

УДК 536.21

## НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ПОЛОМ СОСТАВНОМ ЦИЛИНДРЕ

В. В. Мельников

Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики, 456770 Снежинск  
E-mail: melnik@snz.ru

Представлено решение задачи о нестационарном теплообмене в ограниченных полых цилиндрах, состоящих из различных материалов и сопряженных по торцам. В объеме цилиндров происходит тепловыделение известной интенсивности, зависящее от времени и координат цилиндра. Для решения используются конечные интегральные преобразования по двум координатам.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, составной цилиндр, конечное интегральное преобразование, граничные условия.

В отличие от известной [1] стационарной задачи рассматривается нестационарная задача теплопроводности для полого составного цилиндра, на внешних границах которого принимаются условия теплообмена первого, второго или третьего рода, зависящие как от координаты, так и от времени. На границе сопряжения составного цилиндра осуществляется полный тепловой контакт (граничные условия четвертого рода). Кроме того, принимается, что в объеме цилиндра происходит тепловыделение, зависящее от координат и времени. Цилиндрическая система координат и геометрические размеры составного цилиндра приведены на рис. 1. Задача определения температурного поля в цилиндре может быть представлена в виде двух уравнений теплопроводности, условий на внешних границах и на границе сочленения цилиндров, а также начальных условий.

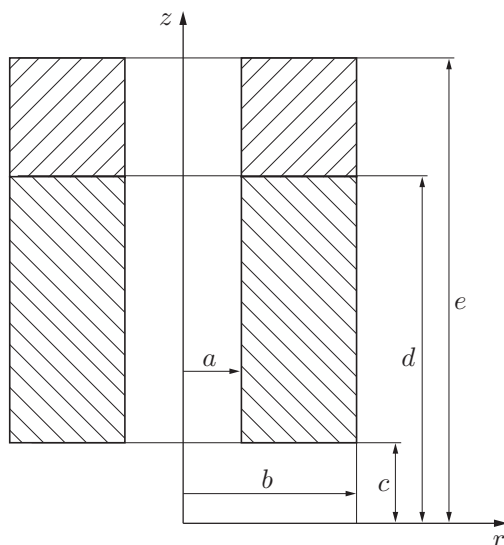


Рис. 1. Геометрия составного цилиндра

Уравнения теплопроводности:

$$\frac{1}{\chi_1} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{1}{\lambda_1} w_1, \quad a \leq r \leq b, \quad c \leq z \leq d, \quad (1)$$

$$T_1 = T_1(\tau, r, z);$$

$$\frac{1}{\chi_2} \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \frac{1}{\lambda_2} w_2, \quad a \leq r \leq b, \quad d \leq z \leq e, \quad (2)$$

$$T_2 = T_2(\tau, r, z);$$

граничные условия (условия первого рода):

— на цилиндрических поверхностях

$$T_1|_{r=a} = T_{1a}(\tau, z), \quad T_1|_{r=b} = T_{1b}(\tau, z), \quad T_2|_{r=a} = T_{2a}(\tau, z), \quad T_2|_{r=b} = T_{2b}(\tau, z); \quad (3)$$

— на торцах цилиндра

$$T_1|_{z=c} = T_c(\tau, r), \quad T_1|_{z=d} = T_2|_{z=d}, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=d} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=d}, \quad T_2|_{z=e} = T_e(\tau, r); \quad (4)$$

начальные условия:

$$T_1|_{\tau=0} = T_{10}(r, z), \quad T_2|_{\tau=0} = T_{20}(r, z). \quad (5)$$

Здесь  $T_1$ ,  $T_2$  — температура в первом и втором цилиндрах соответственно;  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  — коэффициенты температуропроводности;  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  — коэффициенты теплопроводности;  $w_1$ ,  $w_2$  — мощности внутреннего тепловыделения в объеме цилиндров;  $\tau$  — время;  $r$ ,  $z$  — координаты цилиндров (радиус и высота);  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  — геометрические характеристики цилиндров (см. рис. 1).

Выполним следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\chi_1} y, & r &= \sqrt{\chi_1} x & \text{при } c \leq z \leq d, & a \leq r \leq b, \\ z &= \sqrt{\chi_2} y, & r &= \sqrt{\chi_2} x & \text{при } d \leq z \leq e, & a \leq r \leq b. \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда соотношения (1)–(5) примут вид

$$\frac{\partial Z_1}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial Z_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 Z_1}{\partial y^2} + \frac{\chi_1}{\lambda_1} w_{11}, \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1 \leq y \leq y_2, \quad (7)$$

