

## СТАЦИОНАРНО ДВИЖУЩАЯСЯ ТРЕЩИНА ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА С БЕСКОНЕЧНО УЗКОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНОЙ

*П. А. Мартынюк, Е. Н. Шер*

*(Новосибирск)*

В работе рассматривается простая модель продольного сдвига с пластической зоной в носике трещины. Зона пластичности предполагается узкой, на границе ее требуется выполнение условия Мизеса. Трещина движется с постоянной скоростью без изменения длины.

При распространении трещины в предварительно деформированном упругом теле часть упругой энергии тела необратимо превращается в тепловую энергию, выделяющуюся в зоне пластичности у носика трещины и, возможно, идет на какие-то другие энергетические затраты, сопровождающие разрушение. Если разрушение происходит квазихрупко, т. е. материал всюду, кроме малой окрестности носика трещины ведет себя упруго, то можно представить себе, что носик трещины является как бы стоком упругой энергии, интенсивность которого определяется скоростью трещины и коэффициентами особенности поля напряжений согласно известному [1,2] закону для упругого тела с движущимся разрезом.

В соответствии с этим законом количество энергии на единицу площади трещины, уходящей необратимо из упругого тела в окрестность носика трещины, увеличивается с увеличением скорости трещины и коэффициентов особенности поля напряжений.

Эксперименты с фотоупругими материалами [3,4] показали, что если подвергнуть, например, прямоугольную пластину, содержащую какую-то начальную трещину, растяжению с возрастающей силой, то при некотором критическом напряжении трещина начинает двигаться с увеличивающейся скоростью и проскакивает через весь образец. При этом коэффициент особенности напряжений оказывается функцией, монотонно растущей с длиной трещины.

Из сказанного следует, что монотонно растет и количество энергии на образование единицы площади трещины, причем удельный расход энергии может увеличиваться в 2—3 раза. Модель с постоянной поверхностной энергией является здесь неудовлетворительной. В данной работе рассматривается простая модель продольного сдвига с пластической зоной в носике трещины, которая движется стационарно. Зона пластичности предполагается узкой, на ее границе требуется выполнение условия Мизеса. Постановка и решение такой задачи в статическом случае дано в [5]. Трещина движется также, как принято в работе [6], с постоянной скоростью  $v$ , без изменения длины.

Рассмотрим движение такой трещины длиной  $2x_0$  в безграничном упругом теле, подвергнутом на бесконечности действию напряжения  $\tau_{yz} = \tau_\infty$ . Единственное отличное от нуля смещение — смещение вдоль оси  $z$  — удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1)$$

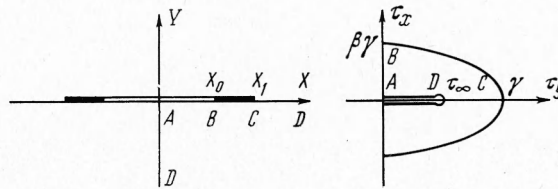
Здесь  $c$  — скорость поперечных волн. Компоненты тензора напряжения равняются нулю, кроме  $\tau_{yz}$  и  $\tau_{xz}$ , которые определяются соотношениями

$$\tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2)$$

где  $\mu$  — модуль сдвига.

Пусть трещина движется вдоль прямой  $y = 0$ . Сделаем замену переменных

$$X = x - vt, \quad Y = \beta y, \quad \beta = (1 - v^2 / c^2)^{1/2}$$



Фиг. 1

Тогда уравнения (1), (2) примут вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} = 0$$

$$\tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial Y} \beta, \quad \tau_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial X}$$

Можно показать, что комплексная функция напряжения

$$\tau = \tau_y + i\tau_x \quad (\tau_y = \tau_{yz}, \quad \tau_x = \beta\tau_{xz})$$

является аналитической функцией комплексной переменной  $\zeta = X + iY$ . В силу симметрии можно ограничиться рассмотрением области  $\text{Re } \zeta > 0$ . Так же как в работах [7-9], предположим, что пластические зоны являются бесконечно узкими и представляют собой отрезки оси  $X$ , так что  $X_0 < X < X_1, Y = 0$ . Кроме этого полагаем, что на границе пластических зон выполняется условие пластичности Мизеса

$$\sqrt{\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2} = \gamma \quad (3)$$

Здесь  $\gamma$  — предел текучести, следовательно, во всей упругой области должно выполняться условие  $(\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)^{1/2} < \gamma$ . Область изменения  $\tau$ , соответствующая области  $\text{Re } \zeta > 0$ , представляет собой внутренность половины эллипса с полуосями  $\gamma$  и  $\beta\gamma$  и разрезом вдоль действительной оси от 0 до  $\tau = \tau_\infty$  (фиг. 1).

