

мально распространить результаты анализа УВ в пузырьковом потоке [2] на снарядный поток (по-видимому, это возможно, поскольку импульсы давления в рассматриваемой среде эволюционируют, как и в смеси жидкости с пузырьками газа), то к уравнению (1) необходимо слева добавить $(1/Re)(\partial^2 p^*/\partial \eta^2)$ (в Re входит только кинематическая вязкость ν). Поступая так же, как и в случае смеси жидкость — пузырьки газа, можно найти некоторое критическое значение $\nu_* = [(i^2 c_0^2 \Delta p / 12 p_0)(2\gamma/(\gamma+1))]^{1/2}$. При выполнении условия $\nu < \nu_*$ в среде должна возникать осцилляторная УВ. Из оценок видно, что это условие всегда справедливо для снарядного режима. Расчет УВ по уравнению БКВ с $\nu = 10^{-6}$ м²/с приведен на рис. 6 (линия 4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Уоллис Г. Одномерные двухфазные течения. — М.: Мир, 1972.
2. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р. Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. — Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1980.
3. Лежнин С. И. Распространение длинноволновых возмущений при снарядном режиме течения двухфазной среды // Исследования по гидродинамике и теплообмену. — Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1980.
4. Miyazaki K., Fujii E. Y., Suita T. Propagation of pressure wave in air — water two-phase system // J. Nucl. Sci. and Technol. — 1971. — V. 8, N 11.
5. Кузнецов В. В., Лежнин С. И., Прибатурин Н. А., Зыонг Нгок Хай. Нестационарные процессы в кипящих потоках. — Новосибирск, 1983. — (Препр./ИТ СО АН СССР; № 96—83).
6. Кунин И. А. Теория упругих сред с микроструктурой. — М.: Наука, 1975.
7. Гасенко В. Г., Оренбах З. М. Затухание нелинейных волн в парожидкостных смесях // Неравновесные процессы в одно- и двухфазных системах. — Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1981.

г. Новосибирск

Поступила 16/II 1988 г.,
в окончательном варианте — 5/VIII 1988 г.

УДК 532.529.6

П. К. Волков

ВСПЛЫВАНИЕ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ В ТРУБЕ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В работе проведено численное исследование задачи о стационарном движении газового пузыря в вязкой несжимаемой жидкости в вертикальной трубе, когда расстояние между стенками пузыря и трубы может быть малым. Для чисел Рейнольдса $Re \leq 100$ получены характеристики течения и форма поверхности пузыря. Обнаружено, что для $Re > 60$ при стесненных условиях в кормовой части пузыря у стенки трубы образуется застойная зона. По данным численных расчетов построены карты режимов течения.

1. Постановка задачи. Пусть имеем вертикальную трубу радиуса R_T , заполненную покоящейся вязкой несжимаемой жидкостью. Сила тяжести действует сверху вниз. Тогда, если запустить пузырь газа в трубу (или создать с помощью электрического разряда), он всплывает под действием силы Архимеда. Если на некотором участке его движения при этом не будут изменяться значительно объем, форма, а также скорость подъема, то можно считать, что пузырь совершает стационарное движение. Как показывают многочисленные эксперименты, участок нестационарного движения в ряде случаев невелик и в реальных установках достаточно быстро образуется квазистационарный режим всплывания. Заметим, что скорость всплытия u в этих случаях является определяемым параметром и зависит от объема V , формы поверхности и течения жидкости около пузыря.

Математическое описание удобно проводить в системе координат, связанной с «центром пузыря». В ней газовый пузырь покоится, а жидкость набегаёт на пузырь и имеет вдали от него скорость, равную $-u$ (рис. 1). Введем сферическую систему координат (r, θ, φ) с началом O

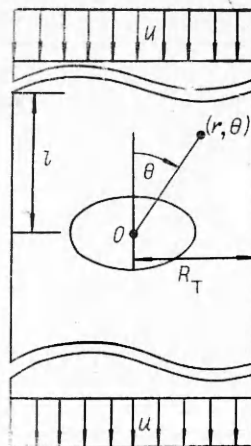
в «центре пузыря». В случае осесимметричного течения уравнения Навье—Стокса в переменных вихрь ω — функция тока ψ [1] имеют вид

$$(1.1) \quad D^2\psi = -2r \sin \theta \omega;$$

(1.2)

$$D^2\omega = \frac{\nu}{r^2 \sin \theta} \left[\psi_{\theta} \omega_r - \psi_r \omega_{\theta} - \frac{\omega}{r} \psi_{\theta} + \omega \operatorname{ctg} \theta \psi_r \right] - \\ - \frac{2}{r} \omega_r + \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2} \omega_{\theta}$$

$$\left(D^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \text{оператор Стокса} \right).$$



