

УДК 532.5

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ МОМЕНТНОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИ РАСПОЛОЖЕННЫМИ ВРАЩАЮЩИМИСЯ СФЕРАМИ

А. Аль-Ханая, Ш. Эль-Сапа*, Э. А. Ашмави*

Университет принцессы Нуры бинт Абдулрахман, 11671 Эр-Рияд, Саудовская Аравия

* Александрийский университет, Александрия, Египет

E-mails: amalhanaya@pnu.edu.sa, seelsapa@pnu.edu.sa, emad_ashm@yahoo.com

Решена задача об осесимметричном установившемся движении несжимаемой моментной жидкости между двумя неконцентрическими сферами, вращающимися с различными постоянными угловыми скоростями вокруг оси, на которой расположены диаметры сфер. При малых числах Рейнольдса решение построено с использованием полуаналитического метода, метода суперпозиции и метода коллокации. Исследовано влияние различных параметров задачи на величину крутящего момента, действующего на внутреннюю сферу. Проведено сравнение полученных результатов с известными данными для случая движения классической вязкой жидкости.

Ключевые слова: моментная жидкость, вращательное движение, эксцентрические сферы, кручение, метод коллокаций.

DOI: 10.15372/PMTF20220507

Введение. В последнее время исследованию движения неньютоновских жидкостей уделяется большое внимание. Одним из примеров неньютоновской жидкости является моментная жидкость [1]. Моментное движение жидкости обусловлено интенсивным движением молекул в жидкостях различного типа (жидких кристаллах, хладагентах, смазочных материалах, пропеллентах, биологических жидкостях и т. п.) [2].

В работе [3] получены точные решения задач о течении Пуазейля — Куэтта. В [4] с учетом скольжения исследована задача о нестационарном движении моментной жидкости вблизи вращающихся сфер. В [5] рассмотрено медленное движение частицы в моментной жидкости. Стационарное движение пористой сферы в моментной жидкости изучено в работе [6]. В [7] с использованием фазового пространства исследовано нестационарное движение моментной жидкости, заключенной между двумя параллельными пластинами.

В работе [8] аналитически решена задача о стационарном движении моментной жидкости в концентрической сферической полости. В [9] исследовано движение жидкости вокруг вращающегося осесимметричного тела. В [10] изучено движение густой жидкости вблизи вращающегося диска из композитного материала. Движение твердой частицы в моментной жидкости исследовано в работе [11]. В [12] изучено движение жидкости внутри сферы, вызванное медленным вращением жесткой частицы, расположенной эксцентрически с этой сферой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Университета принцессы Нуры бинт Абдулрахман (код проекта PNURSP2022R215).

© Аль-Ханая А., Эль-Сапа Ш., Ашмави Э. А., 2022

Во многих работах при решении различных задач гидродинамики используется метод граничных коллокаций. В [13] для решения задачи о движении вязкой жидкости в круглой трубе использован метод отражений. В работах [14–16] при решении задач о движении жидкости использовались численные методы. В [17] изучен осесимметричный поток несжимаемой микрополярной жидкости внутри двух сфер. В [18] с помощью уравнений Бринкмана исследовано квазиустойчивое движение двух сфер, вращающихся в вязкой жидкости вдоль их общей оси симметрии. В [19, 20] решены задачи о движении микрополярной жидкости при малых числах Рейнольдса. В работе [21] с использованием метода суперпозиции и метода граничных коллокаций исследовано поступательное движение двух коллинеарных жестких оброчей в несжимаемой моментной жидкости. В [22] проведен анализ движения моментной жидкости между двумя вращающимися сферами. Метод граничной коллокации используется при решении многих задач о движении жидкости [23–27].

В данной работе исследуется медленное стационарное движение моментной жидкости между двумя неконцентрическими сферами, вращающимися вокруг общего диаметра с различными угловыми скоростями.

1. Уравнения задачи. При малых числах Рейнольдса уравнения движения несжимаемой моментной жидкости без учета массовых сил и массовых моментов имеют вид [2]

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0; \quad (1)$$

$$\nabla p + \mu \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{q} + \eta \nabla \wedge \nabla \wedge \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{q} = 0, \quad (2)$$

где вектор \mathbf{q} — скорость жидкости; p — давление в жидкости; μ — динамическая вязкость; η — вязкость, обусловленная моментными напряжениями. При $\eta = 0$ уравнение движения (2) сводится к классическому уравнению Навье — Стокса. Напряжения t_{ij} и моменты m_{ij} вычисляются через компоненты тензора деформации и компоненты вектора поворота по формулам [2]

$$\begin{aligned} t_{ij} &= -p \delta_{ij} + 2\mu d_{ij} - e_{ijk} m_{sk,s}/2; \\ m_{ij} &= m \delta_{ij} + 4(\eta \omega_{j,i} + \eta' \omega_{i,j}), \end{aligned} \quad (3)$$

