [8].

Для того чтобы при $q > 0$ три характеристики приходили на разрыв (1.3), необходимо, чтобы течение (H, V) перед ступенькой было сверхкритическим или критическим ($V \geq \sqrt{H}$), а течение (h, v) на ней — докритическим или критическим ($v \leq \sqrt{h}$). Соответствующие этим случаям поля характеристик показаны на рис. 5. В решении задачи о распаде разрыва (1.1)–(1.4) слева от ступеньки дна распространяется r -волна понижения (обозначенная на рис. 6 буквой R), справа от которой течение может быть докритическим или

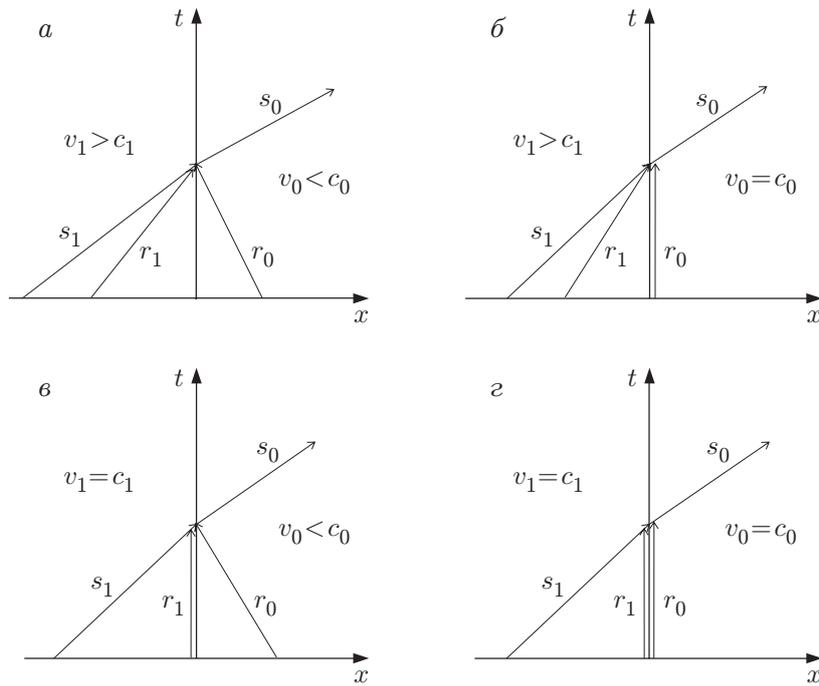


Рис. 5

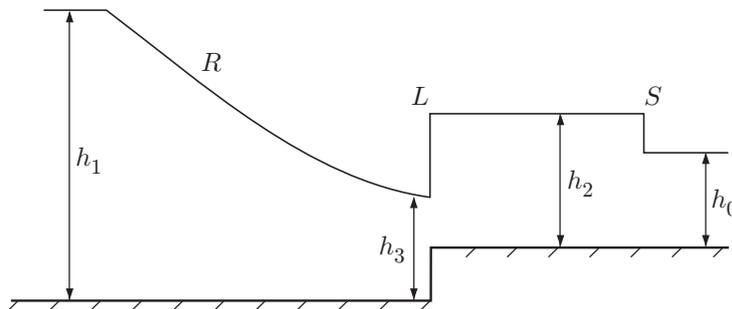


Рис. 6

критическим, причем критическое течение за волной R образуется, лишь когда ее правая граница примыкает к разрыву L над ступенькой, образуя с ним единую LR -прыжок-волну. Таким образом, в рассматриваемом случае течение перед ступенькой является критическим. Поскольку его параметры h_3, v_3 однозначно определяются как координаты точки F на рис. 7, в которой пересекаются линия критических течений $v = v_c(h) = \sqrt{h}$ и волновая r -адиабата (4.1), для их вычисления можно использовать следующие формулы:

$$h_3 = (4/9)h_1, \quad v_3 = \sqrt{h_3} = (2/3)\sqrt{h_1}.$$

Так как течение на ступеньке не может быть сверхкритическим, то его параметры h_2, v_2 принадлежат той части гиперболы

$$v = q_3/h, \quad q_3 = h_3 v_3, \quad (7.1)$$

которая выходит из точки F на рис. 7 в область докритических течений; причем для энергетической устойчивости разрыва L , связанной с потерей на нем полной энергии, точка, соответствующая этим параметрам, должна лежать на гиперболе (7.1) правее точки B_1 , в которой она пересекает кривую $C_1 C_2$, являющуюся образом линии критических течений $v_c(h)$ при переходе через разрыв L с условием сохранения полной энергии $[Q] = 0$.

