

УДК 539.370

ИНКРЕМЕНТАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЯ

Л. И. Шкутин

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск

Предложена нелинейная модель деформации стержня с жесткими поперечными сечениями. Сформулирована полная система локальных уравнений в приращениях, эквивалентное ей вариационное уравнение и уравнение виртуальной работы. Выполнен численный анализ деформации кольцевой передачи.

Формулировки задач механики деформируемого твердого тела в приращениях искомых функций используются для вычисления тех приращений параметров деформации, которые они получают при переходе из одного деформированного состояния в другое, достаточно близкое к первому. Такой подход дает конструктивный метод анализа нелинейных задач, так как сводит каждую такую задачу к последовательности линейных. Он не имеет альтернативы, когда определяющие уравнения материала известны в форме зависимостей между приращениями напряжений и деформаций.

1. Уравнения конечного деформированного состояния стержня. У стержня как объемного тела, рассматриваемого в трехмерном декартовом пространстве, материал распределен по малой окрестности G некоторой (базовой) линии $C_3 \subset G$. С ней связывается система криволинейных координат t_J , такая что t_3 — внутренний параметр линии; t_1 и t_2 — ортогональные к t_3 (поперечные) координаты, $t_i \in A$, $t_3 \in [l_1, l_2]$; A — произвольное поперечное сечение стержня; i — действительное число.

В статье используются обозначения из [1, 2]. Вариации параметров деформации обозначаются символом δ , искомые и заданные приращения — символом Δ . Все прописные латинские индексы принимают значения 1, 2 и 3, строчные — 1 и 2. Применяется правило суммирования по индексам. Возможная зависимость от времени явно не указывается.

В трехмерном векторном пространстве над G определяются позиционный вектор $\mathbf{g}(t_J \in G)$ произвольной точки стержня, позиционный вектор $\mathbf{a}(t_J \in C_3)$ произвольной точки базовой линии и локальный координатный базис $\mathbf{a}_J(\mathbf{a})$, отнесенный к точкам линии и состоящий из касательного вектора \mathbf{a}_3 и ортогональных к нему векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$.

Стержень задается уравнением $\mathbf{g} = \mathbf{a} + t_i \mathbf{a}_i$. Равенства $\mathbf{g}_J \equiv \partial_J \mathbf{g}$, $\mathbf{g}_i = \mathbf{a}_i$, $\mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 + t_i \mathbf{b}_i$, $\mathbf{a}_3 \equiv \partial_3 \mathbf{a}$, $\mathbf{b}_i \equiv \partial_3 \mathbf{a}_i$ (∂_J — оператор дифференцирования по t_J) вводят объемный базис $\mathbf{g}_J(\mathbf{g})$ системы координат и выражают его через контурный базис $\mathbf{a}_J(\mathbf{a})$, который без ограничения общности может считаться ортонормированным.

Деформация стержня в некоторое конечное состояние представляется отображением $\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{g}^+(\mathbf{g})$, $\mathbf{g}_J \rightarrow \mathbf{g}_J^+(\mathbf{g})$, $\mathbf{g}_J^+ \equiv \partial_J \mathbf{g}^+$. Вместе со стержнем деформируется базовая линия и ее базис: $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}^+(\mathbf{a})$, $\mathbf{a}_J \rightarrow \mathbf{a}_J^+(\mathbf{a})$. Локальным ортогональным преобразованием

$$\mathbf{a}_J^+ = \Theta \cdot \mathbf{a}_J, \quad \partial_i \Theta \equiv 0, \quad \Theta \cdot \bar{\Theta} \equiv 1 \quad (1.1)$$

с тензором поворота $\Theta(\mathbf{a})$ на деформированной линии вводится *конвективный* базис $\mathbf{a}_J^+(\mathbf{a})$ с начальным значением $\mathbf{a}_J(\mathbf{a})$. В дальнейшем он считается определяющим для векторных пространств над G и C_3 . Преобразование (1.1) представлено в транспонированной по отношению к [2] форме, более употребительной в матричном исчислении.