где m — след тензора моментных напряжений; η' — вторая вязкость, обусловленная моментными напряжениями; δ_{ij} — символ Кронекера; e_{ijk} — альтернирующий тензор; d_{ij} — компоненты тензора скорости деформации; $\boldsymbol{\omega}$ — вектор поворота:

$$d_{ij} = \frac{1}{2} (q_{i,j} + q_{j,i}), \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \wedge \mathbf{q}.$$

2. Вращение осесимметричной сферической частицы в моментной жидкости. Рассматривается осесимметричное вращательное движение моментной жидкости вокруг сферической частицы радиусом a_1 . Используется сферическая система координат (r, θ, φ) , начало которой расположено в центре сферы. В силу симметрии задачи все функции не зависят от координаты φ . Выражения для вектора скорости и вектора поворота имеют вид

$$\mathbf{q} = q_\varphi(r, \theta) \mathbf{e}_\varphi, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_r(r, \theta) \mathbf{e}_r + \omega_\theta(r, \theta) \mathbf{e}_\theta, \quad (4)$$

где $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ — единичные векторы вдоль координатных линий r, θ, φ . Исключая из уравнений (2), (4) давление, получаем уравнение

$$L_{-1}(L_{-1} - l^2)(r \sin \theta q_\varphi) = 0, \quad l^2 = a_1^2 \mu / \eta, \quad (5)$$

где L_{-1} — оператор Стокса в случае осесимметричного движения:

$$L_{-1} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1 - \zeta^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}, \quad \zeta = \cos \theta.$$

Ненулевыми компонентами вектора поворота являются компоненты ω_r и ω_θ :

$$\begin{aligned}\omega_r &= \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_r = \frac{1}{2} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta q_\varphi), \\ \omega_\theta &= \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_\theta = -\frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_\varphi).\end{aligned}$$

Из (3) следует выражение

$$m_{r\theta} = 4\eta \frac{\partial \omega_\theta}{\partial r} + 4\eta' \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} - \frac{\omega_\theta}{r} \right).$$

Общее решение дифференциального уравнения (5) записывается в виде

$$q_\varphi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n r^{-n-1} + B_n r^n + C_n r^{-1/2} I_{n+1/2}(lr) + D_n r^{-1/2} K_{n+1/2}(lr)] P_n^1(\cos \theta),$$

где $P_n^1(\cdot)$ — многочлены Лежандра первого рода порядка n ; $I_n(\cdot)$, $K_n(\cdot)$ — функции Бесселя первого и второго рода порядка n соответственно.

Выражения для компонент вектора поворота и компонент тензора моментных напряжений представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}2\omega_r &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) [A_n r^{-n-2} + B_n r^{n-1} + C_n r^{-3/2} I_{n+1/2}(lr) + D_n r^{-3/2} K_{n+1/2}(lr)] P_n(\zeta), \\ 2\omega_\theta &= \sum_{n=1}^{\infty} [n A_n r^{-n-2} - (n+1) B_n r^{n-1} + C_n r^{-3/2} (n I_{n+1/2}(lr) - lr I_{n-1/2}(lr)) + \\ &\quad + D_n r^{-3/2} (n K_{n+1/2}(lr) + lr K_{n-1/2}(lr))] P_n^1(\zeta), \quad (6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_{r\theta} &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \{ n(n+1)(\eta + \eta') r^{-n-3} A_n + (n^2 - 1)(\eta + \eta') r^{n-2} B_n + \\ &\quad + r^{-5/2} [(l^2 r^2 \eta + n(n+2)(\eta + \eta')) I_{n+1/2}(lr) - lr(\eta + \eta') I_{n-1/2}(lr)] C_n + \\ &\quad + r^{-5/2} [(l^2 r^2 \eta + n(n+2)(\eta + \eta')) K_{n+1/2}(lr) + lr(\eta + \eta') K_{n-1/2}(lr)] D_n \} P_n^1(\zeta).\end{aligned}$$

Результирующий крутящий момент потока жидкости относительно оси вращения, действующий на осесимметричную частицу, вычисляется по формуле [28]

$$T = 8\pi\mu \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2 q_\varphi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}. \quad (7)$$

3. Движение моментной жидкости между двумя вращающимися эксцентрически расположенными сферами. Рассматривается движение моментной жидкости постоянной плотности в полости между двумя эксцентрически расположенными сферами радиусом a_1 и a_2 . Сферы вращаются вокруг оси, проходящей через их центры, с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 соответственно. Предполагается, что центр внутренней сферы находится на расстоянии h от центра внешней сферы (рис. 1). Обозначим через q_φ^1 , ω_r^1 , ω_θ^1 компоненты вектора скорости и вектора поворота в случае, когда присутствует только сфера радиусом a_1 и отсутствует сфера радиусом a_2 . Через q_φ^2 , ω_r^2 , ω_θ^2 обозначим компоненты скорости и компоненты вектора вихря внутри сферы радиусом a_2 в отсутствие сферы радиусом a_1 . Системы координат (r_1, θ_1) и (r_2, θ_2) (см. рис. 1) связаны соотношениями

$$r_1^2 = r_2^2 + h^2 - 2r_2 h \cos \theta_2, \quad r_2^2 = r_1^2 + h^2 + 2r_1 h \cos \theta_1.$$