Р и с. 1

Зададим краевые условия:

а) на поверхности пузыря Γ ($r = R(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$) условие непротекания

$$(1.3) \quad \psi(r, \theta) = 0;$$

равенство нулю касательных напряжений

$$(1.4) \quad \omega + \frac{R^2 + 2R'^2 - RR''}{R^2 + R'^2} \frac{\psi_r}{r^2 \sin \theta} = 0;$$

равенство разности нормальных напряжений капиллярным силам

$$(1.5) \quad -p(r, \theta) + 2\rho\nu \left[\frac{\psi_{\theta r} - \psi_{\theta}/r + R'\psi_{rr}}{r^2 \sin \theta} + \frac{R'}{R} \omega \right] = -p_r + \sigma K$$

$$\left(K = \frac{R^2 + 2R'^2 - RR''}{(R^2 + R'^2)^{3/2}} + \frac{|R' \cos \theta - R \sin \theta|}{R \sin \theta (R^2 + R'^2)^{1/2}} - \text{кривизна } \Gamma, \right.$$

ν — коэффициент кинематической вязкости, ρ — плотность жидкости, σ — коэффициент поверхностного натяжения, $p = q - \rho g r \cos \theta + p_{\infty}$ ($p_{\infty} = p(r = R_T, \theta = \pi/2)$) — давление в жидкости, q — обобщенное давление, p_r — давление газа в пузыре, считается постоянным);

б) на стенке трубы ($r = G(\theta)$, $\theta \in [\theta^*, \pi - \theta^*]$, $\theta^* = \arctg(R_T/l)$, l — длина рассматриваемого участка движущейся трубы) условие, прилипания

$$(1.6) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -u;$$

условие непротекания

$$(1.7) \quad \psi(r, \theta) = -(u/2)r^2 \sin^2 \theta;$$

в) на оси трубы ($\theta = 0, \theta = \pi$) условия симметрии

$$(1.8) \quad \psi(r, \theta) = \omega(r, \theta) = 0;$$

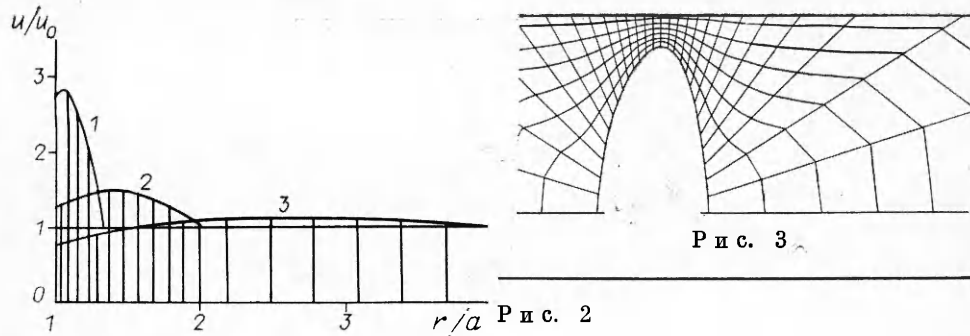
г) на входе трубы ($r = F_1(\theta)$, $\theta \in [0, \theta^*]$) и на выходе ($r = F_2(\theta)$, $\theta \in [\pi - \theta^*, \pi]$) условия невозмущенного потока

$$(1.9) \quad \psi_i = -(u/2)r^2 \sin^2 \theta, \quad \omega_i = 0 \quad (i = 1, 2).$$

2. Анализ размерности. Уравнения (1.1)–(1.9) содержат шесть независимых параметров:

$$(2.1) \quad \rho, \nu, \sigma, g, p_{\infty} - p_r, R_T.$$

Как видно из (1.5), решение зависит только от разности давлений в пузыре p_r и на бесконечности p_{∞} . Первые пять параметров задают среду и характеризуют ее свойства, шестой фиксирует геометрию области, занятой



этой средой. Согласно теории размерностей, существуют три независимых безразмерных критерия. Способы безразмеривания могут быть различными. В эксперименте, как правило, легко задавать объем пузыря V (а значит, некоторый линейный размер $a = \sqrt[3]{3V/4\pi}$). Кроме того, поскольку в данной постановке жидкость вдали от пузыря движется с постоянной скоростью $-u$, то в качестве характерных размера и скорости для процедуры безразмеривания можно взять a и u . Следует помнить, что в (2.1) какие-то два параметра станут определяемыми. В данной работе это будут g и $p_r - p_\infty$.

