

УДК 519.6:532.516

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА
ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ
В КАНАЛАХ С ПОРИСТОЙ ВСТАВКОЙ**

Н. Т. Данаев, Ш. Смагулов, Н. М. Темирбеков

*Казахский государственный национальный университет,
480046 Алматы*

Работа посвящена численному исследованию стационарных течений несжимаемой жидкости в криволинейных каналах с пористой вставкой. Рассмотрен итерационный алгоритм, для которого установлено, что количество итераций при сходимости процесса вычислений слабо зависит от значений коэффициента проницаемости пористого слоя. Приводятся данные и анализ результатов численного эксперимента.

Для математического моделирования ламинарного движения изотермической несжимаемой жидкости в каналах с пористой вставкой, представляющей собой засыпку шаров одинакового диаметра, широко используется следующая система уравнений [1–4]:

$$\rho \left(\frac{\partial U^i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \bar{U}^k \frac{\partial U^i}{\partial x^k} \right) + \frac{\partial P}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\mu_{\text{эф}} \left(\frac{\partial U^i}{\partial x^k} + \frac{\partial U^k}{\partial x^i} \right) \right] - \frac{\mu U^i}{R}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

Здесь $\mathbf{u} = (U^1, U^2, U^3)$ — вектор скорости; P — давление; ρ — плотность; μ — коэффициент динамической вязкости. При этом член $\mu \mathbf{u}/R$ учитывает силы трения, возникающие в поровом пространстве из-за наличия твердой фазы (шаров). Для связи тензора вязких напряжений с компонентами вектора скорости вводится понятие эффективной вязкости $\mu_{\text{эф}}$ аналогично тому, как это делается в описании турбулентных течений.

Для верификации описанной выше модели наибольшую трудность вызывает определение величины $\mu_{\text{эф}}$, выбор которой в литературе значительно расходится. Так, в [1] предлагается выбрать $\mu_{\text{эф}}$ в виде

$$\mu_{\text{эф}} = \mu \left[1 + 2,5 \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) + A \frac{(1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \right],$$

где A — эмпирический коэффициент, численное значение которого рекомендуется выбрать путем сравнения расчетных и экспериментальных данных ($A = 30 + 35$), а в [2] — в виде

$$\mu_{\text{эф}} = \begin{cases} \xi \mu & (1 \leq \xi \leq 200) \text{ в пористом слое,} \\ \mu & \text{вне слоя,} \end{cases}$$

т. е. определение приемлемого коэффициента $\mu_{\text{эф}}$ само по себе уже является самостоятельной задачей математического моделирования. Кроме того, сопоставление результатов расчета проточного реактора с неподвижным зернистым слоем, приведенных в [1–4], с различными значениями $\mu_{\text{эф}}$

(в [3, 4] $\mu_{эф} = \mu = \text{const}$) показывает, что они в качественном плане совпадают. Сравнение количественных характеристик с физическими данными затруднительно, так как в литературе отсутствуют эксперименты, где бы подробно изучалось непрерывное развитие течения в каналах с пористой вставкой. Кроме того, хотя и имеются попытки измерения характеристик внутри зернистого слоя, эти данные зачастую противоречивы, что связано прежде всего со сложностью измерений в самом слое [5–7].

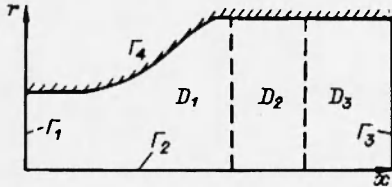


Рис. 1

В связи с этим для отражения наиболее достоверной картины течений жидкости через пористые среды имеет смысл провести исследования на основе простых математических моделей, допускающих эффективную численную реализацию. В настоящей работе на основе стационарных уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости изучены течения

в криволинейных каналах с цилиндрической симметрией через пористые вставки.