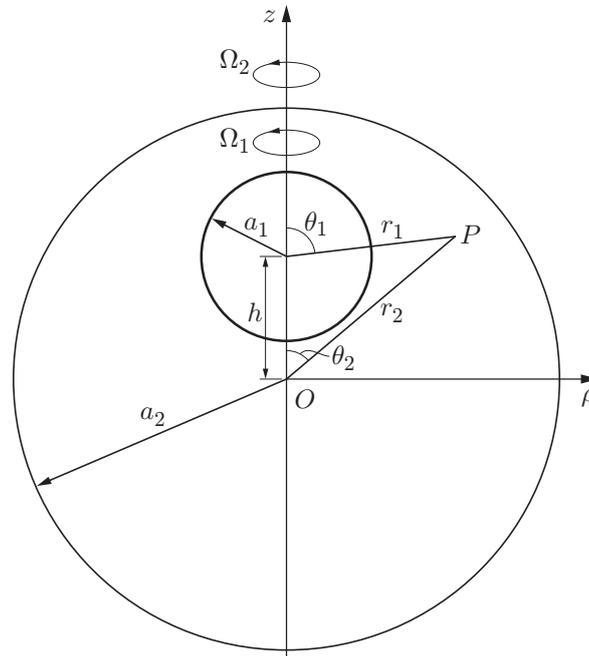


Рис. 1. Схема задачи о движении жидкости между двумя эксцентрически расположенными сферами

В силу линейности уравнений и граничных условий можно применить принцип суперпозиции:

$$\begin{aligned} q_\varphi(r_1, \theta_1; r_2, \theta_2) &= q_\varphi^1(r_1, \theta_1) + q_\varphi^2(r_2, \theta_2), \\ m_{r\theta}(r_1, \theta_1; r_2, \theta_2) &= m_{r\theta}^1(r_1, \theta_1) + m_{r\theta}^2(r_2, \theta_2). \end{aligned} \quad (8)$$

На сферах ставятся условия

$$\begin{aligned} q_\varphi|_{r_1=a_1} &= a_1\Omega_1 \sin \theta_1, & m_{r\theta}|_{r_1=a_1} &= 0, \\ q_\varphi|_{r_2=a_2} &= a_2\Omega_2 \sin \theta_2, & m_{r\theta}|_{r_2=a_2} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (6), (8) следует

$$\begin{aligned} q_\varphi &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r_1^{-n-1} + D_n r_1^{-1/2} K_{n+1/2}(lr_1)) P_n^1(\zeta_1) + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n r_2^n + C_n r_2^{-1/2} I_{n+1/2}(lr_2)) P_n^1(\zeta_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_r &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) (A_n r_1^{-n-2} + D_n r_1^{-3/2} K_{n+1/2}(lr_1)) P_n^1(\zeta) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) (B_n r_2^{n-1} + C_n r_2^{-3/2} I_{n+1/2}(lr_2)) P_n^1(\zeta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_\theta &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{n A_n r_1^{-n-2} + D_n r_1^{-3/2} [n K_{n+1/2}(lr_1) + l r_1 K_{n-1/2}(lr_1)]\} P_n^1(\zeta_1) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{-(n+1) B_n r_2^{n-1} + C_n r_2^{-3/2} [n I_{n+1/2}(lr_2) - l r_2 I_{n-1/2}(lr_2)]\} P_n^1(\zeta_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{r\theta} = & -2 \sum_{n=1}^{\infty} P_n^1(\zeta_1) \{n(n+2)(\eta + \eta') r_1^{-n-3} A_n + \\
 & + r_1^{-5/2} [(l^2 r_1^2 \eta + n(n+2)(\eta + \eta')) K_{n+1/2}(lr_1) + lr_1(\eta + \eta') K_{n-1/2}(lr_1)] D_n\} - \\
 & - 2 \sum_{n=1}^{\infty} P_n^1(\zeta_2) \{(n^2 - 1)(\eta + \eta') r_2^{n-2} B_n + \\
 & + r_2^{-5/2} [(l^2 r_2^2 \eta + n(n+2)(\eta + \eta')) I_{n+1/2}(lr_2) - lr_2(\eta + \eta') I_{n-1/2}(lr_2)] C_n\}.
 \end{aligned}$$