Конечное деформированное состояние стержня задается уравнением

$$\mathbf{g}^+ = \mathbf{a}^+ + t_i \mathbf{a}_i^0. \quad (1.2)$$

Его следствием являются равенства $\mathbf{g}_i^+ = \mathbf{a}_i^+ = \mathbf{a}_i^0$, отождествляющие деформированные поперечные векторы с конвективными. Векторы же \mathbf{g}_3^+ , \mathbf{a}_3^+ и \mathbf{a}_3^0 в общем случае не совпадают друг с другом. Поскольку базис \mathbf{a}_j^0 по определению ортогональный, а базис \mathbf{a}_j^+ может не быть таковым, то конвективный вектор \mathbf{a}_3^0 , в отличие от \mathbf{a}_3^+ , не остается касательным к деформированной базовой линии ($\mathbf{a}_3^0 \neq \mathbf{a}_3^+$ и по величине, и по направлению).

Уравнению (1.2) отвечает линейная аппроксимация объемного поля перемещений $\mathbf{w}(\mathbf{g}) \equiv \mathbf{g}^+ - \mathbf{g}$ относительно поперечных координат

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + t_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{u} \equiv \mathbf{a}^+ - \mathbf{a}, \quad \mathbf{v}_i \equiv \mathbf{a}_i^0 - \mathbf{a}_i. \quad (1.3)$$

Эта зависимость задает движение поперечного сечения стержня как жесткого целого с трансляционным перемещением $\mathbf{u}(\mathbf{a})$ и вращением $t_i \mathbf{v}_i(\mathbf{a})$.

Объемное поле деформаций стержня вводится векторами $\mathbf{w}_I(\mathbf{g})$:

$$\mathbf{w}_I \equiv \mathbf{g}_I^+ - \Theta \cdot \mathbf{g}_I = \partial_I \mathbf{w} - (\Theta - 1) \cdot \mathbf{g}_I. \quad (1.4)$$

Использование аппроксимаций (1.2) и (1.3) приводит к равенствам

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_3 + t_i \mathbf{v}_{3i}, \quad \mathbf{w}_i \equiv 0, \quad (1.5)$$

выражающим объемное поле через контурные векторы $\mathbf{u}_3(\mathbf{a})$ и $\mathbf{v}_{3i}(\mathbf{a})$ метрических и изгибно-крутильных деформаций:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_3 &\equiv \mathbf{a}_3^+ - \Theta \cdot \mathbf{a}_3 = \partial_3 \mathbf{u} - (\Theta - 1) \cdot \mathbf{a}_3, & \mathbf{a}_3^+ &\equiv \partial_3 \mathbf{a}^+, \\ \mathbf{v}_{3i} &\equiv \mathbf{b}_i^+ - \Theta \cdot \mathbf{b}_i = \partial_3 \Theta \cdot \mathbf{a}_i, & \mathbf{b}_i^+ &\equiv \partial_3 \mathbf{a}_i^0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Последние формулы определяют их через *первичные* неизвестные — вектор перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{a})$ и тензор поворота $\Theta(\mathbf{a})$.

В деформированном состоянии на C_3 выполняются локальные динамические уравнения

$$\partial_3 \mathbf{x}^3 + \mathbf{p} = 0, \quad \partial_3 \mathbf{y}^3 + \mathbf{x} + \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{x} \equiv \mathbf{a}_3^+ \times \mathbf{x}^3, \quad \mathbf{y}^3 \equiv \mathbf{a}_i^0 \times \mathbf{y}_i^3. \quad (1.7)$$

Если же в некоторой точке $t_3 = l_\lambda$ векторами \mathbf{p}_λ и \mathbf{q}_λ заданы сосредоточенные силы и моменты, то в ней выполняются точечные динамические условия

$$e_{\lambda 3} \mathbf{x}^3 - \mathbf{p}_\lambda = 0, \quad e_{\lambda 3} \mathbf{y}^3 - \mathbf{q}_\lambda = 0. \quad (1.8)$$

В точке $t_3 = l_\mu$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\mu, \quad \Theta = \Theta_\mu, \quad (1.9)$$

где \mathbf{u}_μ , Θ_μ — заданные значения вектора поворота и тензора поворота.

Неизвестные векторные функции $\mathbf{x}^3(\mathbf{a})$ и $\mathbf{y}_i^3(\mathbf{a})$ в уравнениях (1.7) — это математические моменты от вектора напряжения $\mathbf{z}^3(\mathbf{g})$ по поперечному сечению стержня:

$$\mathbf{x}^3 \equiv \int_A \mathbf{z}^3 J dA, \quad \mathbf{y}_i^3 \equiv \int_A \mathbf{z}^3 t_i J dA. \quad (1.10)$$

Функции $\mathbf{x}^3(\mathbf{a})$ и $\mathbf{y}_i^3(\mathbf{a})$ имеют механический смысл главного вектора и главного момента.