Для описания стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в криволинейных каналах с пористой вставкой уравнения Навье — Стокса в переменных (Ψ, Ω) в цилиндрической системе координат могут быть представлены в форме

$$\frac{\partial U \Omega}{\partial x} - \frac{\partial V \Omega}{\partial r} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\Delta \Omega + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Omega}{r} \right) \right) - \text{div} \left(\frac{k}{r} \text{grad } \Psi \right), \quad (1)$$

$$\text{div} \left(\frac{1}{r} \text{grad } \Psi \right) = \Omega,$$

где

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial x}; \quad V = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}; \quad \Omega = \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial x};$$

$$k(x, r) = \begin{cases} 0 & \text{в } D_1 \cup D_3, \\ k_0(x, r) & \text{в } D_2; \end{cases}$$

$k_0(x, r)$ — коэффициент проницаемости пористой среды.

В криволинейной области $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, показанной на рис. 1, для уравнений (1) рассмотрим следующие краевые условия: на входной границе Γ_1

$$\Psi = \Psi_0(r), \quad \Omega = \Omega_0(r) \quad (\Psi_0, \Omega_0 \text{ — известные функции});$$

на оси симметрии Γ_2

$$\Psi = \Omega = 0;$$

на выходной границе Γ_3 , расположенной достаточно «далеко» от пористой вставки, полагаем $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0$, т. е. ставим «мягкие» граничные условия; на твердой стенке Γ_4

$$\Psi = \text{const}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0. \quad (2)$$

В ортогональной криволинейной системе координат система уравнений (1) может быть представлена в форме

$$(L_1 + L_2) \Omega = -L_3 \Psi; \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial q^1} \left(\frac{\Phi}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(\frac{1}{r \Phi} \frac{\partial \Psi}{\partial q^2} \right) = J \Omega. \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_1 \Omega &= \frac{\partial}{\partial q^1} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial q^2} + \frac{a_{12}}{\text{Re}} \right) \Omega \right] - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial q^1} \Phi \frac{\partial \Omega}{\partial q^1} \right); \\ L_2 \Omega &= \frac{\partial}{\partial q^2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial q^1} + \frac{a_{11}}{\text{Re}} \right) \Omega \right] - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial q^2} \Phi^{-1} \frac{\partial \Omega}{\partial q^2} \right); \\ L_3 \bar{\Psi} &= \frac{\partial}{\partial q^1} \left(k \frac{\Phi}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(k \frac{1}{r \Phi} \frac{\partial \Psi}{\partial q^2} \right); \\ \Phi &= \sqrt{g_{22}/g_{11}}; \quad a_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \quad (i, j = 1, 2); \quad J = \sqrt{g_{11} g_{22}}. \end{aligned}$$

Коэффициент проницаемости пористой среды учитывался по формуле

$$k_0 = \frac{150(1-\varepsilon)^2}{\text{Re} \varepsilon^3} G^2, \quad G = d_a/d,$$

где ε — коэффициент пористости; d_a — диаметр трубы; d — характерный диаметр зерен пористого материала.

Для численного построения ортогональной криволинейной сетки в расчетной области использован метод, изложенный в [8].

На рис. 2 приведена конечно-разностная криволинейная сетка в области, характерной для рассматриваемых краевых задач. При проверке ортогональности данной сетки выяснилось, что

$$\max |g_{12}/\sqrt{g_{11}g_{22}}| \leq 0,0288.$$

Для численного решения системы дифференциальных уравнений (3), (4) рассмотрим следующую итерационную конечно-разностную схему расщепления [9]:

$$\frac{\Omega^{n+1/3} - \Omega^n}{\tau} + L_{1,h} \Omega^{n+1/3} + L_{2,h} \Omega^n = -(L_{3,h} - A_h) \Psi^n; \quad (5)$$

$$\frac{\Omega^{n+2/3} - \Omega^n}{\tau} + L_{1,h} \Omega^{n+1/3} + L_{2,h} \Omega^{n+2/3} = -(L_{3,h} - A_h) \Psi^n; \quad (6)$$

$$\frac{\Omega^{n+1} - \Omega^{n+2/3}}{\tau} = -(L_{3,h} - A_h) (\Psi^{n+1} - \Psi^n); \quad (7)$$

$$\left(\frac{\Phi}{r} \Psi_{q^1}^{n+1} \right)_{\bar{q}^1} + \left(\frac{1}{\Phi r} \Psi_{q^2}^{n+1} \right)_{\bar{q}^2} = J \Omega^{n+1}. \quad (8)$$

Здесь $L_{1,h}$, $L_{2,h}$, $L_{3,h}$ — разностные аналоги дифференциальных операторов L_1 , L_2 и L_3 , в которых конвективные члены аппроксимированы с учетом знака скорости потока; оператор A_h имеет структуру, определяемую методикой введения вспомогательной функции, описанной в [10].