Из краевых условий (9) получаем соотношения

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=2}^{\infty} (A_n a_1^{-n-1} + D_n a_1^{-3/2} K_{n-1/2}(la_1)) P_{n-1}(\zeta_1) + \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} (B_n r_2^{n-2} + C_n r_2^{-3/2} I_{n-1/2}(lr_2)) \Big|_{r_1=a_1} P_{n-1}(\zeta_2) = a_1 \Omega_1 \sin \theta_1, \\
 & \sum_{n=2}^{\infty} (A_n r_1^{-n-1} + D_n r_1^{-3/2} K_{n-1/2}(lr_1)) \Big|_{r_2=a_2} P_{n-1}(\zeta_1) + \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} (B_n a_2^{n-2} + C_n a_2^{-3/2} I_{n-1/2}(la_2)) P_{n-1}(\zeta_2) = a_2 \Omega_2 \sin \theta_2, \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \{n(n+2)(\eta + \eta') a_1^{-n-3} A_n + a_1^{-5/2} [(l^2 a_1^2 \eta + n(n+2)(\eta + \eta')) K_{n+1/2}(la_1) + \\
 & + la_1(\eta + \eta') K_{n-1/2}(la_1)] D_n\} P_n^1(\zeta_1) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \{(n^2 - 1)(\eta + \eta') r_2^{n-2} B_n + r_2^{-5/2} [(l^2 r_2^2 \eta + n(n+2)(\eta + \eta')) I_{n+1/2}(lr_2) - \\
 & - lr_2(\eta + \eta') I_{n-1/2}(lr_2)] C_n\} P_n^1(\zeta_2) \Big|_{r_1=a_1} = 0, \\
 & \sum_{n=1}^{\infty} \{n(n+2)(\eta + \eta') r_1^{-n-3} A_n + r_1^{-5/2} [(l^2 r_1^2 \eta + n(n+2)(\eta + \eta')) K_{n+1/2}(lr_1) + \\
 & + lr_1(\eta + \eta') K_{n-1/2}(lr_1)] D_n\} P_n^1(\zeta_1) \Big|_{r_2=a_2} + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \{(n^2 - 1)(\eta + \eta') a_2^{n-2} B_n + a_2^{-5/2} [(l^2 a_2^2 \eta + n(n+2)(\eta + \eta')) I_{n+1/2}(la_2) - \\
 & - la_2(\eta + \eta') I_{n-1/2}(la_2)] C_n\} P_n^1(\zeta_2) = 0.
 \end{aligned}$$

С использованием (7) крутящий момент $T_1 e_z$, приложенный к внутренней сфере, вычисляется по формуле

$$T_1 = 8\pi\mu A_1.$$

Крутящий момент, действующий на сферическую частицу радиусом a_1 , вращающуюся с угловой скоростью Ω_1 в неограниченной области несжимаемого потока вязкой жидкости, определяется следующим образом:

$$T_0 = 8\pi\mu a_1^3 \Omega_1.$$

4. Результаты вычислений. Вычислим безразмерный крутящий момент сил T_1/T_0 , действующий на внутреннюю сферу радиусом a_1 . Для этого с использованием метода граничных коллокаций, изложенного в работе [29], необходимо определить константы A_n , B_n , C_n , D_n , входящие в решение задачи.

Крутящий нормированный момент T/T_0 вычислялся при различных значениях следующих параметров: отношения радиусов сфер a_1/a_2 , параметра $h/(a_2 - a_1)$, характеризующего расстояние между центрами сфер, отношения угловых скоростей Ω_2/Ω_1 , параметров, определяющих вклад моментных напряжений, $\eta/(\mu a_1^2)$ и $\eta'/(\mu a_1^2)$.

В таблице приведены значения (с точностью до пяти знаков после запятой) нормированного крутящего момента T/T_0 , действующего на внутреннюю сферу, при различных значениях параметров a_1/a_2 , $h/(a_2 - a_1)$ и $\eta/(\mu a_1^2)$ ($\eta'/(\mu a_1^2) = 0$) в случае, когда внеш-

Значения нормированного крутящего момента, действующего на внутреннюю сферу, в случае когда внешняя сфера неподвижна, а внутренняя вращается с угловой скоростью, равной единице