Полагая $r = 2ar'$, $\psi = (2a)^2 u \psi'$, $\omega = (u/2a\omega')$, $R = 2aR'$, $q = \rho u^2 q'$, получим аналогично [1] безразмерные параметры: $Re = u2a/\nu$ — число Рейнольдса, $We = \rho u^2 2a/\sigma$ — число Вебера, $Fr = u^2/ga$ — число Фруда, $P_d = (p_r - p_\infty)2a/\sigma$ — давление. В качестве характеристики геометрии области течения удобно рассмотреть величину $\lambda = a/R_r$, которая входит в уравнения, описывающие границы области течения.

3. Преобразование координат и метод решения. Уравнения (1.1)—(1.9) дают замкнутую систему для определения функций течения и формы поверхности пузыря. Теоретические исследования корректности задач такого класса содержатся в [2]. Поскольку область течения заранее неизвестна, то прямой численный расчет связан с большими трудностями. С целью преодоления их перейдем в систему координат, в которых область течения известна. Введем

$$(3.1) \quad \eta = (r - Q(\theta))/(R(\theta) - Q(\theta)), \quad \theta' = \theta.$$

Здесь через $Q(\theta)$ обозначено уравнение границы, содержащей вход, выход и стенку трубы. Преобразование (3.1) переводит область течения в прямоугольник $[0, 1] \times [0, \pi]$. В новых переменных исходные уравнения имеют более сложный вид, но это компенсируется тем, что область течения известна [1, 3].

Алгоритм и метод численного решения аналогичны изложенным в [1]. Тестирование алгоритма проводилось следующим образом. Для $\lambda = 0,2$ делались расчеты с разными значениями We , Re и $\omega = 0$ при $r = Q$. Решения совпали с [1]. Как показывают эксперименты, уже при $\lambda = 0,1$ влияние стенок на всплытие пузыря практически несущественно. Оказалось [4], что при $\lambda < 0,2$ для $1 < Re < 40$ решения согласуются с [1].

В [5] найдены решения задачи для $Re < 0,2$ методом разложения функций по малому параметру и проведено сравнение с экспериментами. На рис. 2 сопоставлены полученные профили скорости в экваториальной плоскости для $\lambda = 0,75; 0,5; 0,25$ (линии 1—3) с рассчитанными в [5]. Скорости практически совпадают.

Параметр $l = 10$ выбран по результатам тестовых расчетов и далее не изменялся. Характерный вид расчетной сетки в исходной системе координат представлен на рис. 3. Она достаточно подробна вблизи пузыря и в области зазора между пузырем и стенкой, вдали от пузыря она становится более крупной. В целом такая сетка является удачной, что позволило

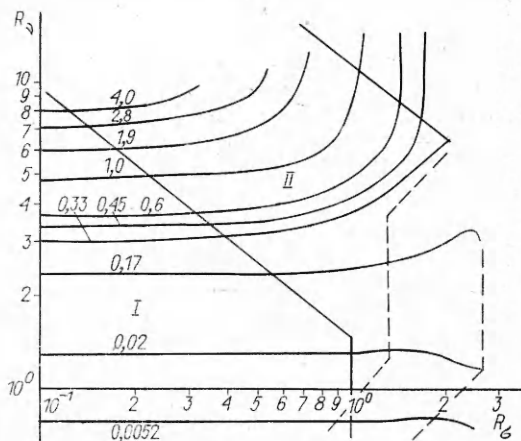
получить решения задачи для значений λ , близких к единице, когда расстояние между стенками трубы и пузыря мало. С другой стороны, есть у нее изъян. Необходимо помнить, что при больших значениях l может оказаться, что ни одна расчетная точка не попадет на участок входа или выхода трубы. Это накладывает ограничения на шаг по переменной θ . В расчетах на участок входа или выхода попадало не менее трех точек.