Учет краевого условия (2) на твердой стенке осуществляется по формуле Тома

$$\Omega_{k,N_z} = \frac{1}{h_2^2} \frac{-2(\Psi_{q^2})_{k,N_z-1/2}}{r_{k,N_z-1/2}(g_{22})_{k,N_z-1/2}}, \quad (9)$$

где $(g_{22})_{k,N_z-1/2} = (x_{q^2, k, N_z-1/2}^1)^2 + (x_{q^2, k, N_z-1/2}^2)^2$.

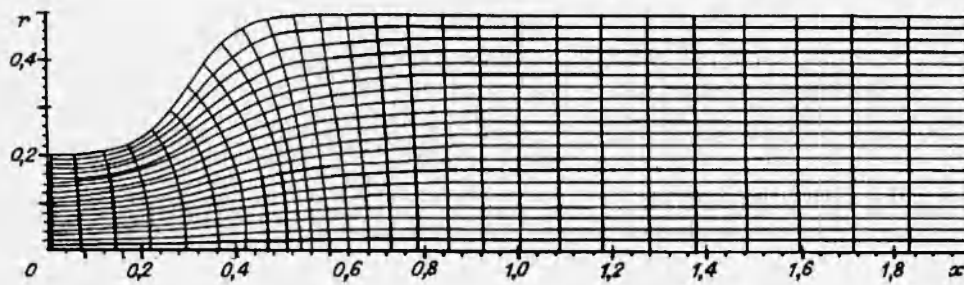


Рис. 2

Алгоритм реализации предложенного метода заключается в следующем:

1) на первом этапе из соотношений (5), (6), краевые условия для которых являются однородными, с помощью метода скалярной прогонки находим значения $\Omega^{n+2/3}$ внутри расчетной области;

2) затем из соотношения (7), исключая Ω^{n+1} с помощью выражения (8), получаем для определения Ψ^{n+1} конечно-разностное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \left\{ \left(\frac{\Phi}{r} \Psi^{n+1} \right)_{\bar{q}^1} + \left(\frac{1}{\Phi r} \Psi^{n+1} \right)_{\bar{q}^2} \right\} - \tau(L_{3,h} - A_h) \Psi^{n+1} = \\ = \Omega^{n+2/3} + \tau(L_{2,h} - A_h) \Psi^n, \end{aligned} \quad (10)$$

решение которого при заданных краевых условиях на границе реализовано с помощью итерационного метода верхней релаксации;

3) после нахождения Ψ^{n+1} внутри сеточной области D определим Ω^{n+1} по формуле (8).

При этом вычисления по разностной схеме (5)–(8) при заданном начальном приближении Ψ^0 продолжают до тех пор, пока не выполнится критерий установления

$$\max |\Omega^{n+1} - \Omega^n| \leq \tau \varepsilon, \quad x \in D_h, \quad (11)$$

где ε — наперед заданная величина, характеризующая точность итерации. При выполнении критерия установления окончательные значения вихря скорости на границе вычисляются по формуле (9).

На входе канала значения функции тока и вихря скорости задавались по формулам

$$\Psi = -\frac{r^4}{2a^2} + \tau, \quad \Omega = -\frac{4}{a^2} r.$$

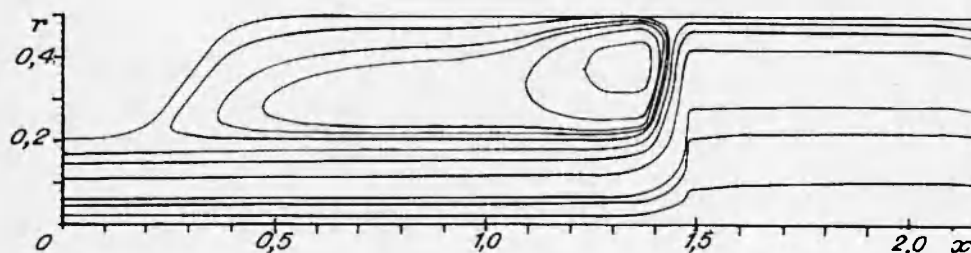


Рис. 3

Расчеты по схеме (5)–(10) вначале проводились для сетки, указанной на рис. 2, при $\tau = 0,05$ с количеством узлов 41×21 . Численные расчеты выполнены при следующих значениях коэффициента пористости:

$$1) \varepsilon(r) = 1 \quad \text{при} \quad 0 \leq r \leq 0,5;$$

$$2) \varepsilon(r) = \begin{cases} 0,5 & \text{при} \quad 0 \leq r \leq 0,2, \\ (100r^2 + 101)/210 & \text{при} \quad 0,2 \leq r \leq 0,5; \end{cases}$$

$$3) \varepsilon(r) = \begin{cases} 0,4 & \text{при} \quad 0 \leq r \leq 0,2, \\ (10r^2 - 4r + 4)/9 & \text{при} \quad 0,2 \leq r \leq 0,5; \end{cases}$$

$$4) \varepsilon(r) = \begin{cases} 0,38 & \text{при} \quad 0 \leq r \leq 0,2, \\ (0,62r^2 - 0,124r + 0,38) & \text{при} \quad 0,2 \leq r \leq 0,5; \end{cases}$$

$$5) \varepsilon(r) = \begin{cases} 0,3 & \text{при} \quad 0 \leq r \leq 0,2, \\ (100r^2 + 59)/210 & \text{при} \quad 0,2 \leq r \leq 0,5; \end{cases}$$

$$6) \varepsilon(r) = \begin{cases} 0,2 & \text{при} \quad 0 \leq r \leq 0,2, \\ (50r^2 - 20r + 11)/45 & \text{при} \quad 0,2 \leq r \leq 0,5. \end{cases}$$

В табл. 1 представлены некоторые результаты вычислений для различных вариантов выбора $\varepsilon(r)$ для $Re = 100$. Здесь k_{\max} — максимальное значение коэффициента сопротивления пористой среды, ε_{\min} , ε_{\max} — минимальное и максимальное значения пористости слоя, N — количество итераций. Все расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-6 при одном и том же начальном приближении до тех пор, пока имело место неравенство (11) с $\varepsilon = 10^{-3}$. Как видно из данной таблицы, количество итераций при установлении процесса вычислений слабо зависит от разброса коэффициента проницаемости пористого слоя.

Т а б л и ц а 1

Номер варианта	k_{\max}	ε_{\min}	ε_{\max}	N
1	0	1,0	1,0	97
2	300,0	0,5	0,5	110
3	843,7	0,4	0,5	112
4	1050,8	0,38	0,473	113
5	2722,0	0,3	0,4	117
6	12000,0	0,2	0,3	145

На рис. 3 приведены изолинии функции тока для $Re = 1000$. Из этого рисунка, а также из расчетов для $Re = 100, 500$ видно, что в расширяющихся участках диффузора при течении вязкого газа через пористые среды образуется вихревая зона, заполняющая обширную область вплоть до пористой перегородки, размер которой возрастает с увеличением значений Re .

На рис. 4 показаны профили продольной составляющей вектора скорости внутри пористого слоя при различном выборе коэффициента пористости ε : линии 1–3 — профили скорости, соответствующие второму варианту выбора ε , пятому и шестому. Отсюда видно, что с уменьшением коэффициента пористости, т. е. с увеличением сопротивления пористой среды, неоднородность скорости по вертикальному сечению канала внутри пористой вставки растет.

Т а б л и ц а 2

Re	x_{\max}	y_{\max}	Ψ_{\max}
100	0,0599	0,3540	0,02204
500	1,3761	0,3748	0,02931
1000	1,4062	0,3998	0,03801

В табл. 2 представлены координаты центра рециркуляционной зоны и значения Ψ в данной точке для различных Re. Видно, что с увеличением Re центр зоны рециркуляции перемещается к верхнему углу перед пористой вставкой и увеличиваются значения Ψ_{\max} , т. е. завихренность становится более интенсивной.