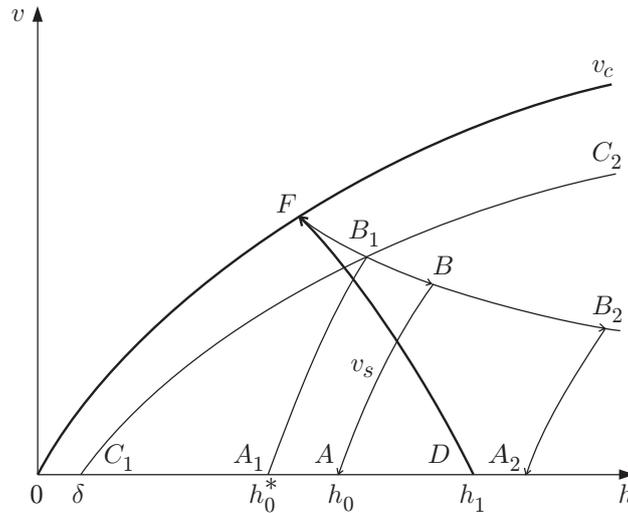


Рис. 7

Это означает, что течение (h_2, v_2) является докритическим, и, следовательно, в рассматриваемом случае устойчивым течениям на ступеньке соответствует поле характеристик, показанное на рис. 5, в. При этом координаты (h^*, v^*) точки B_1 определяются по формулам

$$h^* = a \left(1 + 2 \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \frac{a^3 - q^2/4}{a^3} \right) \right), \quad v^* = \frac{q}{h^*},$$

где $a = (v_3^2 + 2(h_3 + \delta))/6$; $q = h_3 v_3$.

Поскольку течение h_2, v_2 докритическое, справа от ступеньки может распространяться только прерывная s -волна, обозначенная буквой S на рис. 6. Параметры h_2, v_2 постоянного течения между разрывом L и прерывной волной S однозначно определяются как координаты точки B на рис. 7, в которой пересекаются гипербола (7.1) и ударная s -адиабата (3.8), выходящая из точки A на оси h . При этом координата h_0 точки A должна удовлетворять условию

$$h_0 \in (h_0^*, h_1 - \delta), \tag{7.2}$$

где $h_0^* = x^* h^*$ — координата точки A_1 , из которой выходит ударная s -адиабата $v_s(h, h_0^*, 0)$, проходящая через точку B_1 на рис. 7. Значение $x^* \in (0, 1)$ является корнем кубического уравнения

$$x^3 - x^2 - (2f^2 + 1)x + 1 = 0$$

и вычисляется по формуле Кардано

$$x^* = \frac{1}{3} \left(2p \cos \left(\frac{1}{3} \left(2\pi - \arccos \frac{9f^2 - 8}{p^3} \right) \right) + 1 \right),$$

где $p = \sqrt{6f^2 + 4}$; $f = v^*/\sqrt{h^*}$. Условие (7.2) накладывает ограничение на начальные глубины h_0, h_1 и высоту ступеньки δ , при которых задача (1.1)–(1.4) допускает устойчивые решения, показанные на рис. 6.

Заключение. В работе показана однозначная разрешимость обобщенной задачи о распаде разрыва (1.1)–(1.4) в предположении, что полная энергия потока на ступеньке дна сохраняется. Для экспериментальной проверки получаемых в этом случае автономных решений сотрудниками лаборатории экспериментальной прикладной гидродинамики Института гидродинамики СО РАН В. И. Букреевым и А. В. Гусевым проведена

серия опытов, в которых ступенька (1.3) моделировалась участком монотонного прямолинейного повышения отметки дна, а начальный разрыв уровней (1.2) создавался щитом, расположенным перед этим повышением. Эта проверка показала достаточно хорошее соответствие теоретических и экспериментальных данных по скорости распространения прерывной s -волны и асимптотической глубине за ее фронтом. Данные экспериментальные результаты будут опубликованы в другой работе.