Первый квадрат эллипса  $\text{Re } \tau > 0, \text{Im } \tau > 0$  соответствует области  $\zeta$

$$\text{Re } \zeta > 0, \quad \text{Im } \zeta < 0$$

Введем в рассмотрение функцию  $\zeta = \zeta(\tau)$ , для нее имеем следующую краевую задачу:

$$\text{Im } \zeta = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} \text{Re } \tau = 0, & 0 < \text{Im } \tau \leq \beta\gamma \\ \sqrt{\tau_y^2 + \tau_x^2} / \beta = \gamma, & 0 < \arg \tau < \pi / 2 \\ \text{Im } \tau = 0, & \tau_\infty < \text{Re } \tau < \gamma \end{cases}$$

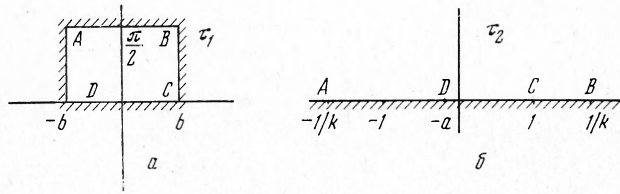
$$\text{Re } \zeta = 0 \quad \text{при} \quad \text{Im } \tau = 0, \quad 0 \leq \text{Re } \tau < \tau_\infty \quad (4)$$

Функция

$$\tau_1 = \ln \frac{\tau/\gamma + (\tau^2/\gamma^2 - v^2/c^2)^{1/2}}{v/c} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{1/2}$$

осуществляет конформное отображение внутренности верхней четверти эллипса на внутренность прямоугольника с вершинами в точках  $(-b, 0)$ ,  $(+b, 0)$ , где  $b = \frac{1}{2} \ln [(1 + \beta) / (1 - \beta)]^{1/2}$ , и высотой  $\pi / 2$  (фиг. 2, а).  
 Функция

$$\tau_1 = C \int_0^{\tau_2} \frac{d\tau_2}{V(1 - \tau_2^2)(1 - k^2\tau_2^2)} \quad (5)$$



Фиг. 2

дает конформное отображение верхней полуплоскости  $\text{Im } \tau_2 > 0$  на внутренность прямоугольника в области  $\tau_1$ , при этом  $\tau_2 = \pm 1$  переходят в  $\tau_1 = \pm b$ , а точки  $\tau_2 = \pm k^{-1}$  переходят соответственно в  $\tau_1 = \pm b + i\pi/2$  (фиг. 2, б). Функция, обратная (5)

$$\tau_2 = \text{sn}(\tau_1 C^{-1}, k) \quad (6)$$

дает конформное отображение внутренности прямоугольника в области  $\tau_1$  на верхнюю полуплоскость области  $\tau_2$ .

Параметры  $C$  и  $k$  в (5) определяются из уравнений [10]

$$b = \frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = C \int_0^1 \frac{d\tau_2}{V(1 - \tau_2^2)(1 - k^2\tau_2^2)} = CK(k^2)$$

$$\frac{\pi}{2} = C \int_1^{1/k} \frac{d\tau_2}{V(\tau_2^2 - 1)(1 - k^2\tau_2^2)} = CK(k^2) \quad (7)$$

Из совместного решения этих уравнений при заданной скорости  $v/c$  находятся  $C$  и  $k$ , и тем самым отображение полностью определяется.