В следующих расчетах рассмотрена область, контур которой определен часто встречающейся на практике функцией Витошинского:

$$r = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \left(1 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2\right) \frac{(1-3x^2/a^2)^2}{(1+3x^2/a^2)^3}}}, \quad 0 \leq x \leq a/\sqrt{3}.$$

Здесь r_1 — радиус выходного сечения; r_0 — радиус входного сечения; x — координата вдоль оси трубы; параметр a обычно полагают равным $4r_0$. Ниже рассмотрен случай, когда $r_0 = 0,5$, $r_1 = 0,2$, $x_l = 4,0$.

На рис. 5 показана расчетная область, соответствующая каналу Витошинского, и построена ортогональная криволинейная сетка. На рис. 6 изображена картина течения внутри трубы с пористой перегородкой для $Re = 100$ при $\varepsilon = 0,38-0,43$.

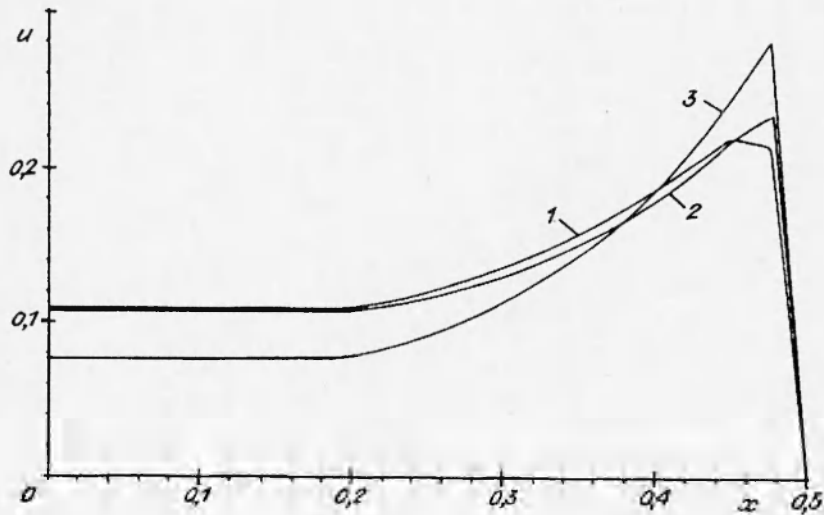


Рис. 4

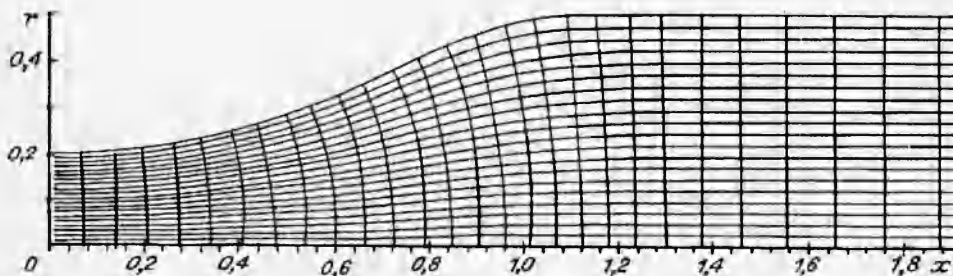


Рис. 5

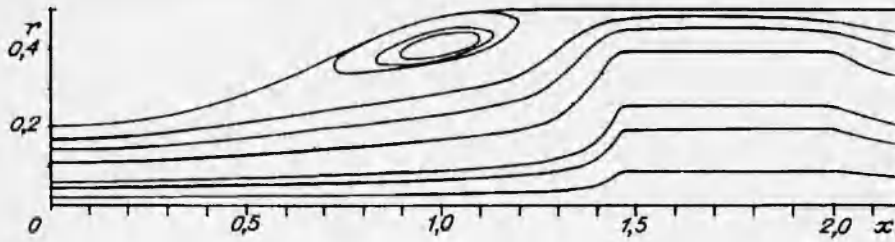


Рис. 6

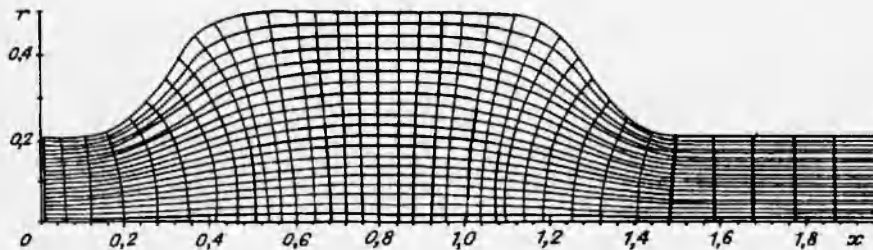


Рис. 7

Из результатов численных расчетов можно заключить, что в диффузорах канала Витошинского при малых числах Рейнольдса ($Re \leq 60$) устанавливается безотрывное течение, а при $Re \geq 100$ перед пористой вставкой возникает рециркуляционная зона.

На рис. 7 представлена криволинейная сетка, ограниченная линиями

$$x = 0, \quad x = 2,5, \quad r = 0,$$