В работе построены два класса решений задачи (1.1)–(1.4), для которых полная энергия потока при натекании на ступеньку теряется. Для первого класса (см. п. 6), когда на разрыв L над ступенькой приходят две характеристики, для замыкания модели требуется введение эвристического параметра σ , задающего часть полной энергии потока, которая сохраняется при переходе через ступеньку. Получаемые при этом решения качественно подобны решениям, имеющим место при сохранении полной энергии на разрыве (1.3), в частности при натекании на ступеньку уровень воды в них всегда падает (см. рис. 5 в [7]).

В отличие от решений первого класса решения второго класса (см. п. 7), для которых на линию разрыва L приходят три характеристики, однозначно определяются в рамках модели мелкой воды без использования каких-либо эвристических параметров. Эти решения качественно отличаются от решений с сохранением полной энергии на разрыве (1.3), поскольку в них при натекании на ступеньку уровень жидкости всегда повышается (см. рис. 6). Формально оба класса решений могут существовать при одних и тех же начальных данных (1.2)–(1.4), поэтому для их разделения в лабораторных экспериментах необходимо изучение тонкой структуры течения в окрестности реальной ступеньки при моделировании процесса разрушения плотины путем быстрого поднятия перегородки, разделяющей жидкости различного уровня.

Можно предположить, что если перегородка является достаточно тонкой, то при ее поднятии будут формироваться течения первого класса. Если перегородка имеет конечную ширину по оси x и, примыкая к ступеньке, полностью расположена в области $x < 0$, то при ее быстром поднятии могут возникать течения второго класса. Для этого необходимо, чтобы скорость жидкости на правой границе волны понижения, распространяющейся по фону z_1 при заполнении возникающей слева от ступеньки воронки, достигла критического значения.

Следует отметить, что формально устойчивые решения второго класса могут существовать не только при $z_1 > z_0$, но и при $z_1 < z_0$ и даже при $h_1 < h_0$. На рис. 7 графики адиабат одного из таких течений показаны линиями DF и B_2A_2 . В случае реализации таких в определенном смысле парадоксальных течений жидкость при распаде разрыва (1.2)–(1.4) будет распространяться в направлении не меньшего, а большего начального уровня. Для проверки возможности существования таких течений необходимо проведение соответствующих лабораторных экспериментов.

Автор выражает благодарность А. А. Атавину, В. И. Букрееву, А. В. Гусеву, В. Ю. Ляпидевскому и В. М. Тешукову за полезные замечания, высказанные при обсуждении данной работы. Автор также признателен В. Ю. Ляпидевскому за предложенную им идею применения обобщенного метода адиабат в переменных расхода q и константы Бернулли Q .

ЛИТЕРАТУРА

1. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
2. Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.

3. Букреев В. И., Гусев А. В. Волны за ступенькой в открытом канале // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 1. С. 62–70.
4. Dressler R. F. Comparison of theories and experiments for the hydraulic dam-break wave // Intern. Assoc. Sci. Hydrology. 1954. V. 3, N 38. P. 319–328.
5. Alcrudo F., Benkhaldon F. Exact solutions to the Riemann problem of the shallow water equations with bottom step // Comput. Fluids. 2001. V. 30. P. 643–671.
6. Атавин А. А., Васильев О. Ф. Оценка возможных последствий аварий на судоходном шлюзе, связанных с разрушением затворов его камер // Тез. докл. Междунар. симп. “Гидравлические и гидрологические аспекты надежности и безопасности гидротехнических сооружений”, Санкт-Петербург, 28 мая — 1 июня 2002 г. СПб.: Всерос. науч.-исслед. ин-т гидротехники, 2002. С. 121.
7. Остапенко В. В. О разрывных решениях уравнений “мелкой воды” над уступом дна // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 6. С. 62–74.
8. Атавин А. А., Гладышев М. Т., Шугрин С. М. О разрывных течениях в открытых руслах // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1975. Вып. 22. С. 37–64.
9. Дулов В. Г. Распад произвольного разрыва параметров газа на скачке площади сечения // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. математики, механики и астрономии. 1958. № 19, вып. 4. С. 76–99.
10. Яушев И. К. Распад произвольного разрыва в канале со скачком площади сечения // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1967. № 8, вып. 2. С. 109–120.
11. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
12. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.

Поступила в редакцию 15/XII 2002 г.