$\frac{h}{a_2 - a_1}$	$\frac{a_1}{a_2}$	T/T_0				
		Ньютоновская жидкость [12]	$\frac{\eta}{\mu a_1^2} = 0,001$	$\frac{\eta}{\mu a_1^2} = 0,01$	$\frac{\eta}{\mu a_1^2} = 0,1$	$\frac{\eta}{\mu a_1^2} = 0,5$
0,01	0,100	1,001 00	1,002 94	1,019 20	1,150 55	1,524 70
	0,300	1,027 75	1,029 80	1,046 90	1,185 30	1,582 15
	0,500	1,142 86	1,145 32	1,165 77	1,330 82	1,813 08
	0,700	1,522 07	1,525 79	1,555 98	1,802 18	2,529 55
	0,800	2,049 18	2,054 54	2,096 95	2,454 89	3,496 69
	0,900	3,690 04	3,700 03	3,780 00	4,482 93	6,470 12
	0,990	33,668 90	33,758 54	34,546 31	41,490 84	60,501 56
	0,999	333,666 90	334,561 37	342,437 90	411,801 06	601,050 42
	0,25	0,100	1,001 17	1,003 11	1,019 38	1,150 76
0,300		1,030 55	1,032 60	1,049 75	1,188 56	1,586 66
0,500		1,151 10	1,153 57	1,174 18	1,340 55	1,826 66
0,700		1,538 70	1,542 44	1,572 99	1,822 41	2,558 00
0,800		2,073 87	2,079 26	2,122 26	2,485 19	3,539 81
0,900		3,736 76	3,746 82	3,827 94	4,540 56	6,553 20
0,990		34,101 39	34,191 52	34,989 57	42,024 06	61,278 95
0,999		337,953 48	338,852 69	346,830 41	417,084 20	608,761 35
0,50		0,100	1,001 98	1,003 92	1,020 21	1,151 81
	0,300	1,041 70	1,043 77	1,061 14	1,201 69	1,605 17
	0,500	1,180 71	1,183 25	1,204 43	1,375 56	1,874 79
	0,700	1,595 81	1,599 71	1,631 53	1,892 02	2,655 68
	0,800	2,157 79	2,163 43	2,208 44	2,588 41	3,686 63
	0,900	3,894 83	3,905 32	3,990 38	4,735 84	6,834 71
	0,990	35,562 37	35,656 44	36,489 27	43,828 13	63,909 16
	0,999	352,433 86	353,371 67	361,691 86	434,958 83	634,850 04
	0,99	0,100	1,147 33	1,149 41	1,169 85	1,332 73
0,300		1,305 46	1,308 30	1,331 81	1,514 54	2,009 55
0,500		1,554 73	1,558 31	1,587 74	1,819 24	2,454 08
0,700		2,160 96	2,166 61	2,212 53	2,584 83	3,622 08
0,800		2,944 39	2,952 43	3,017 50	3,559 53	5,067 48
0,900		5,336 65	5,351 32	5,472 59	6,519 48	9,406 42
0,990		48,786 55	48,916 26	50,063 98	60,158 12	87,717 20
0,999		483,494 99	484,782 29	496,201 72	596,741 33	870,977 97

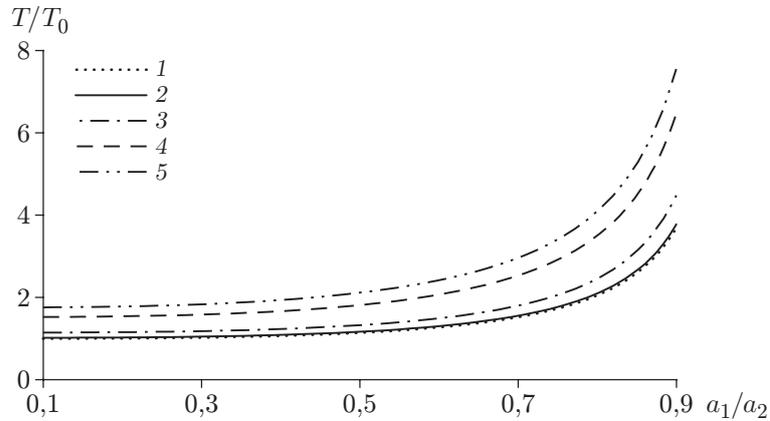


Рис. 2. Зависимость крутящего момента, действующего на сферу радиусом a_1 , от отношения a_1/a_2 при $\Omega_2/\Omega_1 = 0$, $h/(a_2 - a_1) = 0,01$, $\eta'/(μa_1^2) = 0,1$:
 1 — $\eta/(μa_1^2) = 0$, 2 — $\eta/(μa_1^2) = 0,01$, 3 — $\eta/(μa_1^2) = 0,1$, 4 — $\eta/(μa_1^2) = 0,5$, 5 — $\eta/(μa_1^2) = 0,9$