$$r = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \operatorname{th}(R(x-x_0)) = f_1(x) \quad \text{при } 0 \leq x \leq 0,6,$$

$$r = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \operatorname{th}(R(x_{0p}-x)) = f_2(x) \quad \text{при } 1 \leq x \leq 1,5, \quad (12)$$

$$r = f_1(0,6) \quad \text{при } 0,6 \leq x \leq 1,$$

$$r = f_2(1,5) \quad \text{при } 1,5 \leq x \leq 2,5$$

$$(x_0 = 0,3, \quad x_{0p} = 1,3).$$

На рис. 8, 9 приводятся результаты расчетов для области, определенной формулами (12). На рис. 8,а,б показаны изолинии функции тока и вихря скорости при $Re = 250, \varepsilon = 0,4$. На рис. 9 приведены значения вихря скорости на твердой стенке при различных значениях Re : линии 1-3 соответствуют $Re=1000, 500, 100$. При этом $\varepsilon = 0,2 \div 0,3$. Заметим, что с увеличением Re на стенке перед пористой вставкой значения вихря скорости растут.

По результатам многочисленных расчетов можно заключить, что течение в трубах с пористой вставкой является вихревым и вихрь зарождается в результате взаимодействия текущей среды с пористым материалом. В пристенных течениях зарождение и диффузия вихрей происходят от стенок канала. Увеличение значений коэффициента сопротивления пористой среды при одинаковых числах Рейнольдса слабо влияет на объем вихревой зоны, так как пористая среда расположена вдали от диффузорной части

