

если выбрать коэффициенты матриц A_{mk} , L_{kp} , P_{jl} таким образом, чтобы

$$r_j^2 b_j = \sum_{k,p,r=1}^n P_{jk}^{-1} H_{kpr} P_{pj} P_{rs} r_j r_s \neq 0,$$

$$\sum_{k,p,r=1}^n P_{jk}^{-1} H_{kpr} P_{pj} P_{rs} r_j r_s = 0 \quad (j \neq s, \quad 1 \leq k, p, r, j \leq n).$$

В соответствии со сказанным решение системы уравнений (1.8) при c_{0m} , $c_m^0 = \text{const}$ для изотерм (3.4) можно найти согласно преобразованиям (3.2), (3.4), (3.6) с учетом решений (2.8) для различных a_k , b_j , τ_m ($1 \leq k, j, m \leq n$).

Полученные рассмотренным способом аналитические решения позволяют проанализировать все многообразие фронтальных режимов многокомпонентной ($n \geq 3$) динамики адсорбции ($c_{0m} > c_m^0$) и десорбции ($c_{0m} < c_m^0$) для различных значений концентраций c_{0m} , c_m^0 ($1 \leq m \leq n$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кельцев Н. В. Основы адсорбционной техники. — М.: Химия, 1984.
2. Helfferich F., Klein K. Multicomponent chromatography: theory of interference. — N. Y.: Acad. Press, 1970.
3. Кузнецов Н. Н. Некоторые математические задачи хроматографии // Вычислительные методы и программирование: Сб. ст./Моск. гос. ун-т. — 1977. — Вып. 6.
4. Lax P. Hyperbolic systems of conservation // Comm. Pure and Appl. Math. — 1957. — V. 10, N 1.
5. Tai-Ping-Lin. Admissible solution of hyperbolic conservation laws // Mem. Amer. Math. Soc. — 1981. — V. 30, N 240.
6. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. — М.: Наука, 1979.
7. Филиппов Л. К. Динамика физической адсорбции смесей в изотермическом случае // ДАН СССР. — 1987. — Т. 294, № 2.
8. Филиппов Л. К. К теории динамики физической адсорбции многокомпонентных смесей // ДАН СССР. — 1985. — Т. 283, № 4.

г. Москва

Поступила 6/VII 1988 г.

УДК 532.51

О. Ю. Цвелодуб

О МНОЖЕСТВЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В АКТИВНО-ДИССИПАТИВНЫХ СРЕДАХ

Численно рассчитаны стационарные периодические решения. Показано, как в результате последовательного каскада бифуркаций возникает счетное множество га-ких решений.

В последнее время у исследователей волновых процессов в неконсервативных средах большой интерес вызывает уравнение вида

$$(1) \quad H_t + 4HH_x + H_{xx} + H_{xxx} = 0.$$

Интерес обусловлен тем, что, будучи по виду одним из простейших нелинейных уравнений, которые только можно себе представить, оно появляется при моделировании нелинейного поведения возмущений для достаточно большого класса активно-диссипативных сред и играет для них такую же большую роль, как широко известное уравнение КДВ для консервативных.

Так, при описании волн на поверхности пленки жидкости, свободно стекающей по наклонной плоскости, это уравнение получено в [1, 2], при противоточном движении пленки и газа — в [3], для возмущений на границе раздела двух вязких жидкостей в горизонтальном канале — в [4].

Линейный анализ устойчивости показывает, что тривиальное решение уравнения (1) $H = 0$ неустойчиво к возмущениям вида $\exp[i\alpha(x - ct)]$ с волновыми числами $\alpha < 1$ (возмущения с $\alpha > 1$ затухают). Рост таких возмущений со временем может быть прекращен за счет действия нелинейных эффектов, в результате сформируются установившиеся нелинейные режимы.

Из линейной теории устойчивости следует, что периодическое решение бесконечно малой амплитуды ответвляется от тривиального решения уравнения (1) при $\alpha = 1$. В ее окрестности решение малой, но конечной амплитуды можно получить аналитически в виде ряда по малому параметру, в качестве которого часто берут саму амплитуду. Оно продолжается в область линейной неустойчивости ($\alpha < 1$) — мягкий тип ветвления.