Исходная задача имеет три независимых безразмерных параметра. Чтобы получить полную информацию о возможных режимах течения, необходимо большое количество расчетов. В свою очередь, чтобы из этого обширного объема информации извлечь и представить в доступной пользователю форме данные о течениях, нужна соответствующая обработка полученных результатов счета. Оказалось, что расчеты удобно вести, если в качестве независимых параметров выбрать Re , We , λ . При фиксированном λ получим решения для различных Re и We , как в [1]. Изменяя λ , можно получить чрезвычайно большую информацию о течениях. Попытка систематизировать ее известными способами (строить карты режимов течения в координатах Re , We , или Re , $E = \rho g(2a)^2/\sigma$ [6], или $N_v = u \sqrt[4]{\rho/g\sigma}$, $N_b = \sqrt{E}$ [7]) не дает желаемого результата, поскольку в каждом из них координаты зависят от скорости всплытия пузыря, которая заранее неизвестна и к тому же на нее сильно влияет параметр λ .

Наиболее удобны для этой цели координаты $R_\sigma = a/\sqrt{\sigma/\rho g}$, $R_v = a/\sqrt[3]{v^2/g}$ [8, 9]. Поскольку R_σ и R_v зависят от характерного размера пузыря a , то, построив, например, изолинии Fg в этих переменных, можно очень просто найти скорость всплытия пузыря заданного размера и проследить особенности течения для заданной жидкости, так как число Мортонна $M = gv^4\rho^3/\sigma^3 = (R_\sigma/R_v)^6$, а значит, каждая среда изображается в координатах R_σ , R_v некоторой прямой, наклон которой определяется M .

Расчеты проведены для трех значений λ , при каждом из них для $Re = 0,1-100$ проводились серии вычислений для $We = 10^{-7} - 3,3$.

4. Умеренное влияние стенок ($\lambda = 0,5$). На рис. 4 представлены изолинии Fg в координатах R_σ , R_v . Левый нижний угол *I*, отделенный сплошной линией, — область сферических пузырей. Линии уровня практически прямые, параллельные оси R_σ . Это означает, что скорость всплытия зависит только от R_v . Наблюдается линейная зависимость Fg от Re : $Fg = k_1 Re$ ($k_1 = 0,05$). В области *II*, заключенной между двумя сплошными линиями, форма пузырей отлична от сферической. Изолинии Fg искривлены, причем наблюдаются два типа их поведения. В верхней части области *II* изолинии Fg выходят на прямые, параллельные оси R_v , — течение зависит от одного параметра R_σ , а в нижней *II* изолинии Fg имеют тенденцию к монотонному убыванию с ростом R_σ . Такое их поведение — отражение различного характера деформирования пузыря. Так, в верхней части области *II* происходят сплющивание пузыря, вытягивание поперек потока, как в случае «неограниченного объема» [1]. Всюду выше верхней прямолинейной границы области *II* за пузырем существует замкнутый след: пузырь и часть жидкости обтекаются потоком жидкости. Изменения в деформации пузыря приводят к тому, что меняется соотношение между областью пузыря и областью следа при относительно малом изменении внешней границы этого образования. На рис. 5, *a* ($Re = 60$, $We = 2,57$,