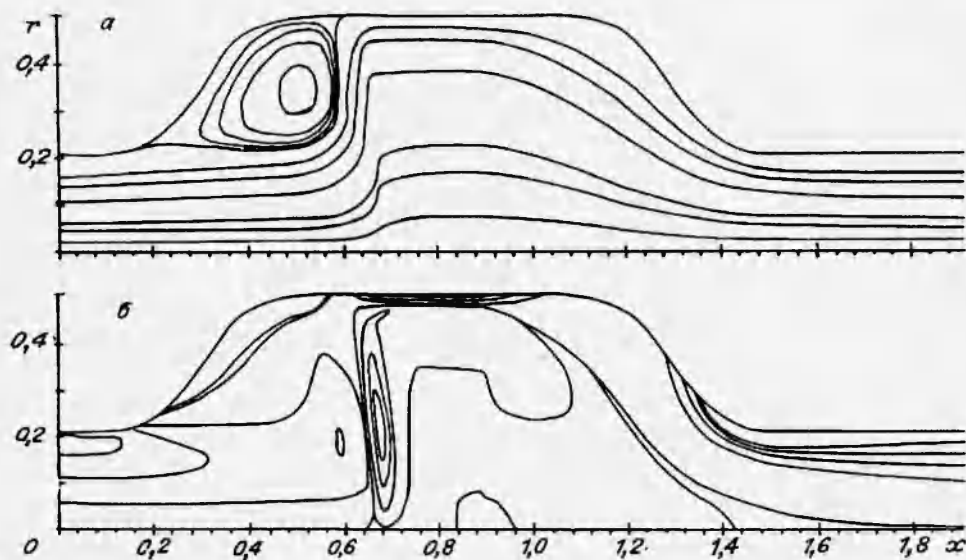


Рис. 8

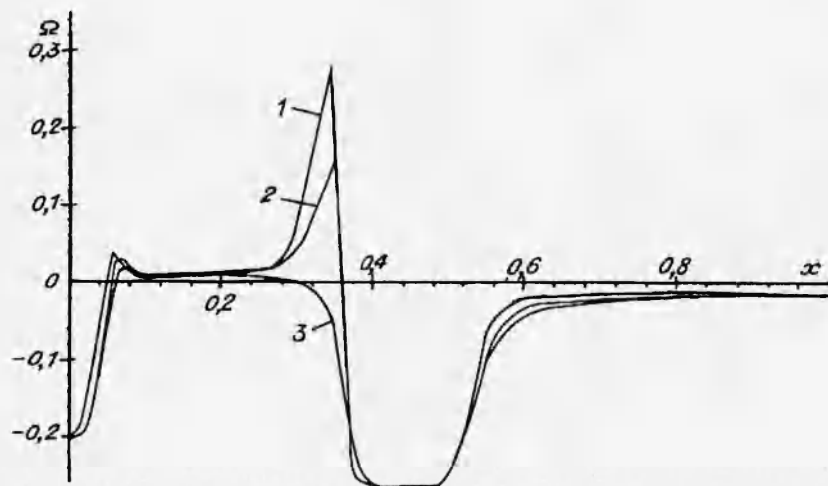


Рис. 9

трубы.

На основании проведенных расчетов также установлено, что:

- при любых режимах определяющих параметров происходит торможение потока жидкости перед пористой вставкой;
- характер течений через зернистый слой по горизонтальным сечениям вставки близок к одномерному и слабо зависит от формы подвода жидкости (при постоянном расходе);
- обнаруживается появление неоднородностей продольной компоненты скорости в виде так называемых «ушей», которые сильно зависят от коэффициента пористости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширко И. В. Численное моделирование течений в гранулированных средах // Численное моделирование в аэрогидродинамике. М.: Наука, 1986.

- С. 236-245.
2. Герасимов Б. П., Демешев Р. С., Ионкин А. А., Чурбанов А. Г. Численное исследование гидродинамики и теплообмена в пористых средах. М., 1987. (Препр. / АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 185).
 3. Темирбеков Н. М. Численное моделирование гидродинамики вязкого газа в канале с пористой вставкой // Теория функций, уравнения математической физики и их приложения. Алма-Ата, 1987. С. 54-58.
 4. Данаев Н. Т., Ершин Ш. А., Жапбасбаев У. К., Кулумбаева М. Ш. Численное исследование движения вязкой несжимаемой жидкости в канале с проницаемой перегородкой // Вестн. АН КазССР. 1987. № 10. С. 64-70.
 5. Накоряков В. Е., Мухин В. А., Волков В. И. Экспериментальное исследование поля скорости в неподвижном зернистом слое // Процессы переноса в аппаратах энергохимических производств. Новосибирск, 1985. С. 138-150.
 6. Johnston W., Dyblos A., Edwards R. Measurement of fluid velocity inside porous media with laser anemometer // Phys. Fluids. 1975. V. 18, N 7. P. 913-914.
 7. Аэров М. Э., Тодес О. М., Наринский Д. А. Аппараты со стационарным зернистым слоем. Л.: Химия, 1979.
 8. Данаев Н. Т. Об одной возможности численного построения ортогональных сеток // Численные методы механики сплошной среды. Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. механики. 1983. Т. 14, № 3. С. 42-53.
 9. Вабищевич П. Н. Реализация краевых условий при решении уравнений Навье — Стокса в переменных «функция тока, вихрь скорости» // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 1. С. 22-26.
 10. Данаев Н. Т., Смагулов Ш. Об одной методике численного решения уравнений Навье — Стокса в переменных (ψ, ω) // Моделирование в механике: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. механики. 1991. Т. 5, № 4. С. 38-47.

Поступила в редакцию 29/IX 1994 г.