Уравнения (1.7) в общем случае не могут быть разрешены относительно силовых векторов \mathbf{x}^3 и \mathbf{y}^3 по следующим причинам: 1) вектор \mathbf{a}_3^+ зависит от поля перемещений; 2) в динамических задачах векторы внешних нагрузок \mathbf{p} , \mathbf{q} всегда зависят от перемещений

и поворотов, так как включают инерционные силы, а в статических задачах такая зависимость проявляется и в тех случаях, когда необходимо учитывать изменение внешних сил в процессе деформации. В общей задаче конечной деформации стержня динамические уравнения (1.7), (1.8) объединяются с кинематическими уравнениями (1.6), (1.9) и определяющими зависимостями, которые связывают динамические векторы \mathbf{x}^3 , \mathbf{y}^3 с кинематическими векторами \mathbf{u}_3 , \mathbf{v}_{3i} . Конечная формулировка таких зависимостей возможна лишь в частных случаях. Более общей является их формулировка в приращениях. Это обстоятельство естественным образом приводит к необходимости построения модели деформации стержня в приращениях.

2. Формулировка локальных уравнений модели. Для построения уравнений деформации стержня в приращениях привлекаются следующие правила варьирования векторных и тензорных полей:

$$\begin{aligned} \delta\Theta &= \delta\Omega \cdot \Theta, & \delta\Omega &= \delta\omega \times \mathbf{1} = \mathbf{1} \times \delta\omega, & \delta\mathbf{a}_j^0 &= \delta\Omega \cdot \mathbf{a}_j^0 = \delta\omega \times \mathbf{a}_j^0, & \delta\mathbf{a}_3^+ &= \partial_3 \delta\mathbf{u}, \\ \delta_0 \mathbf{u}_3 &= \partial_3 \delta\mathbf{u} - \delta\Omega \cdot \mathbf{a}_3^+ = \partial_3 \delta\mathbf{u} - \delta\omega \times \mathbf{a}_3^+, & \delta_0 \mathbf{v}_{3i} &= \partial_3 \delta\Omega \cdot \mathbf{a}_i^0 = \partial_3 \delta\omega \times \mathbf{a}_i^0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $\delta\Omega(\mathbf{a})$, $\delta\omega(\mathbf{a})$ — спин и вектор виртуального поворота; δ_0 — оператор относительной вариации, такой что $\delta_0 \mathbf{a}_j^0 \equiv 0$, и для любого вектора \mathbf{v} , заданного в конвективном базисе, по определению справедливы равенства

$$\delta\mathbf{v} = \delta_0 \mathbf{v} + \delta\Omega \cdot \mathbf{v} = \delta_0 \mathbf{v} + \delta\omega \times \mathbf{v}. \quad (2.2)$$

Формулы (2.1) содержат два первичных виртуальных вектора $\delta\mathbf{u}$ и $\delta\omega$. В векторных произведениях последний из них может быть заменен тензором-спином $\delta\Omega$.

Из (1.7) на C_3 получаем запись динамических уравнений в приращениях

$$\partial_3 \Delta \mathbf{x}^3 + \Delta \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad \partial_3 \Delta \mathbf{y}^3 + \Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (2.3)$$

Их дополняют динамические и кинематические условия в точках l_λ и l_μ

$$e_{\lambda 3} \Delta \mathbf{x}^3 - \Delta \mathbf{p}_\lambda = \mathbf{0}, \quad e_{\lambda 3} \Delta \mathbf{y}^3 - \Delta \mathbf{q}_\lambda = \mathbf{0}; \quad (2.4)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}_\mu, \quad \Delta \omega = \Delta \omega_\mu. \quad (2.5)$$

Связь динамических переменных с кинематическими обеспечивается определяющими зависимостями. Для процессов упругого и упругопластического деформирования стержня в области G они могут быть выражены уравнением

$$\Delta_0 \mathbf{z}^3 = \mathbf{D} \cdot \Delta_0 \mathbf{w}_3, \quad (2.6)$$

где Δ_0 — оператор относительного приращения, определяемый аналогично δ_0 ; \mathbf{D} — тензор-диадик жесткости материала, учитывающий предысторию нагружения.