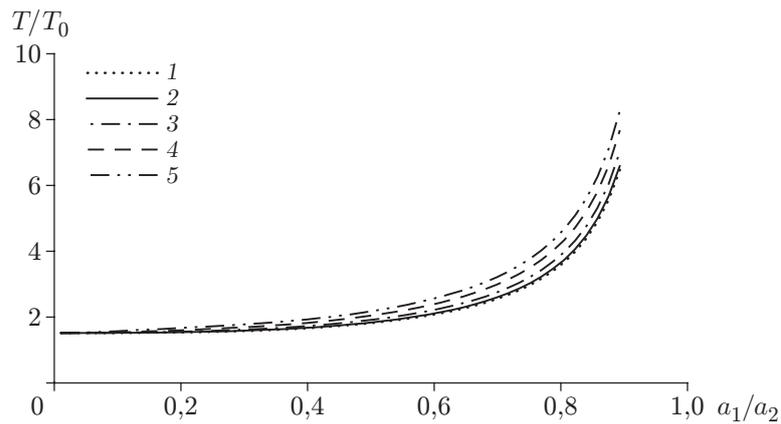


Рис. 3. Зависимость крутящего момента, действующего на сферу радиусом a_1 , от отношения a_1/a_2 при $\Omega_2/\Omega_1 = 0$, $\eta/(μa_1^2) = 0,5$, $\eta'/(μa_1^2) = 0$:
 1 — $h/(a_2 - a_1) = 0,01$, 2 — $h/(a_2 - a_1) = 0,3$, 3 — $h/(a_2 - a_1) = 0,6$, 4 — $h/(a_2 - a_1) = 0,8$,
 5 — $h/(a_2 - a_1) = 0,9$

няя сфера неподвижна, а внутренняя вращается с угловой скоростью, равной единице. Из результатов вычислений следует, что с увеличением отношения a_1/a_2 крутящий момент монотонно возрастает. Увеличение коэффициента $\eta/(μa_1^2)$ приводит к увеличению крутящего момента. Полученные результаты согласуются с результатами работы [12] для случая классической ньютоновской вязкой жидкости, если коэффициент моментности напряжений $\eta/(μa_1^2)$ полагается очень малым. С увеличением параметра $h/(a_2 - a_1)$ момент увеличивается.

На рис. 2 представлена зависимость безразмерного крутящего момента, действующего на сферу радиусом a_1 , от параметра a_1/a_2 при различных значениях коэффициента моментности напряжений $\eta/(μa_1^2)$. Видно, что нормированный крутящий момент существенно увеличивается с увеличением параметров $\eta/(μa_1^2)$ и a_1/a_2 .

На рис. 3 приведена зависимость безразмерного крутящего момента, действующего на сферу радиусом a_1 , от параметра a_1/a_2 при различных значениях параметра $h/(a_2 - a_1)$.

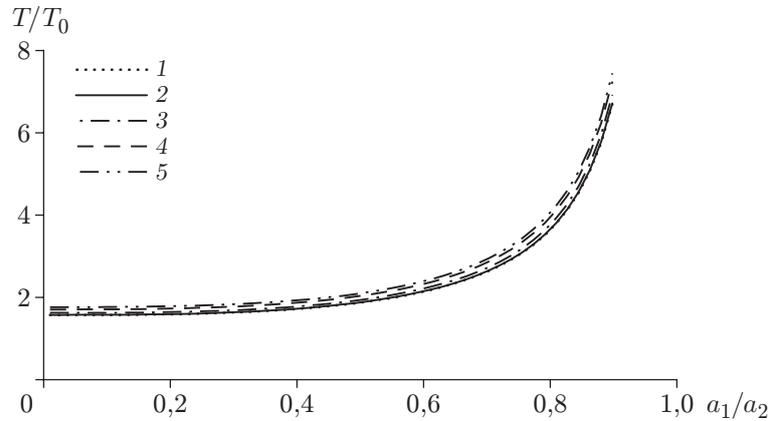


Рис. 4. Зависимость крутящего момента, действующего на сферу радиусом a_1 , от отношения a_1/a_2 при $\Omega_2/\Omega_1 = 0$, $\eta/(\mu a_1^2) = 0,5$, $h/(a_2 - a_1) = 0,1$:
 1 — $\eta'/(μa_1^2) = 0$, 2 — $\eta'/(μa_1^2) = 0,01$, 3 — $\eta'/(μa_1^2) = 0,1$, 4 — $\eta'/(μa_1^2) = 0,3$, 5 — $\eta'/(μa_1^2) = 0,5$

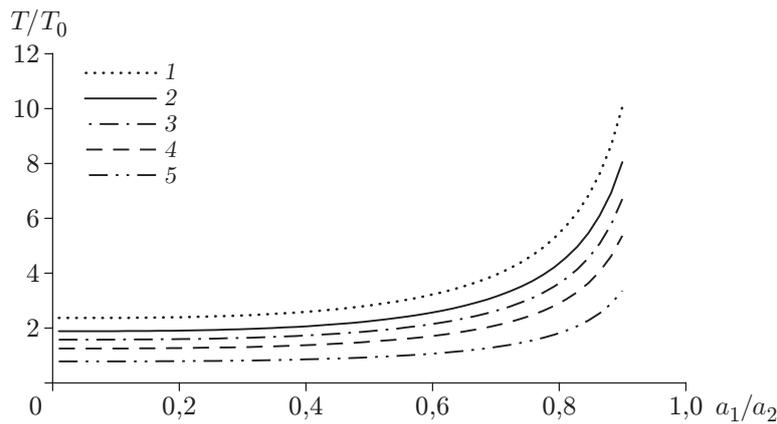


Рис. 5. Зависимость крутящего момента, действующего на сферу радиусом a_1 , от отношения a_1/a_2 при $\eta/(\mu a_1^2) = 0,5$, $\eta'/(μa_1^2) = 0,1$, $h/(a_2 - a_1) = 0,1$:
 1 — $\Omega_2/\Omega_1 = -0,5$, 2 — $\Omega_2/\Omega_1 = -0,2$, 3 — $\Omega_2/\Omega_1 = 0$, 4 — $\Omega_2/\Omega_1 = 0,2$, 5 — $\Omega_2/\Omega_1 = 0,5$