Для стационарно бегущей волны $H(\xi)$ ($\xi = x - ct$) (1) запишется в виде

$$(2) \quad -cH_{\xi} + 4HH_{\xi} + H_{\xi\xi} + H_{\xi\xi\xi} = 0.$$

При нахождении периодических решений уравнения (2) с длиной волны $\lambda = 2\pi/\alpha$ в силу того, что оно инвариантно относительно преобразований

$$(3) \quad H \rightarrow -H, \xi \rightarrow -\xi, c \rightarrow -c, H \rightarrow H + \text{const}, c \rightarrow c + 4 \text{const},$$

ограничимся рассмотрением только тех из них, для которых $c \geq 0$, $\int_0^{\lambda} H d\xi = 0$. Итак, мы приходим к краевой задаче, в которой собственным значением является фазовая скорость волны c , а параметром — волновое число α .

Периодические решения уравнения (2) заметной амплитуды находятся численно. Для этого они представляются в виде ряда Фурье

$$(4) \quad H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n \exp[i\alpha n \xi].$$

Так как H — действительная функция, то $H_{-n} = \bar{H}_n$ (черта означает операцию комплексного сопряжения). Оставляя в (4) первые N гармоник, подставим его в (2). Приравнявая коэффициенты при одинаковых экспонентах нулю, получим систему из N комплексных уравнений для вещественного неизвестного c и для N комплексных \bar{H}_1, \dots, H_N :

$$(5) \quad (-i\alpha cn - \alpha^2 n^2 + \alpha^4 n^4) H_n + 2i\alpha n \sum_{m=n-N}^N H_m H_{n-m} = 0, \quad n = 1, \dots, N.$$

В силу инвариантности уравнения (2) относительно координатного сдвига

$$(6) \quad \xi \rightarrow \xi + \text{const}$$

начало отсчета можно выбрать так, чтобы, например,

$$(7) \quad \text{Re}(H_1) = 0.$$

Таким образом, с учетом (7) система (5) определена. При ее численном решении использовался метод Ньютона. При обрывании ряда (4) число гармоник бралось таким образом, чтобы выполнялось соотношение $|H_N| / \sup |H_n| \leq 10^{-3}$. Для этого в расчетах число N приходилось менять в зависимости от α в пределах 10—40.

Основная трудность при решении (2) этим методом заключается в задании начального приближения, достаточно близкого к решению. В качестве такого приближения для первого семейства решений, ответвляющегося от тривиального при $\alpha = 1$, используется аналитическое решение. Продвижение по параметру α осуществляется по непрерывности, т. е. шаг по волновому числу выбирается таким, чтобы при использовании

в качестве начального приближения найденного ранее решения попадать в область сходимости.

В [5] определено, что первое семейство решений можно продолжить по непрерывности в сторону меньших волновых чисел до значения $\alpha_* = 0,4979$. В этой точке каждая нечетная гармоника ряда (4) зануляется. В результате имеем решение с волновым числом $\alpha = 2\alpha_* = 0,9958$, причем оказывается, что оно совпадает с полученным для этого α ранее. Таким образом, данное семейство замыкается само на себя. Отметим, что у него для всех α из области существования решения фазовая скорость $c = 0$. Из (3) следует, что такие решения антисимметричны. В настоящей работе ограничимся рассмотрением тех решений, для которых $c = 0$. Для чего с помощью регулярной процедуры проводится бифуркационный анализ ветвлений от первого семейства периодических стационарных решений уравнения (1). Показано, как возникает счетное множество таких решений. Часть множества найдена в [6, 7]. Отметим, что при выборе начала отсчета координаты ξ так, чтобы выполнялось (7), у этих решений зануляются реальные части всех гармоник. Подробно процедура решения проблемы изложена в [8], поэтому здесь очертим ее вкратце.