$$Z_1(\tau, x, y) = T_1(\tau, r, z);$$

$$\frac{\partial Z_2}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 Z_2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial Z_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 Z_2}{\partial y^2} + \frac{\chi_2}{\lambda_2} w_{22}, \quad x_3 \leq x \leq x_4, \quad y_3 \leq y \leq y_4, \quad (8)$$

$$Z_2(\tau, x, y) = T_2(\tau, r, z);$$

$$Z_1|_{x=x_1} = T_{1a}(\tau, y), \quad Z_1|_{x=x_2} = T_{1b}(\tau, y), \quad Z_2|_{x=x_3} = T_{2a}(\tau, y), \quad Z_2|_{x=x_4} = T_{2b}(\tau, y); \quad (9)$$

$$Z_1|_{y=y_1} = T_c(\tau, x), \quad Z_1|_{y=y_2} = Z_2|_{y=y_3}, \quad (10)$$

$$b_1 \frac{\partial Z_1}{\partial y} \Big|_{y=y_2} = b_2 \frac{\partial Z_2}{\partial y} \Big|_{y=y_3}, \quad Z_2|_{y=y_4} = T_e(\tau, x);$$

$$Z_1|_{\tau=0} = T_{10}(x, y), \quad Z_2|_{\tau=0} = T_{20}(x, y), \quad (11)$$

где  $y_1 = c/\sqrt{\chi_1}$ ;  $y_2 = d/\sqrt{\chi_1}$ ;  $y_3 = d/\sqrt{\chi_2}$ ;  $y_4 = e/\sqrt{\chi_2}$ ;  $x_1 = a/\sqrt{\chi_1}$ ;  $x_2 = b/\sqrt{\chi_1}$ ;  $x_3 = a/\sqrt{\chi_2}$ ;  $x_4 = b/\sqrt{\chi_2}$ ;  $b_1 = \lambda_1/\sqrt{\chi_1}$ ;  $b_2 = \lambda_2/\sqrt{\chi_1}$ ;  $w_{11}(\tau, x, y) = w_1(\tau, r, z)$ ;  $w_{22}(\tau, x, y) = w_2(\tau, r, z)$ .

Для решения системы (7)–(11) определим интегральное преобразование

$$\bar{Z}(\tau, x, s) = A_1 \int_{y_1}^{y_2} Z_1(\tau, x, y) U_1(sy) dy + A_2 \int_{y_3}^{y_4} Z_2(\tau, x, y) U_2(sy) dy, \quad (12)$$

где функции  $U_1(sy)$ ,  $U_2(sy)$  удовлетворяют следующим уравнениям и граничным условиям:

$$\frac{d^2 U_1}{dy^2} + s^2 U_1 = 0 \quad (y_1 \leq y \leq y_2), \quad \frac{d^2 U_2}{dy^2} + s^2 U_2 = 0 \quad (y_3 \leq y \leq y_4); \quad (13)$$

$$U_1|_{y_1} = 0, \quad U_1|_{y_2} = U_2|_{y_3}, \quad b_1 \frac{dU_1}{dy} \Big|_{y_2} = b_2 \frac{dU_2}{dy} \Big|_{y_3}, \quad U_2|_{y_4} = 0. \quad (14)$$

Уравнения (13) имеют решения

$$U_1(sy) = C_1 \sin sy + C_2 \cos sy, \quad U_2(sy) = C_3 \sin sy + C_4 \cos sy,$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — произвольные постоянные;  $s$  — характеристические числа.

Из условий (14) следует система уравнений

$$\begin{aligned} C_1 \sin sy_1 + C_2 \cos sy_1 &= 0, \\ C_1 \sin sy_2 + C_2 \cos sy_2 - C_3 \sin sy_3 - C_4 \cos sy_3 &= 0, \\ b_1(C_1 \cos sy_2 - C_2 \sin sy_2) - b_2(C_3 \cos sy_3 - C_4 \sin sy_3) &= 0, \\ C_3 \sin sy_4 + C_4 \cos sy_4 &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Система уравнений (15) имеет нетривиальное решение лишь в том случае, если ее определитель обращается в нуль. Из этого условия следует уравнение для определения характеристических чисел  $s$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0, \quad (16)$$

где  $a_{11} = \sin sy_1$ ;  $a_{12} = \cos sy_1$ ;  $a_{21} = \sin sy_2$ ;  $a_{22} = \cos sy_2$ ;  $a_{23} = -\sin sy_3$ ;  $a_{24} = -\cos sy_3$ ;  $a_{31} = b_1 \cos sy_2$ ;  $a_{32} = -b_1 \sin sy_2$ ;  $a_{33} = -b_2 \cos sy_3$ ;  $a_{34} = b_2 \sin sy_3$ ;  $a_{43} = \sin sy_4$ ;  $a_{44} = \cos sy_4$ .