Р и с. 4

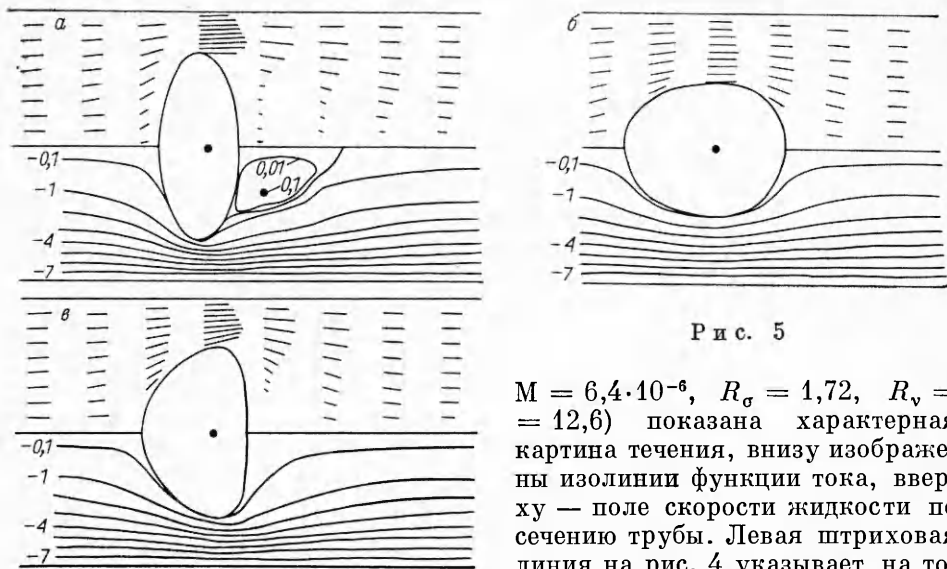


Рис. 5

$M = 6,4 \cdot 10^{-6}$, $R_\sigma = 1,72$, $R_v = 12,6$) показана характерная картина течения, внизу изображены изолинии функции тока, сверху — поле скорости жидкости по сечению трубы. Левая штриховая линия на рис. 4 указывает на то, что лобовая часть пузыря деформируется выпячиванием вверх по потоку, правая, — что кормовая часть пузыря вытягивается вниз по потоку.

Таким образом, в нижней части области II деформация пузыря происходит вытягиванием его вдоль оси трубы. На рис. 5, б ($Re = 0,4$, $We = 0,065$, $M = 954$, $R_\sigma = 2,44$, $R_v = 0,78$) представлена картина течения для этого случая, а на рис. 5, в ($Re = 20$, $We = 3,18$, $M = 0,001$, $R_\sigma = 2,16$, $R_v = 6,74$) — картина течения, соответствующая области, промежуточной указанным двум. Форма пузыря похожа на линзу. Несмотря на столь плоскую кормовую часть, течение здесь безотрывное. Всюду профиль скорости по сечению трубы имеет различия лишь в небольшой зоне вблизи пузыря. Трение на стенке трубы, которое совпадает с функцией $2\omega/Re$, незначительно, в створе пузыря отрицательно, что говорит об ускорении здесь жидкости, а впереди и сзади положительно.

5. Сильное влияние стенок ($\lambda = 0,8$). На рис. 6 даны изолинии Fr в координатах R_σ , R_v . Карта режимов течений имеет в целом ту же структуру, что и при $\lambda = 0,5$, но сдвинутую вверх. Левый нижний угол I, очерченный сплошной ломаной линией, — область сферических пузырей. Значение Fr практически не меняется с ростом R_σ и линейно зависит от Re : $Fr = k_2 Re$ ($k_2 = 0,00575$). В области II течение определяется параметрами R_σ , R_v . Штриховые линии указывают на характер деформирования пузыря. Вытягивание пузыря вдоль оси приводит к увеличению зазора между стенками трубы и пузыря.

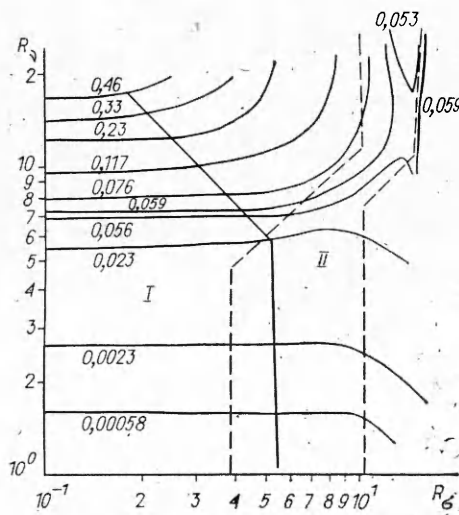


Рис. 6

Характерная картина течения представлена на рис. 7, а ($Re = 0,4$, $We = 0,019$, $M = 0,148$, $R_\sigma = 1,63$, $R_v = 2,24$). В верхней части области II пузырь имеет клинообразную форму (рис. 7, б, $Re = 60$, $We = 0,19$, $M = 2,3 \cdot 10^{-8}$, $R_\sigma = 1,42$, $R_v = 26,7$). Происходит уменьшение зазора между стенками трубы и пузыря, укорочение его в осевом направлении. Во всех случаях течения различаются лишь в небольшой области вблизи пузыря. У оси трубы происходит ускорение жидкости, а на некотором расстоянии от стенки