Пусть $H_0(\xi)$ — периодическое решение уравнения (2) с волновым числом α . Для исследования его устойчивости относительно бесконечно малых возмущений подставим в (1) $H = H_0(\xi) + h(\xi, t)$ и линеаризуем его по возмущению $h(\xi, t)$. Тогда получим линейное уравнение для h с периодическими по ξ коэффициентами того же периода, что и H_0 . С учетом того, что переменная t не входит в него явно, и в согласии с теоремой Флоке о решениях линейных уравнений с периодическими коэффициентами решение этого уравнения, ограниченное при всех ξ , представимо в виде [1]

$$(8) \quad h = \exp[-\gamma t + i\alpha Q\xi] \varphi(\xi) + \text{к. с.},$$

где φ — периодическая функция того же периода, что и $H_0(\xi)$; Q — вещественный параметр. После несложных преобразований получаем [1]

$$(9) \quad A\varphi + B\varphi' + (1 - 6\alpha^2 Q^2)\varphi'' + 4i\alpha Q\varphi''' + \varphi^{IV} = \gamma\varphi$$

($A = 4H_0' + 4i\alpha QH_0 - \alpha^2 Q^2 + \alpha^4 Q^4 - i\alpha Qc$, $B = 4H_0 + 2i\alpha Q - 4i\alpha^3 Q^3 - c$, штрих означает дифференцирование по ξ).

Таким образом, исследование устойчивости периодических стационарных решений уравнения (1) сводится к изучению при различных значениях Q спектра собственных значений γ , для которых (9) имеет периодические решения того же периода, что и H_0 . Решение устойчиво, если для любого Q у всех γ $\text{Re}(\gamma) \geq 0$. Из (8) ясно, что можно ограничиться рассмотрением Q на любом единичном интервале, например на $[-0,5 \div 0,5]$. Проводя над (9) операцию комплексного сопряжения, нетрудно убедиться, что достаточно рассмотреть решения (9) для $0 \leq Q \leq 0,5$.

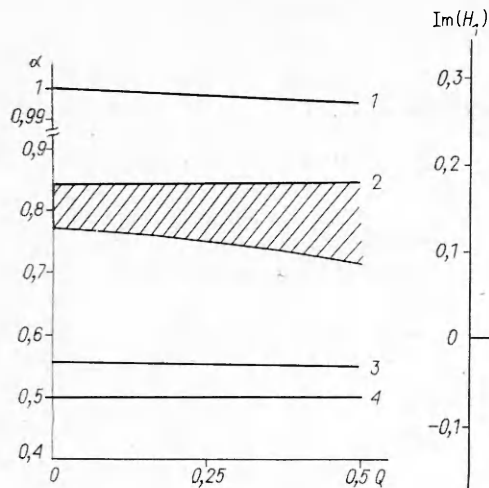
Краевая задача (9) решалась численно. Выполняя для этого над (9) фурье-преобразование, имеем бесконечную систему линейных алгебраических однородных уравнений на φ_n . Зануляя все φ_n с $n \geq N$, приходим к ее конечному приближению

$$[-i\alpha c(Q + n) - \alpha^2(Q + n)^2 + \alpha^4(Q + n)^4] \varphi_n + 4i\alpha(Q + n) \sum H_m \varphi_{n-m} = \gamma \varphi_n.$$

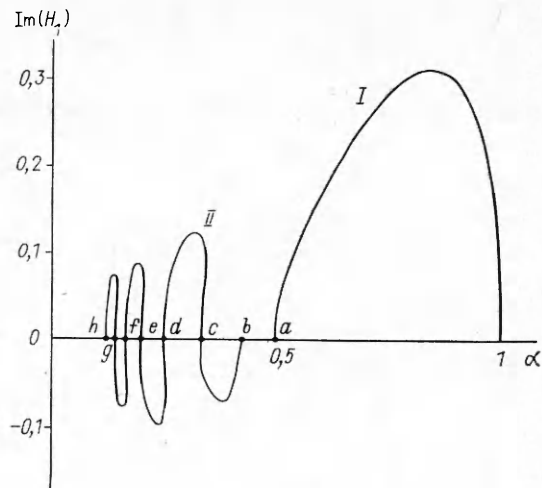
Из (8) вытекает, что если в некоторой точке (α, Q) реальная часть какого-нибудь собственного значения обращается в нуль, то от исходного ответвляется новый волновой режим. При $\text{Im}(\gamma) = 0$ возможно рождение нестационарных режимов. Новые стационарные решения возникают от решения \bar{H}_0 , если

$$(10) \quad \gamma(\alpha, Q) = 0.$$

При Q иррациональном рождается двоякопериодический режим. Если $Q = P/r$ — рациональное число, то образуется периодический по ξ режим с новым волновым числом $\alpha_{\text{new}} = \alpha/r$. При нахождении новых реше-