Путем несложных преобразований, исключив неопределенные константы  $C_2, C_3, C_4$ , получим для функций  $U_1(sy)$  и  $U_2(sy)$  следующие выражения:

$$U_1(sy) = C_1(\sin sy + f_1 \cos sy), \quad U_2(sy) = C_1(f_3 \sin sy + f_4 \cos sy). \quad (17)$$

В коэффициенты  $f_i$  ( $i = 1, 3, 4$ ) входят величины  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, \dots$

В интегральном преобразовании (12) и выражениях (17) остаются неопределенными константы  $A_1, A_2, C_1$ . Значения  $A_1, A_2$  определяются из условия ортогональности функций  $U_1(sy)$  и  $U_2(sy)$ , а  $C_1$  — из условия их ортонормированности.

Ортогональность функций предполагает выполнение соотношений

$$\int_{y_1}^{y_2} U_1(sy) U_1(py) dy = 0, \quad \int_{y_3}^{y_4} U_2(sy) U_2(py) dy = 0 \quad \text{при } s \neq p, \quad \text{которые следуют из ра-}$$

венства  $J = A_1 \int_{y_1}^{y_2} U_1(sy) U_1(py) dy + A_2 \int_{y_3}^{y_4} U_2(sy) U_2(py) dy = 0$  и граничных условий (14)

при  $s \neq p$ ,  $A_1 = 1/b_2$ ,  $A_2 = 1/b_1$ . Докажем это утверждение.

Величину  $J$  с использованием уравнений (13) можно записать в виде

$$J = -\frac{A_1}{p^2} \int_{y_1}^{y_2} U_1(sy) \frac{d^2 U_1}{dy^2} dy - \frac{A_2}{p^2} \int_{y_3}^{y_4} U_2(sy) \frac{d^2 U_2}{dy^2} dy.$$

Интегрируя два раза по частям каждый интеграл, получим

$$J = -\frac{A_1}{p^2} \left[ U_1(sy) \frac{dU_1(py)}{dy} \Big|_{y_1}^{y_2} - \frac{dU_1(sy)}{dy} U_1(py) \Big|_{y_1}^{y_2} + \int_{y_1}^{y_2} \frac{d^2 U_1(sy)}{dy^2} U_1(py) dy \right] - \\ - \frac{A_2}{p^2} \left[ U_2(sy) \frac{dU_2(py)}{dy} \Big|_{y_3}^{y_4} - \frac{dU_2(sy)}{dy} U_2(py) \Big|_{y_3}^{y_4} + \int_{y_3}^{y_4} \frac{d^2 U_2(sy)}{dy^2} U_2(py) dy \right].$$

Если учесть условия (14) и принять  $A_1 = 1/b_2$ ,  $A_2 = 1/b_1$ , то

$$J = \frac{s^2}{b_2 p^2} \int_{y_1}^{y_2} U_1(sy) U_1(py) dy + \frac{s^2}{b_1 p^2} \int_{y_3}^{y_4} U_2(sy) U_2(py) dy.$$

Сравнивая полученное выражение для  $J$  с первоначальным

$$\frac{A_1}{p^2} \int_{y_1}^{y_2} U_1(sy) U_1(py) dy + \frac{A_2}{p^2} \int_{y_3}^{y_4} U_2(sy) U_2(py) dy = \\ = \frac{s^2}{b_2 p^2} \int_{y_1}^{y_2} U_1(sy) U_1(py) dy + \frac{s^2}{b_1 p^2} \int_{y_3}^{y_4} U_2(sy) U_2(py) dy,$$

приходим к заключению, что последнее тождество может выполняться при  $s \neq p$  только

в том случае, если  $\int_{y_1}^{y_2} U_1(sy) U_1(py) dy = 0$  и  $\int_{y_3}^{y_4} U_2(sy) U_2(py) dy = 0$ .

Таким образом, доказана ортогональность функций  $U_1(sy)$ ,  $U_2(sy)$  и найдены величины  $A_1$ ,  $A_2$ . Определим коэффициент  $C_1$  так, чтобы указанные функции стали ортонормированными:

$$A_1 \int_{y_1}^{y_2} [U_1(sy)]^2 dy + A_2 \int_{y_3}^{y_4} [U_2(sy)]^2 dy = 1$$

или

$$A_1 \int_{y_1}^{y_2} [C_1(\sin sy + f_1 \cos sy)]^2 dy + A_2 \int_{y_3}^{y_4} [C_1(f_3 \sin sy + f_4 \cos sy)]^2 dy = 1.$$

Из этого соотношения следует, что  $C_1 = 1/\sqrt{I}$ , где

$$I = A_1 \left[ (1 + f_1^2) \frac{y_2 - y_1}{2} + \frac{f_1^2 - 1}{4s} (\sin 2sy_2 - \sin 2sy_1) - \frac{f_1}{2s} (\cos 2sy_2 - \cos 2sy_1) \right] + \\ + A_2 \left[ (f_3^2 + f_4^2) \frac{y_4 - y_3}{2} + \frac{f_4^2 - f_3^2}{4s} (\sin 2sy_4 - \sin 2sy_3) - \frac{f_3 f_4}{2s} (\cos 2sy_4 - \cos 2sy_3) \right].$$

Таким образом, интегральное преобразование (12) определено.