Из (1.10) и (2.6) на C_3 следуют определяющие зависимости для контурных переменных

$$\Delta_0 \mathbf{x}^3 = \mathbf{E} \cdot \Delta_0 \mathbf{u}_3 + \mathbf{E}_j \cdot \Delta_0 \mathbf{v}_{3j}, \quad \Delta_0 \mathbf{y}_i^3 = \mathbf{E}_i \cdot \Delta_0 \mathbf{u}_3 + \mathbf{E}_{ij} \cdot \Delta_0 \mathbf{v}_{3j} \quad (2.7)$$

с обобщенными тензорами жесткости $\mathbf{E} \equiv \int_A \mathbf{D} J dA$, $\mathbf{E}_i \equiv \int_A \mathbf{D} t_i J dA$, $\mathbf{E}_{ij} \equiv \int_A \mathbf{D} t_i t_j J dA$.

Векторы $\Delta_0 \mathbf{u}_3$ и $\Delta_0 \mathbf{v}_{3i}$ в (2.7) вычисляются по правилам варьирования (2.1):

$$\Delta_0 \mathbf{u}_3 = \partial_3 \Delta \mathbf{u} - \Delta \Omega \cdot \mathbf{a}_3^+, \quad \Delta_0 \mathbf{v}_{3i} = \partial_3 \Delta \Omega \cdot \mathbf{a}_i^0 = \partial_3 \Delta \omega \times \mathbf{a}_i^0. \quad (2.8)$$

С помощью (2.8) и справедливого по определению равенства $\Delta_0 \mathbf{y}^3 = \mathbf{a}_i^0 \times \Delta_0 \mathbf{y}_i^3$ уравнения (2.7) преобразуются к виду

$$\Delta_0 \mathbf{x}^3 = \mathbf{E} \cdot \Delta_0 \mathbf{u}_3 + \mathbf{F} \cdot \partial_3 \Delta \omega, \quad \Delta_0 \mathbf{y}^3 = \mathbf{G} \cdot \Delta_0 \mathbf{u}_3 + \mathbf{H} \cdot \partial_3 \Delta \omega \quad (2.9)$$

с модифицированными тензорами жесткости $F \equiv -E_j \times a_j^0$, $G \equiv a_i^0 \times E_i$, $H \equiv -a_i^0 \times (E_{ij} \times a_j^0)$. В дальнейшем предполагается, что зависимости (2.9) допускают обращение

$$\partial_3 \Delta u - \Delta \Omega \cdot a_3^+ = \tilde{E} \cdot \Delta_0 x^3 + \tilde{F} \cdot \Delta_0 y^3, \quad \partial_3 \Delta \omega = \tilde{G} \cdot \Delta_0 x^3 + \tilde{H} \cdot \Delta_0 y^3 \quad (2.10)$$

с известными тензорами податливости \tilde{E} , \tilde{F} , \tilde{G} , \tilde{H} .

Уравнения (2.3)–(2.5) и (2.9) или (2.10) образуют полную систему локальных уравнений для приращений искомых функций.

3. Вариационная формулировка задачи. В функциональном пространстве $L_2(C_3)$ введем произвольные вариации δu , $\delta \omega$, δx^3 , δy^3 кинематических и динамических векторов. Локальные уравнения (2.3)–(2.5) и (2.10) заменим интегральным равенством Галёркина

$$\begin{aligned} & \int_{C_3} ((\partial_3 \Delta x^3 + \Delta p) \cdot \delta u + (\partial_3 \Delta y^3 + \Delta x + \Delta q) \cdot \delta \omega) dt_3 + \\ & + \int_{C_3} (\tilde{E} \cdot \Delta_0 x^3 + \tilde{F} \cdot \Delta_0 y^3 - \partial_3 \Delta u + \Delta \Omega \cdot a_3^+) \cdot \delta x^3 dt_3 + \int_{C_3} (\tilde{G} \cdot \Delta_0 x^3 + \tilde{H} \cdot \Delta_0 y^3 - \partial_3 \Delta \omega) \cdot \delta y^3 dt_3 + \\ & + ((\Delta p_\lambda - e_{\lambda 3} \Delta x^3) \cdot \delta u + (\Delta q_\lambda - e_{\lambda 3} \Delta y^3) \cdot \delta \omega)_{t_3=l_\lambda} + \\ & + e_{\mu 3} ((\Delta u - \Delta u_\mu) \cdot \delta x^3 + (\Delta \omega - \Delta \omega_\mu) \cdot \delta y^3)_{t_3=l_\mu} = 0. \quad (3.1) \end{aligned}$$