Р и с. 1



Р и с. 2

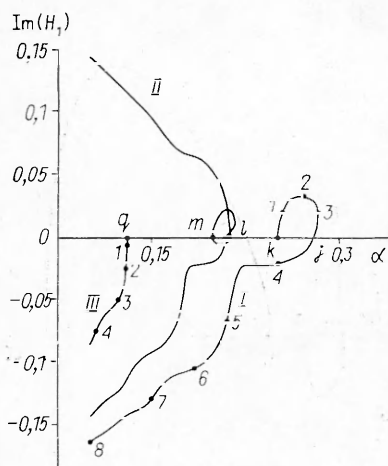
ний уравнения (2) для волновых чисел из окрестности α_{new} в качестве начального приближения используется выражение (8). Функция h в нем берется пропорциональной собственной функции φ , удовлетворяющей уравнению (9) при собственном значении γ из (10). Расчеты показывают, что движение по непрерывности в окрестности этих точек удобнее осуществлять, используя в качестве изменяющегося параметра какую-нибудь из гармоник. В дальнейшем, переходя к параметру α , находим решение и для α , далеких от точки возникновения этого семейства α_{new} .

Некоторые результаты исследования устойчивости первого семейства решений представлены на рис. 1, взятом из [8, 9]. Здесь на плоскости (α, Q) штриховкой выделена область устойчивости. На ее нижней границе проходит через нуль только реальная часть одного из собственных значений. От этой линии рождаются соответствующие нестационарные режимы, т. е. имеет место бифуркация типа Ландау — Хопфа. Видно, что, в согласии с результатами [1], режимы с волновыми числами, принадлежащие интервалу $(0,837—0,778)$, устойчивы ко всем бесконечно малым плоским возмущениям. На кривых I—4 для какого-нибудь из собственных значений выполняется соотношение (10). В дальнейшем, говоря о новых решениях, ответвляющихся от этих кривых, будем называть их порождающими кривыми. С их помощью легко находятся волновые числа α_{new} , с которыми рождаются новые стационарные решения. Расчеты показывают, что решения хитроумно переплетаются между собой.

На рис. 2 продемонстрированы некоторые взаимные переходы новых решений друг в друга, представлена амплитуда первой гармоники $\text{Im}(H_1)$ в зависимости от α . Так как для уравнения (2) справедливо (3), то ясно, что все кривые на рис. 2 и 3 имеют свои зеркальные относительно оси $\text{Im}(H_1) = 0$ двойники, которые отвечают тому же решению, сдвинутому на полпериода (последние не показаны, чтобы не загромождать рисунки).

В силу (6) все решения можно взять с $\text{Im}(H_1) \geq 0$, но используемое представление позволяет более наглядно увидеть, как решения переходят друг в друга. На рис. 2, 3 именно точки, где $\text{Im}(H_1) = 0$, кроме особо оговариваемых случаев, и являются точками рождения новых решений. Если эти точки связаны с ветвлением от $Q = 1/2$, то в них рождается одно новое решение (см., например, точки a и b , рис. 2), если c $Q = P/r$, $r \geq 3$, то два.

На рис. 2 кривая I демонстрирует, как первое семейство исчезает, замыкаясь на семейство, рожденное от первого же с максимально возможным новым волновым числом, — точка a ($\alpha_a = 0,4979$). Действительно, в этой точке возникает решение, ответвляющееся от кривой I (см. рис. 1) с $Q = 1/2$, $\alpha = 0,9958$. В дальнейшем при описании новых семейств реше-



Р и с. 3

вляющееся от этой же кривой с $Q = 1/(r + 1)$.