Подвергая интегральному преобразованию уравнения (7), (8), получим

$$A_1 \int_{y_1}^{y_2} \left( \frac{\partial Z_1}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial Z_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 Z_1}{\partial y^2} - \frac{\chi_1}{\lambda_1} w_{11} \right) U_1(sy) dy + \\ + A_2 \int_{y_3}^{y_4} \left( \frac{\partial Z_2}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 Z_2}{\partial x^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial Z_2}{\partial x} - \frac{\partial^2 Z_2}{\partial y^2} - \frac{\chi_2}{\lambda_2} w_{22} \right) U_2(sy) dy = 0. \quad (18)$$

В результате соотношение (18) примет вид

$$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial x} - s^2 \bar{Z} + FP_1(\tau, x, s) + FP_2(\tau, x, s), \quad (19)$$

где

$$FP_1(\tau, x, s) = A_1 \frac{dU_1}{dy} \Big|_{y_1} T_c(\tau, x) - A_2 \frac{dU_2}{dy} \Big|_{y_4} T_e(\tau, x); \quad (20)$$

$$FP_2(\tau, x, s) = A_1 \frac{\chi_1}{\lambda_1} \int_{y_1}^{y_2} w_{11} U_1(sy) dy + A_2 \frac{\chi_2}{\lambda_2} \int_{y_3}^{y_4} w_{22} U_2(sy) dy. \quad (21)$$

Уравнение (19) в силу определения интегрального преобразования (12) справедливо в интервалах  $x_1 \leq x \leq x_2$  и  $x_3 \leq x \leq x_4$ . Найдем его решение в каждом из этих интервалов, представив условия на границах  $x_1, x_2, x_3, x_4$  в виде

$$\bar{Z}_1|_{x=x_1} = \int_{y_1}^{y_2} U_1(sy) T_{1a}(\tau, y) dy, \quad \bar{Z}_1|_{x=x_2} = \int_{y_1}^{y_2} U_1(sy) T_{1b}(\tau, y) dy, \\ \bar{Z}_2|_{x=x_3} = \int_{y_3}^{y_4} U_2(sy) T_{2a}(\tau, y) dy, \quad \bar{Z}_2|_{x=x_4} = \int_{y_3}^{y_4} U_2(sy) T_{2b}(\tau, y) dy.$$

Для решения уравнения в интервалах  $x_1 \leq x \leq x_2$  и  $x_3 \leq x \leq x_4$  определим интегральные преобразования

$$\bar{\bar{Z}}_1(\tau, p, s) = \int_{x_1}^{x_2} x \bar{Z}(\tau, x, s) V_1(px) dx, \quad \bar{\bar{Z}}_2(\tau, q, s) = \int_{x_3}^{x_4} x \bar{Z}(\tau, x, s) V_2(qx) dx, \quad (22)$$

где  $V_1(px)$  и  $V_2(qx)$  — решения дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 V_1}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dV_1}{dx} + p^2 V_1 = 0, \quad \frac{d^2 V_2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dV_2}{dx} + q^2 V_2 = 0 \quad (23)$$

с граничными условиями

$$V_1|_{x_1} = 0, \quad V_1|_{x_2} = 0, \quad V_2|_{x_3} = 0, \quad V_2|_{x_4} = 0. \quad (24)$$

Решения уравнений (23) имеют вид [2]

$$V_1(px) = D_1 J_0(px) + D_2 Y_0(px), \quad V_2(qx) = D_3 J_0(qx) + D_4 Y_0(qx),$$

где  $D_1, D_2, D_3, D_4$  — произвольные постоянные;  $J_0(z), Y_0(z)$  — функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка;  $p, q$  — характеристические числа.