При отображении (6) точка  $\tau = 0$  переходит в  $\tau_2 = -1/k$ , а  $\tau = \tau_\infty$  в  $\tau_2 = a$ , которая расположена в интервале от  $-1/k$  до  $+1$  при изменении  $\tau_\infty$  от 0 до  $\gamma$ . Задача (4) для функции  $\zeta = \zeta(\tau)$  в области  $\tau_2$  приводится к смешанной краевой задаче Келдыша — Седова (фиг. 2, б)

$$\begin{aligned} \text{Im } \zeta = 0 & \text{ при } \begin{cases} -\infty < \text{Re } \tau_2 < -1/k, \\ a < \text{Re } \tau_2 < +\infty, \end{cases} & \text{Im } \tau_2 = 0 \\ \text{Re } \zeta = 0 & \text{ при } -1/k < \text{Re } \tau_2 < a, & \text{Im } \tau_2 = 0 \end{aligned}$$

Общее решение этой задачи

$$\zeta = d \sqrt{\frac{\tau_2 + 1/k}{\tau_2 \pm a}}$$

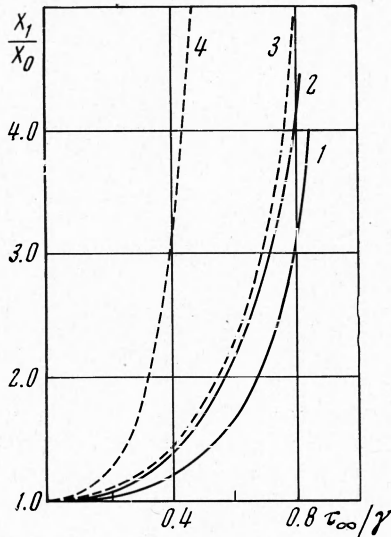
Верхний знак берется в случае, когда  $-1/k < a < 0$ , а нижний, когда  $0 < a < 1$ . Постоянная  $d$  определяется из условия, что  $\zeta = X_0$  при

$\tau = i\beta\gamma$  или в плоскости  $\tau_2$  ей соответствует  $\tau_2 = 1/k$ . Отсюда

$$\xi = X_0 \sqrt{\frac{1 \pm ak}{2}} \sqrt{\frac{\tau_2 + 1/k}{\tau_2 + a}} \quad (8)$$

Величина  $X_1$ , определяющая положение конца пластической зоны, находится из условия  $\xi = X_1$  при  $\tau = \gamma$  (или в области  $\tau_2$  при  $\tau_2 = 1$ ), и окончательно можно записать

$$\frac{X_1}{X_0} = \sqrt{\frac{(1 \pm ak)(1+k)}{2k(1 \pm a)}} \quad (9)$$



Фиг. 3

В частности, при  $v/c = \tau_\infty/\gamma$  будем иметь  $X_1/X_0 = (1+k)/2\sqrt{k}$ .

Имеющиеся таблицы не позволяют находить  $C$  и  $k$  из выражений (7) при  $v/c > 0.6$ . Для этого рассмотрим предельный случай  $v/c = \alpha \rightarrow 1$

При этом из уравнений (7), используя асимптотические представления эллиптических интегралов, получаем

$$k \approx 4 \exp - \frac{\pi^2}{2\beta}, \quad C \approx \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\pi}$$

Если при этом  $v/c < \tau_\infty/\gamma$ , то точка  $a$  попадет в интервал  $(-1/k, -1)$ . Из (5) получаем выражение для определения  $a$  в виде [11]

$$-\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \tau_\infty^2/\gamma^2}}{\tau_\infty/\gamma} = -C \int_{-1/k}^{-a} \frac{d\tau_2}{\sqrt{(\tau_2^2 - 1)(1 - k^2\tau_2^2)}} \quad (10)$$

В рассматриваемом приближении это уравнение представляется в виде

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \tau_\infty^2/\gamma^2}}{\tau_\infty/\gamma} \approx \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\pi} \left[ \ln 2 + \operatorname{Ar ch} a - \frac{1}{4} + \frac{k^2}{4} a \sqrt{a^2 - 1} \right] \quad (11)$$