Похожее утверждение встречается в [6]. Там с использованием общей теории ветвления решений нелинейных уравнений фактически исследованы некоторые бифуркации от кривых 1 и 2 с $Q = 1/r$ и полуаналитически определены точки ветвления a, b, c, d (и j , см. рис. 3). Полученные в [6] волновые числа $\alpha_a = 0,4979$, $\alpha_b = 0,4352$, $\alpha_c = 0,3323$, $\alpha_d = 0,2494$, $\alpha_f = 0,2923$ достаточно близки к найденным нашим методом: $\alpha_a = 0,4979$, $\alpha_b = 0,4211$, $\alpha_c = 0,3323$, $\alpha_d = 0,2494$, $\alpha_j = 0,2803$. В [6] развитие этих решений было прослежено до $\alpha \approx 0,25$ и на основании проведенных расчетов сделан вывод о том, что решение уравнения (2) с периодом $2\pi r$, бифурцирующее от решения первого семейства периода 2π , переходит в решение с периодом $2\pi(r + 1)$. Однако наши исследования ветвлений от кривых 2—4 показывают, что это утверждение не является случаем общего положения.

Так, при ветвлении от кривой 2 с $Q = 1/3$ одно из решений продолжается монотонно по α вплоть до минимальных значений волновых чисел ($\alpha_{\min} = 0,1$). Второе решение отщепляется в сторону больших α , затем быстро заворачивает и сливается с решением, порождаемым кривой 4 с $Q = 1/2$. Эти три семейства представлены на рис. 3 линией I (соответствующие им профили волн даны на рис. 4). Здесь и на рис. 4 и 5 номера профилей однозначно связаны с пронумерованными точками на отвечающих им кривых рис. 3.

Заметим, что в момент зарождения волновые числа семейств, порождаемых кривой I с $Q = 1/4$ и кривой 4 с $Q = 1/2$, очень близки: $\alpha_d = 0,2494$ и $\alpha_h = 0,2505$ соответственно. Тем не менее данный метод анализа бифуркаций вполне однозначно их различает.

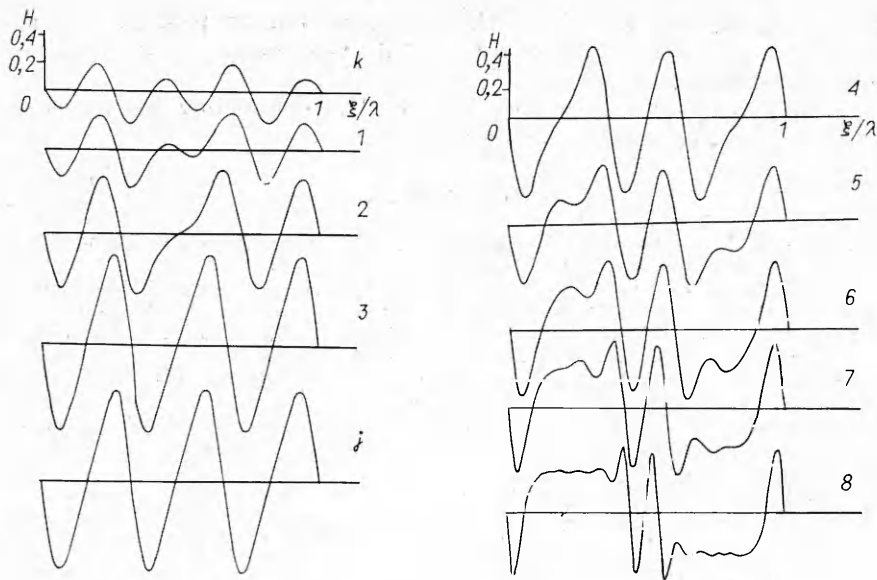
Семейства решений, возникающие от кривой 2 с $Q = 1/4$, эволюционируют с изменением α , подобно семействам, рождающимся от этой же кривой с $Q = 1/3$. Действительно, одно из них продолжается от точки зарождения этих семейств $\alpha_l = 0,2099$ в сторону меньших α и существует вплоть до α_{\min} . Второе, отщепившись в сторону больших α , затем поворачивает в область меньших α и может быть продолжено до $\alpha_m = 0,1992$. Эта точка, как показывает анализ, — точка рождения двух новых семейств от кривой I с $Q = 2/5$. Таким образом, опять имеет место слияние двух различных семейств.