Следуя граничным условиям (24), получим две системы уравнений

$$\begin{aligned} D_1 J_0(px_1) + D_2 Y_0(px_1) = 0, & \quad D_1 J_0(px_2) + D_2 Y_0(px_2) = 0; \\ D_3 J_0(qx_3) + D_4 Y_0(qx_3) = 0, & \quad D_3 J_0(qx_4) + D_4 Y_0(qx_4) = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

которые имеют нетривиальные решения лишь в случае, если их определители обращаются в нуль. Отсюда получим два уравнения для определения характеристических чисел  $p$  и  $q$ :

$$\begin{vmatrix} J_0(px_1) & Y_0(px_1) \\ J_0(px_2) & Y_0(px_2) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} J_0(qx_3) & Y_0(qx_3) \\ J_0(qx_4) & Y_0(qx_4) \end{vmatrix} = 0. \quad (26)$$

Исключая из каждой системы (25) коэффициенты  $D_2, D_4$ , получим выражения для  $V_1(px), V_2(qx)$  в виде

$$V_1(px) = D_1 [J_0(px) + f_5 Y_0(px)], \quad V_2(qx) = D_3 [J_0(qx) + f_6 Y_0(qx)], \quad (27)$$

где  $f_5 = -J_0(px_1)/Y_0(px_1)$ ;  $f_6 = -J_0(qx_3)/Y_0(qx_3)$ .

Следует отметить, что решения (27) с граничными условиями (24) представляют ортогональные системы функций  $V_1(px), V_2(qx)$ . Потребовав, чтобы эта система функций

была ортонормированной, т. е.  $\int_{x_1}^{x_2} x [V_1(px)]^2 dx = 1, \int_{x_3}^{x_4} x [V_2(qx)]^2 dx = 1$ , определим кон-

станты  $D_1, D_2$ .

Тогда

$$D_1 = 1/\sqrt{I_1}, \quad D_2 = 1/\sqrt{I_2},$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= x_2^2 [J_0(px_2) + f_5 Y_0(px_2)]^2 / 2 + x_2^2 [J_1(px_2) + f_5 Y_1(px_2)]^2 / 2 - \\ &\quad - x_1^2 [J_0(px_1) + f_5 Y_0(px_1)]^2 / 2 - x_1^2 [J_1(px_1) + f_5 Y_1(px_1)]^2 / 2; \\ I_2 &= x_4^2 [J_0(qx_4) + f_6 Y_0(qx_4)]^2 / 2 + x_4^2 [J_1(qx_4) + f_6 Y_1(qx_4)]^2 / 2 - \\ &\quad - x_3^2 [J_0(qx_3) + f_6 Y_0(qx_3)]^2 / 2 - x_3^2 [J_1(qx_3) + f_6 Y_1(qx_3)]^2 / 2; \end{aligned}$$

$J_1, Y_1$  — функции Бесселя первого и второго рода первого порядка.

Таким образом, интегральные преобразования (22) определены.

Применим полученные интегральные преобразования к соотношениям (19)–(21):

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} x \left[ \frac{d\bar{Z}_1}{d\tau} - \frac{\partial^2 \bar{Z}_1}{\partial x^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial \bar{Z}_1}{\partial x} + s^2 \bar{Z}_1 - FP_1(\tau, x, s) - FP_2(\tau, x, s) \right] V_1(px) dx &= 0, \\ \int_{x_3}^{x_4} x \left[ \frac{d\bar{Z}_2}{d\tau} - \frac{\partial^2 \bar{Z}_2}{\partial x^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial \bar{Z}_2}{\partial x} + s^2 \bar{Z}_2 - FP_1(\tau, x, s) - FP_2(\tau, x, s) \right] V_2(qx) dx &= 0. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\bar{Z}}_1}{\partial \tau} - \int_{x_1}^{x_2} x \left[ \frac{\partial^2 \bar{Z}_1}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \bar{Z}_1}{\partial x} \right] V_1(px) dx + s^2 \bar{\bar{Z}}_1 - FP_3(\tau, p, s) &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\bar{Z}}_2}{\partial \tau} - \int_{x_3}^{x_4} x \left[ \frac{\partial^2 \bar{Z}_2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \bar{Z}_2}{\partial x} \right] V_2(qx) dx + s^2 \bar{\bar{Z}}_2 - FQ_3(\tau, q, s) &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} FP_3(\tau, p, s) &= \int_{x_1}^{x_2} x [FP_1(\tau, x, s) + FP_2(\tau, x, s)] V_1(px) dx; \\ FQ_3(\tau, q, s) &= \int_{x_3}^{x_4} x [FP_1(\tau, x, s) + FP_2(\tau, x, s)] V_2(qx) dx. \end{aligned}$$

Дифференциальные операторы под знаком интеграла в (28) после повторного интегрирования по частям преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} x \left[ \frac{\partial^2 \bar{Z}_1}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \bar{Z}_1}{\partial x} \right] V_1(px) dx &= FP_4(\tau, p, s) - p^2 \bar{\bar{Z}}_1, \\ \int_{x_3}^{x_4} x \left[ \frac{\partial^2 \bar{Z}_2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \bar{Z}_2}{\partial x} \right] V_2(qx) dx &= FQ_4(\tau, q, s) - q^2 \bar{\bar{Z}}_2. \end{aligned}$$