При различных значениях параметра $h/(a_2 - a_1)$ и изменении параметра a_1/a_2 в диапазоне от 0 до 0,2 крутящий момент остается практически постоянным. При больших значениях параметра a_1/a_2 значения крутящего момента постепенно увеличиваются с увеличением параметра $h/(a_2 - a_1)$.

Из зависимостей, приведенных на рис. 4, следует, что при увеличении параметра $\eta'/(μa_1^2)$ крутящий момент увеличивается незначительно. На рис. 5 видно, что с увеличением отношения угловых скоростей Ω_2/Ω_1 крутящий момент уменьшается. Увеличение крутящего момента с увеличением отношения a_1/a_2 имеет место при любых значениях отношения угловых скоростей Ω_2/Ω_1 . Из зависимостей, приведенных на рис. 6, следует, что крутящий момент увеличивается как при увеличении отношения a_1/a_2 , так и при увеличении параметра $\eta'/(μa_1^2)$.

Заключение. В работе с использованием принципа суперпозиции и метода коллокации исследовано движение несжимаемой моментной жидкости между двумя сферами, вращающимися с постоянными угловыми скоростями вокруг оси, на которой расположе-

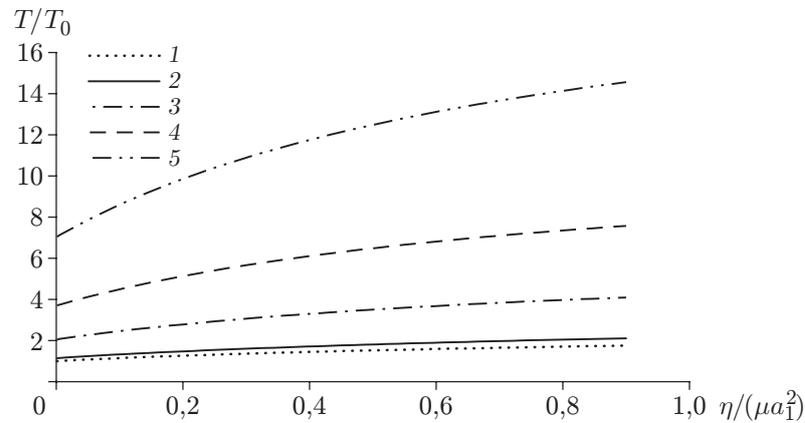


Рис. 6. Зависимость крутящего момента, действующего на сферу радиусом a_1 , от отношения $\eta/(\mu a_1^2)$ при $\Omega_2/\Omega_1 = 0$, $h/(a_2 - a_1) = 0,1$, $\eta'/(\mu a_1^2) = 0$:
 1 — $a_1/a_2 = 0,1$, 2 — $a_1/a_2 = 0,5$, 3 — $a_1/a_2 = 0,8$, 4 — $a_1/a_2 = 0,9$, 5 — $a_1/a_2 = 0,95$