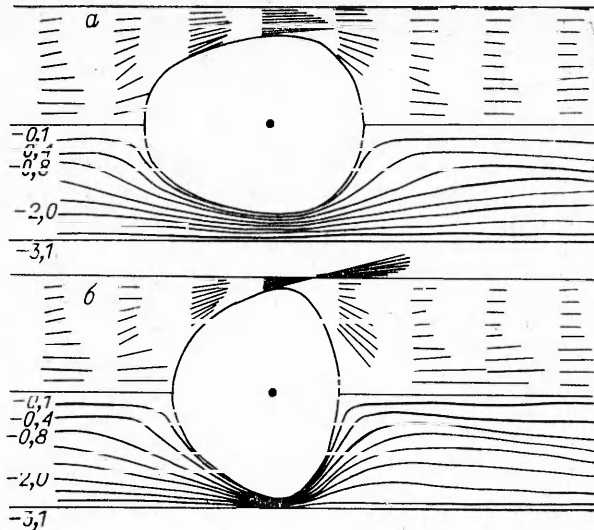
наблюдается зона заторможенного течения. На рис. 8 показаны распределения вихря ω на стенке трубы: 1 — $Re = 0,4$, $We = 0,019$, $M = 0,148$; 2 — $Re = 20$, $We = 0,36$, $M = 8,2 \cdot 10^{-6}$; 3 — $Re = 60$, $We = 0,19$, $M = 2,3 \cdot 10^{-8}$. С уменьшением зазора между стенками трубы и пузыря сильно растет отрицательный пик ω — происходит ускорение жидкости. Сразу за узкой частью зазора ω меняет знак на положительный — происходит торможение жидкости у стенки в расширяющемся течении. В узкой полосе области II (см. рис. 6), где происходит перестройка процесса деформирования пузыря, изолинии Fr соответствуют линиям уровня седловой поверхности. Это означает, что зависимость скорости всплытия пузыря от его размера будет иметь немонотонный характер.

Увеличение размера пузыря приводит к росту скорости всплытия лишь тогда, когда деформация пузыря происходит путем вытягивания его вдоль оси трубы. Трение на стенке характеризует степень «запирания» трубы.

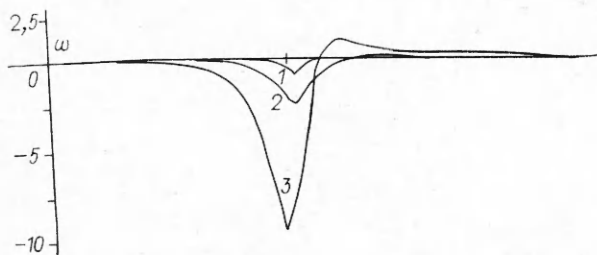
6. «Снарядный» режим течения ($\lambda = 0,98$). Расчеты для значений λ , близких к единице, представляют, видимо, лишь теоретический интерес, поскольку на практике в этих случаях происходит «запирание» трубы. Наличие шероховатостей на стенке и процесса испарения на свободной поверхности, которое в данном случае может сыграть решающую роль, приводит к тому, что тонкая пленка жидкости между стенками трубы и пузыря разрушается.

На рис. 9 приведена карта режимов течения в координатах R_σ , R_v . Характер изолиний Fr тот же, что и на рис. 4, 6. Область их немонотонного изменения поднялась еще выше. Левее прямой $R_\sigma = 0,5$ — область существования сферических пузырей. Штриховые линии указывают на характер деформирования пузыря. Таким образом, при $R_\sigma > 1$ деформация поверхности происходит путем вытягивания ее по потоку с увеличением зазора между стенками трубы и пузыря. В области сферических пузырей Fr пропорционально Re : $Fr = k_3 Re$ ($k_3 = 0,0000257$). Скорость всплытия их очень маленькая: $u = \sqrt{gaFr}$. Для многих жидкостей $\delta_\sigma = \sqrt{\sigma/\rho g} = 0,0015 - 0,003$ м, при $R_\sigma = 0,5$ $a = 0,5\delta_\sigma$. Подставляя все в формулу для скорости, получим $u = \sqrt{9,8 \cdot 0,5\delta_\sigma Fr}$. При $R_v = 10$ $Fr = 0,03 \cdot 10^{-4}$ и $u \sim 0,15$ мм/с.