Интегрирование по частям первого интеграла преобразует равенство (3.1) к форме

$$\begin{aligned} & \int_{C_3} (\Delta p \cdot \delta u - \Delta x^3 \cdot \partial_3 \delta u + (\Delta q + \Delta x) \cdot \delta \omega - \Delta y^3 \cdot \partial_3 \delta \omega) dt_3 + \\ & + \int_{C_3} (\tilde{E} \cdot \Delta_0 x^3 + \tilde{F} \cdot \Delta_0 y^3 - \partial_3 \Delta u + \Delta \Omega \cdot a_3^+) \cdot \delta x^3 dt_3 + \int_{C_3} (\tilde{G} \cdot \Delta_0 x^3 + \tilde{H} \cdot \Delta_0 y^3 - \partial_3 \Delta \omega) \cdot \delta y^3 dt_3 + \\ & + (\Delta p_\lambda \cdot \delta u + \Delta q_\lambda \cdot \delta \omega)_{t_3=l_\lambda} + e_{\mu 3} (\Delta x^3 \cdot \delta u + \Delta y^3 \cdot \delta \omega + \\ & + (\Delta u - \Delta u_\mu) \cdot \delta x^3 + (\Delta \omega - \Delta \omega_\mu) \cdot \delta y^3)_{t_3=l_\mu} = 0. \quad (3.2) \end{aligned}$$

Эта форма требует гладкости вариаций δu , $\delta \omega$ вдоль базовой линии.

При достаточной гладкости всех подынтегральных функций равенства (3.1) и (3.2) эквивалентны, и поэтому справедливо

Утверждение. Если векторы Δx^3 , Δy^3 , Δu , $\Delta \omega$ являются точным решением системы локальных уравнений (2.3)–(2.5) и (2.10), то при любых вариациях выполняется интегральное равенство (3.2); если же некоторые векторы Δx^3 , Δy^3 , Δu , $\Delta \omega$ тождественно удовлетворяют интегральному равенству (3.2) при любых вариациях, то эти векторы — точное решение указанной системы.

Для подынтегральных искомых функций, не обладающих достаточной гладкостью, вариационное уравнение (3.2) дает слабую формулировку задачи деформации стержня. В этой формулировке Галёркина требования гладкости минимальны: векторы Δx^3 , Δy^3 и δx^3 , δy^3 — элементы пространства $L_2(C_3)$, векторы Δu , $\Delta \omega$ и δu , $\delta \omega$ — элементы пространства Соболева $W_2^1(C_3)$.

Важным следствием (3.2) является уравнение виртуальной работы стержня

$$\int_{C_3} (\Delta p \cdot \delta u - \Delta x^3 \cdot \partial_3 \delta u + (\Delta q + \Delta x) \cdot \delta \omega - \Delta y^3 \cdot \partial_3 \delta \omega) dt_3 + (\Delta p_\lambda \cdot \delta u + \Delta q_\lambda \cdot \delta \omega)_{t_3=l_\lambda} = 0. \quad (3.3)$$

Оно справедливо для кинематически возможных вариаций $\delta \mathbf{u}$ и $\delta \boldsymbol{\omega}$, таких что $\delta \mathbf{u} = \delta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ в точке $t_3 = i_{\mu}$, и при выполнении локальных уравнений (2.10) и точечных условий (2.5). Равенство (3.3) дает слабую форму динамических уравнений (2.3) и точечных условий (2.4). При исключении из (3.3) переменных $\Delta \mathbf{x}^3$ и $\Delta \mathbf{y}^3$ с помощью равенств (2.9) оно приобретает смысл слабой формулировки задачи относительно кинематических переменных $\Delta \mathbf{u}$ и $\Delta \boldsymbol{\omega}$ с главными точечными условиями (2.5).