ны диаметры сфер. Установлено, что крутящий момент, действующий на внутреннюю сферу, существенно зависит от расстояния между центрами сфер. По мере сближения центров сфер крутящий момент монотонно увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Stokes V. K.** Couple stresses in fluid // *Phys. Fluids*. 1966. V. 9. P. 1709–1715.
2. **Stokes V. K.** Theories of fluids with microstructure. N. Y.: Springer-Verlag, 1984.
3. **Devakar M., Sreenivasu D., Shankar B.** Analytical solutions of couple stress fluid flows with slip boundary conditions // *Alexandria Engng J.* 2014. V. 53. P. 723–730.
4. **Ashmawy E. A.** Unsteady stokes flow of a couple stress fluid around a rotating sphere with slip // *Europ. Phys. J. Plus.* 2016. V. 131. P. 1–8.
5. **Ashmawy E. A.** Drag on a slip spherical particle moving in a couple stress fluid // *Alexandria Engng J.* 2016. V. 55. P. 1159–1164.
6. **Aparna P., Murthy J. V. R., Nagaraju G.** Couple on a rotating permeable sphere in a couple stress fluid // *Ain Shams Engng J.* 2018. V. 9. P. 665–673.
7. **Pani S. S., Ashmawy E. A.** A time dependent slip flow of a couple stress fluid between two parallel plates through state space // *J. Taibah Univ. Sci.* 2018. V. 12. P. 592–599.
8. **Srinivasacharya D., Krishna Prasad M.** Steady rotation of a composite sphere in a concentric spherical cavity // *Acta Mech. Sinica.* 2012. V. 28. P. 653–658.
9. **Srivastava D. K.** Stokes flow around rotating axially symmetric pervious body // *J. Appl. Fluid Mech.* 2013. V. 6. P. 435–442.
10. **Miari N. S., Ashmawy E. A.** Unsteady rotational motion of a composite sphere in a viscous fluid using stress jump condition // *J. Taibah Univ. Sci.* 2018. V. 12. P. 699–704.
11. **Ashmawy E. A.** Wall effects on a rigid sphere moving perpendicular to a plane wall in a couple stress fluid filling a half-space // *Europ. J. Mech. B. Fluids.* 2019. V. 74. P. 380–388.
12. **Chou C. Y., Keh H. J.** Slow rotation of a spherical particle in an eccentric spherical cavity with slip surfaces // *Europ. J. Mech. B. Fluids.* 2021. V. 86. P. 150–156.
13. **Hetsroni G., Haber S., Wacholder E.** The flow fields in and around a droplet moving axially within a tube // *J. Fluid Mech.* 1970. V. 41. P. 689–705.

14. **Brenner H.** Pressure drop due to the motion of neutrally buoyant particles in duct flows. 2. Spherical droplets and bubbles // *Industr. Engng Chem. Fundament.* 1971. V. 10. P. 537–542.
15. **Coutanceau M., Thizon P.** Wall effect on the bubble behavior in highly viscous liquids // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 107. P. 339–373.
16. **Keh H. J., Chang Y. C.** Creeping motion of a slip spherical particle in a circular cylindrical pore // *Intern. J. Multiphase Flow.* 2007. V. 33. P. 726–741.
17. **Faltas M. S., Sherief H. H., Ashmawy E. A.** Interaction of two spherical particles rotating in a micropolar fluid // *Math. Comput. Model.* 2012. V. 56. P. 229–239.
18. **El-Sapa S., Saad E. I., Faltas M. S.** Axisymmetric motion of two rigid spheres in a Brinkman medium with slip surfaces // *Europ. J. Mech. B. Fluids.* 2018. V. 67. P. 306–313.
19. **Sherief H. H., Faltas M. S., El-Sapa S.** Axisymmetric creeping motion caused by a spherical particle in a micropolar fluid within a nonconcentric spherical cavity // *Europ. J. Mech. B. Fluids.* 2019. V. 77. P. 211–220.
20. **Sherief H. H., Faltas M. S., El-Sapa S.** Interaction between two rigid spheres moving in a micropolar fluid with slip surfaces // *J. Molecular Liquids.* 2019. V. 290. 111165.
21. **Shehadeh T. H., Ashmawy E. A.** Interaction of two rigid spheres translating collinearly in a couple stress fluid // *Europ. J. Mech. B. Fluids.* 2019. V. 78. P. 284–290.
22. **Ashmawy E. A.** Hydrodynamic interaction between two rotating spheres in an incompressible couple stress fluid // *Europ. J. Mech. B. Fluids.* 2018. V. 72. P. 364–373.
23. **El-Sapa S., Alsudais N. S.** Effect of magnetic field on the motion of two rigid spheres embedded in porous media with slip surfaces // *Europ. Phys. J. E.* 2021. V. 44. P. 1–11.
24. **El-Sapa S.** Solutions of some boundary value problems in microfluids. Chisinau: Lambert Acad. Publ., 2021.
25. **El-Sapa S., Faltas M. S.** Mobilities of two spherical particles immersed in a magneto-micropolar fluid // *Phys. Fluids.* 2022. V. 34, N 1. 013104.
26. **El-Sapa S.** Interaction between a non-concentric rigid sphere immersed in a micropolar fluid and a spherical envelope with slip regime // *J. Molecular Liquids.* 2022. V. 351. 118611.
27. **Alsudais N. S., El-Sapa S., Ashmawy E. A.** Stokes flow of an incompressible couple stress fluid confined between two eccentric spheres // *Europ. J. Mech. B. Fluids.* 2021. V. 91. P. 244–252.
28. **Ramkissoon H.** On the rotation of an axially symmetric body in couple stress fluids // *Z. angew. Math. Mech.* 1984. Bd 64. S. 297–302.
29. **Ganatos P., Weinbaum S., Pfeffer R.** A strong interaction theory for the creeping motion of a sphere between plane parallel boundaries // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 99. P. 739–753.

*Поступила в редакцию 6/X 2021 г.,
после доработки — 9/II 2022 г.
Принята к публикации 28/II 2022 г.*