Уравнения (28) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\bar{Z}}_1}{d\tau} + (s^2 + p^2) \bar{\bar{Z}}_1 &= FP_3(\tau, p, s) + FP_4(\tau, p, s), \\ \frac{d\bar{\bar{Z}}_2}{d\tau} + (s^2 + q^2) \bar{\bar{Z}}_2 &= FQ_3(\tau, q, s) + FQ_4(\tau, q, s), \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} FP_4(\tau, p, s) &= x_1 \frac{dV_1}{dx} \Big|_{x_1} \bar{Z}_1 \Big|_{x_1} - x_2 \frac{dV_1}{dx} \Big|_{x_2} \bar{Z}_1 \Big|_{x_2}, \\ FQ_4(\tau, q, s) &= x_3 \frac{dV_2}{dx} \Big|_{x_3} \bar{Z}_2 \Big|_{x_3} - x_4 \frac{dV_2}{dx} \Big|_{x_4} \bar{Z}_2 \Big|_{x_4}. \end{aligned} \quad (30)$$

Начальные условия для уравнений (29) получим из (11), применив к ним интегральные преобразования (12) и (22):

$$\begin{aligned} \bar{\bar{Z}}_1 \Big|_{\tau=0} &= \int_{x_1}^{x_2} x \left[ A_1 \int_{y_1}^{y_2} T_{01}(x, y) U_1(sy) dy + A_2 \int_{y_3}^{y_4} T_{02}(x, y) U_2(sy) dy \right] V_1(px) dx, \\ \bar{\bar{Z}}_2 \Big|_{\tau=0} &= \int_{x_3}^{x_4} x \left[ A_1 \int_{y_1}^{y_2} T_{01}(x, y) U_1(sy) dy + A_2 \int_{y_3}^{y_4} T_{02}(x, y) U_2(sy) dy \right] V_2(qx) dx. \end{aligned}$$

Решения уравнений (29) имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{\bar{Z}}_1(\tau, p, s) &= \exp[-(s^2 + p^2)\tau] \left[ \int_0^\tau (FP_3(\tau, p, s) + FP_4(\tau, p, s)) \exp[(s^2 + p^2)\tau] d\tau + \bar{\bar{Z}}_1|_{\tau=0} \right], \\ \bar{\bar{Z}}_2(\tau, q, s) &= \exp[-(s^2 + q^2)\tau] \left[ \int_0^\tau (FQ_3(\tau, q, s) + FQ_4(\tau, q, s)) \exp[(s^2 + q^2)\tau] d\tau + \bar{\bar{Z}}_2|_{\tau=0} \right].\end{aligned}$$

В силу ортонормированности функций  $U_1(sx)$ ,  $U_2(sx)$ ,  $V_1(py)$ ,  $V_2(qy)$  окончательное решение задачи имеет вид

$$\begin{aligned}T_1(\tau, r, z) &= \sum_{p_i} \left( \sum_{s_j} \bar{\bar{Z}}_1(\tau, p_i, s_j) U_1(s_j y) \right) V_1(p_i x), \\ T_2(\tau, r, z) &= \sum_{q_i} \left( \sum_{s_j} \bar{\bar{Z}}_2(\tau, q_i, s_j) U_2(s_j y) \right) V_2(q_i x)\end{aligned}$$

(суммирование проводится по положительным корням  $p_i$ ,  $q_i$ ,  $s_j$  уравнений (16), (26)). Переход от координат  $x$ ,  $y$  к координатам  $r$ ,  $z$  осуществляется с помощью соотношений (6).

Полученное решение задачи теплопроводности составного цилиндра с граничными условиями первого рода на всех поверхностях цилиндра можно легко модифицировать и для иных граничных условий. В частности, на различных его поверхностях может осуществляться теплообмен с различными граничными условиями. При этом кроме граничных условий в исходных уравнениях (3), (4), (9), (10) и граничных условий (14), (24) изменятся также уравнения для определения характеристических чисел (16), (26) и выражения (20), (30).