Своеобразие точки α_m по сравнению с подобными точками, рассмотренными выше, состоит в том, что в согласии с (8) в ее окрестности определяющей является вторая гармоника $\text{Im}(H_2)$, а не первая, как при ветвлении с $Q = 1/r$.

Второе семейство, возникающее в точке α_m , также продолжается в область малых α по крайней мере до α_{\min} . На плоскости $(\text{Im}(H_1), \alpha)$ это

ний, рождающихся непосредственно от первого семейства по кривым 1—4, говоря о соответствующей порождающей кривой, не будем каждый раз подчеркивать, что речь идет о кривых с рис. 1.

Кривая II (рис. 2) доказывает, что новые семейства решений могут переходить друг в друга. Ее граничная точка b связана с ветвлением от кривой 2 с $Q = 1/2$. Двигаясь по непрерывности вдоль этого решения, последовательно проходим через точки рождения новых семейств решений, связанных с ветвлением от кривой I с $Q = 1/3; 1/4; 1/5; 1/6; 1/7; 1/8$ (точки c, d, e, f, g, h). На основании представленных результатов появляется соблазн объявить, что новые решения, бифурцирующие от кривой I с $Q = 1/r$, при уменьшении α переходят в решение, ответ-



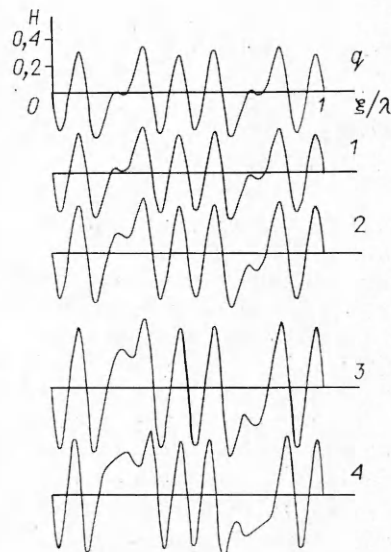
Р и с. 4

решение сначала идет в область больших α , пересекает ось абсцисс в точке $\alpha_+ = 0,211$ и затем уже монотонно уходит в область малых α . В отличие от всех других точек, лежащих на пересечении кривых (см. рис. 2 и 3) с этой осью, точка α_+ не связана с рождением каких-либо новых решений. В ней обращается в нуль только одна гармоника $\text{Im}(H_1)$. В частности, мнимая часть второй гармоники $\text{Im}(H_2)$ при прохождении этой точки в указанном направлении монотонно растет по абсолютной величине. На рис. 3 семейства решений, зарождающиеся в точках α_l и α_m , представлены линией II.

Для всех рассмотренных семейств периодических решений уравнения (2) значения фазовой скорости удовлетворяют $c = 0$. Легко показать, что при $\alpha \rightarrow 0$ они не могут переходить в солитонные решения. Поэтому эти семейства или существуют на конечном интервале волновых чисел, замыкаясь между собой, или продолжаются до любых малых α . С уменьшением α на периоде волны появляется все больше и больше локальных максимумов и минимумов.

Из приведенных примеров ветвлений от кривых 1—4 рис. 1 видно, как с уменьшением α возникают все новые и новые решения. При этом расстояния между точками зарождения новых режимов уменьшаются, и в пределе $\alpha \rightarrow 0$ имеется счетное множество решений. В свою очередь, исследуя устойчивость полученных решений, на плоскости (α, Q) можно получить новые порождающие кривые (10), аналогичные кривым 1—4 рис. 1. Ясно, что в принципе эту процедуру можно выполнять неограниченное число раз.