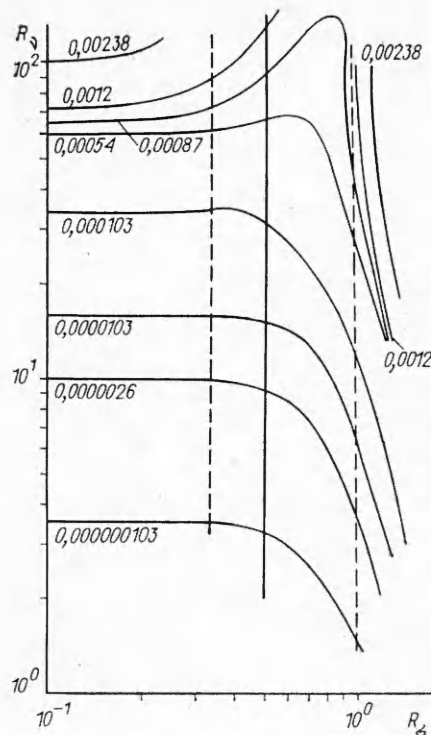
На рис. 10, а ($Re = 0,004$, $We = 2,1 \cdot 10^{-6}$, $M = 0,0813$, $R_\sigma = 1,12$, $R_v = 1,71$) приведена картина течения около пузыря при $Re = 0,004$. Несмотря на то что Re и We здесь малы, поверхность пузыря деформирована. Увеличение Re приводит к уменьшению зазора между стенками трубы и пузыря. Наиболее существенные отличия от рис. 10, а наб-



Р и с. 7



Р и с. 8

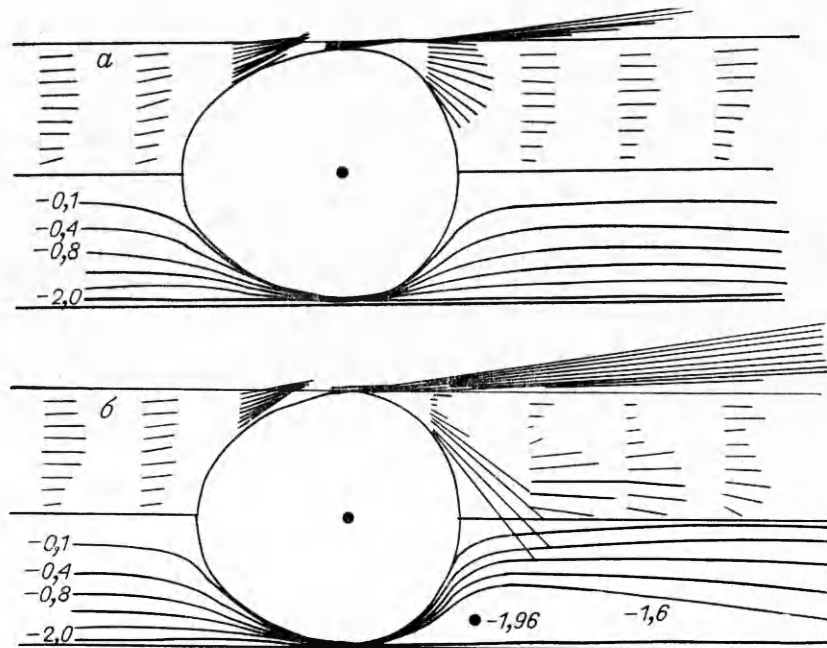


Р и с. 9

людаются за пузырем на расстоянии примерно диаметра трубы. Здесь около стенки появляется зона заторможенного течения, а вблизи поверхности пузыря и оси трубы формируется струя жидкости, которая, впрочем, быстро тормозится. На рис. 10, б показано течение при $Re = 60$, $We = 0,0024$, $M \sim 10^{-12}$, $R_\sigma = 1,08$, $R_\nu = 94,65$. У стенки за пузырем образовалось течение с замкнутыми линиями тока — торoidalный вихрь. Между пузырем и этим вихрем существует струя жидкости со скоростью, значительно большей, чем скорость всплытия пузыря, направленная к оси трубы. При $Re = 100$ картина течения становится более сложной. За пузырем у стенки трубы уже два вихря, вращающихся в разные стороны. На рис. 11 изображены графики распределения ω на стенке трубы (1 — $Re = 0,004$, $We = 2,1 \cdot 10^{-6}$, $R_\sigma = 1,12$, $R_\nu = 1,71$; 2 — $Re = 40$, $We = 0,0053$, $R_\sigma = 1,14$, $R_\nu = 58,2$; 3 — $Re = 100$, $We = 0,00032$, $R_\sigma = 0,26$, $R_\nu = 102,4$; 4 — $Re = 60$, $We = 0,0024$, $R_\sigma = 1,08$, $R_\nu = 94,65$). В области $Re < 60$ (см. рис. 9) там, где изолинии Γ монотонны

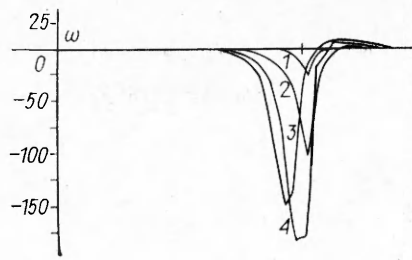
или имеют небольшой локальный максимум, пик модуля ω убывает с ростом R_σ (зазор увеличивается). При $Re > 60$ в зоне, ограниченной штриховыми линиями, течение и деформации поверхности происходят так, что пик модуля ω на стенке становится еще больше.