Для численного анализа необходима матричная формулировка вариационного уравнения (3.2). Следует обратить внимание на важную роль относительных приращений в локальных уравнениях (2.7)–(2.10). Именно это обстоятельство определяет выбор конвективного базиса в качестве основного для рассматриваемых векторных полей. В соответствии со сказанным искомыми функции $\Delta \mathbf{u}$, $\Delta \boldsymbol{\omega}$, $\Delta_0 \mathbf{x}^3$ и $\Delta_0 \mathbf{y}^3$ вводятся разложениями

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{a}_J^0 \Delta U^J, \quad \Delta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{a}_J^0 \Delta \Omega^J, \quad \Delta_0 \mathbf{x}^3 = \mathbf{a}_J^0 \Delta X^{3J}, \quad \Delta_0 \mathbf{y}^3 = \mathbf{a}_J^0 \Delta Y^{3J},$$

как и вариации $\delta \mathbf{u}$, $\delta \boldsymbol{\omega}$, $\delta \mathbf{x}^3$, $\delta \mathbf{y}^3$. Приращение любого вектора $\mathbf{v} = \mathbf{a}_J^0 V^J$, отличного от первичных, вычисляется подобно (2.2): $\Delta \mathbf{v} = \Delta_0 \mathbf{v} + \Delta \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}$. Здесь $\Delta_0 \mathbf{v} \equiv \mathbf{a}_J^0 \Delta V^J$ — относительное приращение; $\Delta \boldsymbol{\Omega}$ — спин приращения вектора поворота.

Дифференцирование векторов конвективного базиса может быть выражено преобразованием

$$\partial_3 \mathbf{a}_J^0 = \mathbf{C}_3^0 \cdot \mathbf{a}_J^0, \quad \mathbf{C}_3^0 \equiv (\partial_3 \mathbf{a}_J^0) \mathbf{a}_0^J$$

с тензором-спином $\mathbf{C}_3^0(\mathbf{a})$. Дифференцирование же любого вектора $\mathbf{v}(\mathbf{a})$, заданного в конвективном базисе, осуществляется по формуле

$$\partial_3 \mathbf{v} = \partial_3^0 \mathbf{v} + \mathbf{C}_3^0 \cdot \mathbf{v}, \quad \partial_3^0 \mathbf{v} \equiv \mathbf{a}_J^0 \partial_3 V^J,$$

где $\partial_3^0 \mathbf{v}$ — относительная производная вектора по координате t_3 . Из определения тензора \mathbf{C}_3^0 следует формула $\Delta_0 \mathbf{C}_3^0 = \partial_3 \Delta \boldsymbol{\Omega}$ для вычисления его относительного приращения.

Установленные правила варьирования и дифференцирования векторных полей используются для матричной записи вариационного уравнения (3.2), причем именно относительные приращения и производные векторов являются основными функциями уравнения, поскольку представляются матрицами приращений компонент векторов.

Для вычисления искомым функций применяется стандартная процедура последовательных приближений, позволяющая шаг за шагом проследить процесс деформации стержня от начального (ненапряженного) состояния до конечного, отвечающего заданной системе внешних сил. Начальные значения параметров процедуры задаются равенствами $\mathbf{a}_J^+ = \mathbf{a}_J^0 = \mathbf{a}_J$, $\mathbf{b}_i^+ = \mathbf{b}_i \equiv \partial_3 \mathbf{a}_i$, $\mathbf{C}_3^0 = \mathbf{C}_3 \equiv (\partial_3 \mathbf{a}_J) \mathbf{a}_J^J$, $\boldsymbol{\Theta} \equiv \mathbf{1}$, $\mathbf{x}^3 \equiv \mathbf{y}^3 \equiv \mathbf{p} \equiv \mathbf{q} \equiv \mathbf{p}_\lambda \equiv \mathbf{q}_\lambda \equiv \mathbf{0}$. Тензор жесткости материала \mathbf{D} задается вначале матрицей Гука. Если он зависит от деформаций, то на следующем шаге вводится матрицей $[\mathbf{D} + \Delta_0 \mathbf{D}]$, где $\Delta_0 \mathbf{D}$ — относительное приращение тензора, отвечающее приращениям первичных векторов.