В качестве иллюстрации к сказанному на рис. 5 приведено семейство, возникающее в результате такого «вторичного» ветвления. Этот режим ответвился от семейства, представленного на рис. 3 частью кривой I, лежащей выше оси абсцисс. Напомним, что оно возникает при



Р и с. 5

ветвлении от кривой 4 с $Q = 1/2$. Ветвление нового режима произошло от точки $\alpha = 0,2602$ также с $Q = 1/2$. Отвечающая ему амплитуда первой гармоники дана на рис. 3 линией III.

Автор выражает благодарность Ю. Я. Трифонову за проведение некоторых расчетов и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1974.— № 3.
2. Krishna M. V. G., Lin S. P. Nonlinear stability of a viscous film with respect to three dimensional side-band disturbances // Phys. Fluids.— 1977.— V. 20, N 8.
3. Chang H.-C., Chen L.-H. Nonlinear waves on liquid film surfaces. 1. Flooding in a vertical tube // Chem. Engng Sci.— 1986.— V. 41, N 10.
4. Hooper A. P., Crimshaw R. Nonlinear instability at the interface between two viscous fluids // Phys. Fluids.— 1984.— V. 28.— P. 37—45.
5. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых движений в слое вязкой жидкости на наклонной плоскости // Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах.— Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1977.
6. Демехин Е. А. Ветвление решения задачи о стационарных бегущих волнах в слое вязкой жидкости на наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1983.— № 3.
7. Chang H.-C., Chen L.-H. Nonlinear waves on liquid film surfaces. 2. Bifurcation analysis // Chem. Engng Sci.— 1986.— V. 41, N 10.
8. Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю. О стационарно бегущих решениях эволюционного уравнения для возмущений в активно-диссипативной среде.— Новосибирск, 1988.— (Препр./ИТ СО АН СССР; № 188—88).
9. Трифонов Ю. Я. Бифуркации стационарных режимов в диссипативных средах // V Всесоюз. школа молодых ученых и специалистов: современные проблемы теплофизики: Тез. докл.— Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1988.

г. Новосибирск

Поступила 5/VII 1988 г.

УДК 532.59

А. А. Коробкин

ЗАДАЧА КОШИ — ПУАССОНА ДЛЯ БАСЕЙНА С ВЕРТИКАЛЬНЫМ БАРЬЕРОМ

Епервые задача рассеяния монохроматической волны, падающей на погруженную вертикальную пластину, решена в [1]. Дальнейшие обобщения этой задачи содержатся в [2—5]. Нестационарная задача рассмотрена в [6], ее решение дает асимптотику течения при больших временах, но не позволяет проследить эволюцию процесса.

В настоящей работе решение нестационарной задачи выписывается в квадратурах, что позволяет детально исследовать ее свойства. Это достигается с помощью интеграла задачи [6] и метода аналитического продолжения.

1. Рассматривается плоская линейная начально-краевая задача

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \Delta \varphi &= 0 \text{ в } \Omega, \quad \varphi_{tt} + \varphi_y = 0 \text{ (} y = 0 \text{),} \\ \varphi_x &= 0 \text{ на } \Gamma, \quad \varphi = 0, \quad \psi_t = -\delta(x - x_0) \text{ (} t = 0, y = 0 \text{),} \end{aligned}$$

которая описывает движение жидкости, вызванное начальным возмущением свободной границы. В момент времени $t = 0$ поверхность жидкости имеет концентрированное возвышение площади, равной единице, в окрестности точки x_0 , при $t > 0$ это возвышение распадается под действием сил тяжести. Правая декартова система координат сориентирована так, что барьер Γ лежит в плоскости $x = 0$, а направление оси y противоположно направлению ускорения свободного падения. Соотношения (1.1) записаны в безразмерных переменных, причем масштабы длины и скорости выбираются таким образом, что число Фруда задачи и глубина погружения барьера равны единице. Потенциал скоростей $\varphi(x, y, t, x_0)$ зависит от x_0 как от параметра, область течения $\Omega = \{x, y | y < 0, x \in R^1\} \setminus \Gamma$, $\Gamma = \{x, y | x = 0, y < -1\}$. Функция φ является фундаментальным решением задачи Коши — Пуассона в области Ω , так как с ее помощью решение общей задачи выписывается в квадратурах.