7. Обсуждение результатов. Карты режимов течения, приведенные на рис. 4, 6, 9, и картины течения (рис. 5, 7, 10) дают представление о процессе всплытия пузыря и влиянии стенок на течение. Наличие в дан-



Р и с. 10

ной задаче параметра λ не позволяет так же легко, как в случае неограниченного объема жидкости, построить зависимость скорости всплытия пузыря от его размера в трубке данного радиуса. Для достижения этой цели необходимо существенно большее количество диаграмм с разными значениями λ . Здесь же можно получить только три точки этой зависимости. В трубках малого радиуса увеличение размера пузыря может привести к «закупориванию» трубы. Только при $R_G > 1$ увеличение объема пузыря приводит к росту скорости его всплытия.



Р и с. 11

Попытки получить результаты для R_G , больших, чем указано на диаграммах, приводили к тому, что во многих случаях пузырь начинал расти, вытягиваясь вдоль оси. Итерационный процесс сходился, но для другого значения λ . Увеличение точности расчета или количества узлов расчетной сетки в целом не снимало проблемы. Возможно, это связано с тем, что наступал «снарядный» режим течения или близкий к нему, на практике определяющийся как такое течение, при котором скорость всплытия уже не зависит от объема. Учитывая наличие нестационарности на свободной поверхности при определенных условиях, можно дать другое объяснение этому явлению.

Сравнение диаграмм рис. 4, 6, 9 с аналогичными в [9] показывает их хорошее согласие в области $R_G > 1$. При $R_G < 1$ имеются значительные расхождения, связанные с присутствием поверхностно-активных веществ (ПАВ) в эксперименте. Как было показано ранее [8], если удавалось избавиться от ПАВ, то сравнение расчетных данных с экспериментальными было удовлетворительным и при $R_G < 1$.

Представленные расчетные результаты качественно согласуются с экспериментальными, приведенными в [10], где были измерены продольная компонента профиля скорости по сечению трубы и трение на стенке в задаче о снарядном движении цепочки пузырей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Christov C. I., Volkov P. K. Numerical investigation of the steady viscous flow past a stationary deformable bubble // J. Fluid Mech.— 1985.— V. 158.— P. 341.
2. Пухначев В. В. Задачи со свободными границами для уравнений Навье — Стокса: Дис. д-ра физ.-мат. наук.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1974.
3. Волков П. К., Кузнецов Б. Г. Численное решение задачи о стационарном обтекании вязкой жидкостью газовой полости в трубе // ЧММСС.— 1982.— Т. 13, № 5.
4. Волков П. К., Кузнецов Б. Г. Краевые условия для задачи обтекания пузыря вязкой жидкостью // Численное моделирование в динамике жидкости.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1983.
5. Coutanceau M., Thizon P. Wall effect on the bubble behaviour in highly viscous liquids // J. Fluid Mech.— 1981.— V. 107.— P. 339.
6. Bhaga D., Weber M. E. Bubbles in viscous liquids: shapes, wakes and velocities// J. Fluid Mech.— 1981.— V. 105.— P. 61.
7. Coppus J. H. C., Rietema K. Description of bubble shape in terms of dimensionless number // Chem. Engng Sci.— 1980.— V. 35, N 6.
8. Волков П. К., Чиннов Е. А. Всплытие сферических и эллипсоидных пузырей в неограниченном объеме жидкости // Гидродинамика и акустика одно- и двухфазных потоков.— Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1983.
9. Чиннов Е. А. Исследование влияния стенок цилиндрического вертикального канала на скорость всплытия одиночных газовых пузырей // Теплофизика и гидродинамика в процессах кипения и конденсации.— Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1985.
10. Nakoryakov V. E., Kashinsky O. N., Kozmenko B. K. Experimental study of gas-liquid slug flow in a small-diameter vertical pipe // Intern. J. Multiphase Flow.— 1986.— V. 12, N 3.

г. Новосибирск

Поступила 12/VII 1988 г.