$(1 < a < 1/k)$

На фиг. 3 представлены результаты счета по формуле (9) пунктирными линиями (кривая 3 соответствует  $v/c = 0.5$ , а кривая 4 —  $v/c = 0.9$ ). Кривая, соответствующая  $v/c = 0.1$ , практически совпадает со статической кривой 2 работы [5]

$$\frac{x_1}{x_0} = \frac{\gamma^2 + \tau_\infty^2}{\gamma^2 - \tau_\infty^2}$$

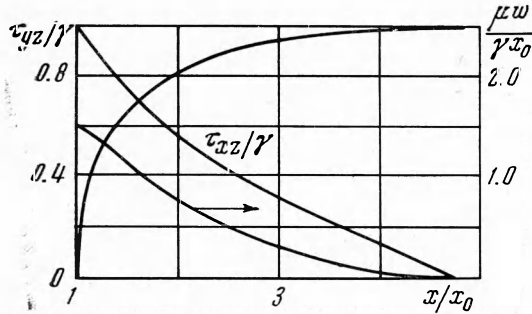
На этом графике кривой 1 изображено решение [8], полученное при условии постоянства  $\tau_{yz}$  в зоне пластичности

$$\frac{x_1}{x_0} = \left[ \cos \frac{\pi\tau_\infty}{2\gamma} \right]^{-1}$$

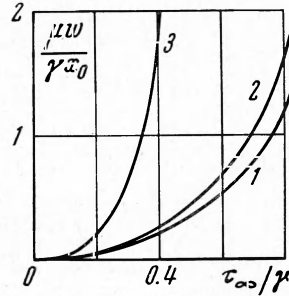
Типичное распределение  $\tau_{yz}/\gamma$  и  $\tau_{xz}/\gamma$  по длине пластической зоны, а также безразмерное перемещение  $\mu w/\gamma X_0$  по длине пластической зоны изображены на фиг. 4 при  $v/c = 0.5$  и  $\tau/\gamma = 0.8$ .

Зависимость безразмерного перемещения  $\mu w / \gamma X_0$  в конце зоны пластичности, т. е. в точке  $\xi = X_0$ , в зависимости от  $\tau_\infty / \gamma$  при  $v/c = 0.0, 0.5, 0.9$  изображена на фиг. 5 кривыми 1, 2, 3 соответственно.

Для принятой в работе постановки энергия упругого тела при развитии трещины переходит в пластическую работу. Определим величину



Фиг. 4



Фиг. 5

пластической работы на единицу длины трещины при ее движении выражением

$$\varepsilon_g = 2 \int_{X_0}^{X_1} \tau_y \frac{\partial w}{\partial X} dX \quad (12)$$

При хрупком разрушении  $G$  — интенсивность освобождения упругой энергии на единицу длины, как следует из [12], равна

$$G = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha \tau_y \frac{w}{2} dx = \frac{\tau_\infty^2 \pi X_0}{2\mu}$$

для трещины длиной  $2X_0$  и напряжении  $\tau_{yz} = \tau_\infty$  на бесконечности. В статическом случае, используя решение работы [5] и формулу (12), получаем

$$\varepsilon_c = \frac{2}{\mu} \frac{(\gamma^4 - \tau_\infty^4)}{4\tau_\infty^2} \int_{X_0}^{X_1} \frac{\sqrt{(X^2 - X_0^2)(X_1^2 - X^2)}}{X^2} dX$$

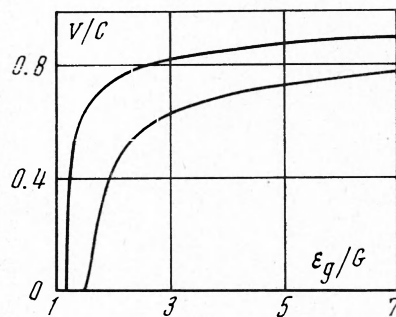
Заметим, что в случае малости длины пластической зоны, т. е. при  $\tau_\infty / \gamma \ll 1$ , это выражение с точностью до членов порядка  $\tau_\infty^2 / \gamma^2$  имеет вид

$$\varepsilon_c = \tau_\infty^2 \pi X_0 / 2\mu$$

что совпадает с результатами, получаемыми из теории хрупкого разрушения.

Для  $\tau_\infty / \gamma = 0.4, 0.8$  на фиг. 6 изображена зависимость  $\varepsilon_g / G$  от величины  $v/c$ . Верхняя кривая соответствует значению  $\tau_\infty / \gamma = 0.4$ .

Приведенный график показывает, что действительно количество энергии, идущей на пластическую работу, возрастает с ростом скорости трещины и увеличения напряжения на бесконечности. Также меняется размер пластической зоны согласно фиг. 3 и смещение в носике трещины  $X = X_0$  (фиг. 5). Отсюда, например, следует, что если в качестве критере-



Фиг. 6