Рассмотрим, например, следующие граничные условия:

на нижней и верхней границах составного цилиндра — условия второго рода

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=c} + g_1(\tau, r) = 0, \quad \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=e} - g_2(\tau, r) = 0;$$

на внутренней поверхности нижнего цилиндра — условие второго рода

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=a} + g_3(\tau, z) = 0,$$

на его наружной поверхности — условие третьего рода

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=b} + \alpha_1 [T_1|_{r=b} - T_{1\text{cp}}(\tau, z)] = 0;$$

на внутренней поверхности верхнего цилиндра — условие первого рода

$$T_2|_{r=a} = T_{2a}(\tau, z),$$

на его наружной поверхности — условие третьего рода

$$\lambda_1 \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=b} + \alpha_2 [T_2|_{r=b} - T_{2\text{cp}}(\tau, z)] = 0.$$

Здесь  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  — мощность тепловыделения;  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  — коэффициенты тепловыделения на поверхностях цилиндра;  $T_{\text{cp}}$  — температура окружающей среды.

Тогда первое и четвертое уравнения системы (15) принимают вид

$$C_1 \cos sy_1 - C_2 \sin sy_1 = 0, \quad C_3 \cos sy_4 - C_4 \sin sy_4 = 0,$$



Таблица 1  
Значения температуры на оси сплошного цилиндра

$z$ , см	$T$ , °C	
	Метод работы [1]	Настоящая работа
5,0	7,76	7,70
5,6	7,79	7,72
6,2	7,81	7,73
6,8	7,83	7,75
7,4	7,85	7,76
8,0	7,86	7,77
8,6	7,88	7,78
9,2	7,89	7,79
9,8	7,90	7,79
10,4	7,90	7,79
11,0	7,90	7,80

а уравнения (25) — вид

$$\begin{aligned}
 D_1 J_1(px_1) + D_2 Y_1(px_1) &= 0, \\
 D_1[-\lambda_1 p J_1(px_2) + \alpha_1 J_0(px_2)] + D_2[-\lambda_1 p Y_1(px_2) + \alpha_1 Y_0(px_2)] &= 0, \\
 D_3 J_0(qx_3) + D_4 Y_0(qx_3) &= 0, \\
 D_3[-\lambda_2 q J_1(qx_4) + \alpha_2 J_0(qx_4)] + D_4[-\lambda_2 q Y_1(qx_4) + \alpha_2 Y_0(qx_4)] &= 0.
 \end{aligned}$$

Выражения (20), (30) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 FP_1(\tau, x, s) &= A_1 U_1|_{y_1} g_1(\tau, x)/b_1 + A_2 U_2|_{y_4} g_2(\tau, x)/b_2, \\
 FP_4(\tau, p, s) &= x_1 V_1(px_1) \bar{g}_3(\tau, s)/\lambda_1 - x_2 V_1(px_2) \alpha_1 \bar{T}_{1cp}(\tau, s)/\lambda_1, \\
 FQ_4(\tau, q, s) &= x_3 \frac{dV_2}{dx} \Big|_{x_3} \bar{T}_{2a}(\tau, s)|_{x_3} + x_4 V_2(qx_4) \frac{\alpha_2}{\lambda_2} \bar{T}_{2cp}(\tau, s),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \bar{g}_3(\tau, s) &= \int_{y_1}^{y_2} U_1(sy) g_3(\tau, y) dy; & \bar{T}_{1cp}(\tau, s) &= \int_{y_1}^{y_2} U_1(sy) T_{1cp}(\tau, y) dy; \\
 \bar{T}_{2a}(\tau, s) &= \int_{y_3}^{y_4} U_2(sy) T_{2a}(\tau, y) dy; & \bar{T}_{2cp}(\tau, s) &= \int_{y_3}^{y_4} U_2(sy) T_{2cp}(\tau, y) dy.
 \end{aligned}$$

Остальные соотношения останутся неизменными.

При численной реализации задачи следует обращать внимание на точность и количество вычисляемых характеристических чисел, так как от этого зависит точность конечного результата.

Выполнено численное сравнение полученного аналитического решения задачи о нестационарном теплообмене в цилиндре и стационарного решения [1]. В табл. 1 приведены значения температур на оси сплошного цилиндра при идентичных исходных данных в представленном решении и решении [1].

В табл. 2, 3 даны значения температур, полученные при решении задачи о нестационарном теплообмене в полном составном цилиндре со следующими граничными условиями:

Таблица 2

Поле температур в верхней части полого составного цилиндра  
через 0,5 ч после начала процесса

$z$ , см	$T$ , °C					
	$r$ , см					
	10	11	12	13	14	15
11,0	-40,0	-40,0	-40,0	-40,0	-40,0	-40,0
10,4	151,2	65,4	34,0	21,8	17,8	18,4
9,8	250,4	140,5	86,9	64,3	56,6	56,7
9,2	313,5	193,4	126,0	95,7	85,1	84,6
8,6	355,6	228,3	152,0	116,5	104,1	103,3
8,0	389,4	248,5	165,9	127,6	114,4	114,5

Таблица 3

Поле температур в нижней части полого составного цилиндра  
через 0,5 ч после начала процесса

$z$ , см	$T$ , °C					
	$r$ , см					
	10	11	12	13	14	15
8,0	389,4	248,5	165,9	127,6	114,4	114,5
7,4	415,04	244,5	157,0	121,9	112,5	115,6
6,8	396,4	225,9	141,5	109,1	101,0	104,7
6,2	335,9	176,0	105,3	79,7	73,9	78,1
5,6	216,3	89,7	47,2	32,9	29,9	33,9
5,0	-40,0	-40,0	-40,0	-40,0	-40,0	-40,0

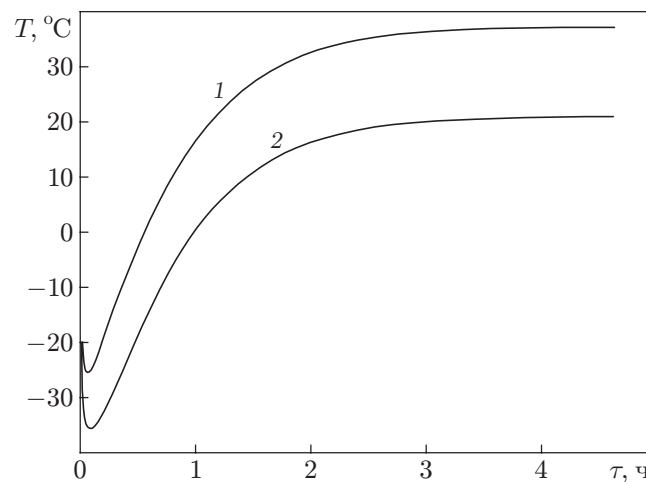


Рис. 2. Изменение температуры во времени в двух точках составного цилиндра:  
1 — в нижней части цилиндра; 2 — в верхней части цилиндра

на торцевых поверхностях цилиндра — условия первого рода (заданы температуры поверхностей  $T_1, T_2$ );

на внутренних цилиндрических поверхностях — условия второго рода (тепловыделение интенсивностью  $g_1, g_2$ );

на наружных цилиндрических поверхностях — условия третьего рода (теплообмен с окружающей средой с температурами  $T_{1c}, T_{2c}$  и коэффициентами теплообмена  $\alpha_1, \alpha_2$ ).

В объеме цилиндров происходит тепловыделение интенсивностью  $w_1$  и  $w_2$ . Начальные температуры цилиндров  $T_{10}$  и  $T_{20}$ . Исходные величины:  $a = 10$  см;  $b = 15$  см;  $c = 5$  см;  $d = 8$  см;  $e = 11$  см;  $\chi_1 = 4$  см<sup>2</sup>/с;  $\chi_2 = 5$  см<sup>2</sup>/с;  $\lambda_1 = 4,65$  Вт/(см·К);  $\lambda_2 = 7$  Вт/(см·К);  $\alpha_1 = 4,6$  Вт/(см<sup>2</sup>·К);  $\alpha_2 = 2,33$  Вт/(см<sup>2</sup>·К);  $g_1 = 1,16$  Вт/см<sup>2</sup>;  $g_2 = 2,32$  Вт/см<sup>2</sup>;  $w_1 = 0,29$  Вт/см<sup>3</sup>;  $w_2 = 0,29$  Вт/см<sup>3</sup>;  $T_{1c} = 1273$  К;  $T_{2c} = 1273$  К;  $T_1 = 233$  К;  $T_2 = 233$  К;  $T_{10} = 253$  К;  $T_{20} = 253$  К.

На рис. 2 приведены кривые изменения температуры во времени в нижнем и верхнем цилиндрах в точках  $[r = b, z = c + (d - c)/5]$  и  $[r = b, z = e - (e - d)/5]$  соответственно от начала процесса до наступления стационарного теплового состояния. Видно, что в начальные моменты времени температура в этих точках вначале падает до некоторых значений, а затем растет. Это объясняется близостью этих точек к поверхностям  $z = c$  и  $z = e$  с температурой  $T_1 = T_2 = 233$  К и воздействием внутреннего тепловыделения в цилиндрах мощностью  $w_1 = w_2 = 0,29$  Вт/см<sup>3</sup>. Уровень такого падения зависит также от теплофизических коэффициентов материала цилиндров.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Алифанов А. В., Голуб В. М.** Двумерное стационарное температурное поле системы ограниченных разнородных цилиндров, находящихся в идеальном тепловом контакте // Инж.-физ. журн. 2003. Т. 76, № 1. С. 173–177.
2. **Справочник** по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.

*Поступила в редакцию 31/III 2004 г.,  
в окончательном варианте — 15/VII 2004 г.*