4. Численный анализ деформации кольцевой передачи. В приводах исполнительной автоматики применяются волновые передачи кольцевого типа — радиальные цепи тонких колец, разделенных слоем роликов. Внешняя поверхность наружного кольца-волнообразователя имеет зубчатый профиль. Прецизионное проектирование таких передач по заданным показателям качества требует анализа деформаций кольцевых элементов в процессе эксплуатации. Силы, действующие со стороны жесткого колеса и муфты, не сводятся к плоской системе и вызывают пространственные деформации кольцевого набора.

Для анализа рабочих деформаций кольцевой передачи последняя моделируется слоисто-неоднородным круговым кольцом, поперечное сечение A которого показано на рис. 1. Изучаются малые пространственные деформации, наложенные на плоское равномерно сжатое состояние кольца. Анализ выполнен при помощи вариационного уравнения (3.2). Использовалась линейная конечно-элементная аппроксимация подынтегральных

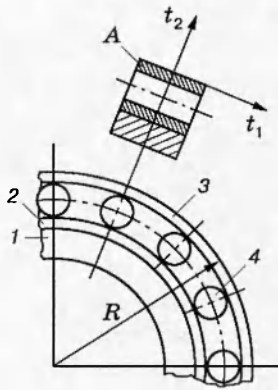


Рис. 1

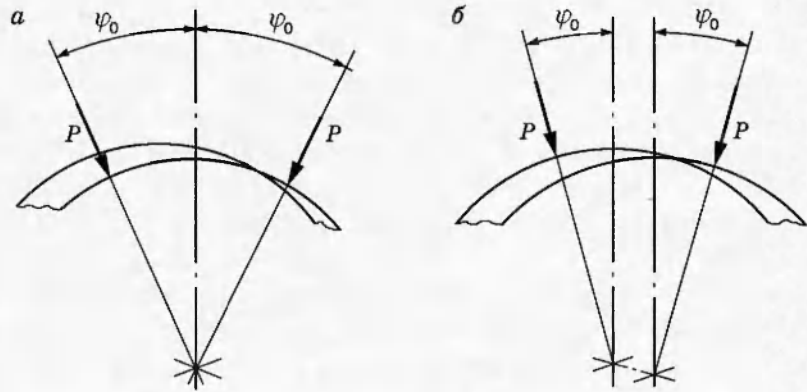


Рис. 2

функций. Число узлов варьировалось в пределах $1000 \div 2000$. Сосредоточенное воздействие аппроксимировалось П-образной функцией на длине h соответствующей ячейки.

Ниже представлены результаты решения двух задач пространственной деформации кольцевой передачи под воздействием самоуравновешенных неплоских систем сил (рис. 2). Конструкция состоит из трех круговых колец 1–3 постоянной толщины с промежуточным слоем цилиндрических роликов 4 (рис. 1). Размеры колец от внутреннего к наружному заданы радиусами, мм: $r_0 = 24,2$; $r_1 = 25,1$; $r_2 = 26$; $r_3 = 30,5$; $R = r_4 = 31,3$ и одинаковой для всех шириной $2l = 18$ мм. Упругие свойства колец приняты одинаковыми с заданным модулем Юнга $D_3 = 2,18 \cdot 10^5$ Н/мм² и коэффициентом Пуассона $\gamma = 0,31$. Тензор жесткости в зависимости (2.6) представляется матрицей Гука

$$[D] = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}, \quad D_1 = D_2 = \frac{1}{2} D_3 (1 + \gamma)^{-1}.$$

В слое роликов $D_1 = D_2 = D_3 = 0$. Слоисто-неоднородная структура конструкции учитывается при вычислении обобщенных жесткостей E , E_i и E_{ij} .

Первой и второй задачам соответствуют схемы нагружения кольцевой передачи в ячейках, подверженных сосредоточенным воздействиям, представленные на рис. 2:

$$\begin{aligned} \{\Delta p(\varphi_0)\} &= \{\Delta p(-\varphi_0)\} = \{0, -P/h, 0\}, & \{\Delta q(\varphi_0)\} &= \{\Delta q(-\varphi_0)\} = \{0, 0, -Pl/h\}, \\ \{\Delta p(\varphi_0)\} &= \{\Delta p(-\varphi_0)\} = \{0, -P/h, 0\}, & \{-\Delta q(\varphi_0)\} &= \{\Delta q(-\varphi_0)\} = \{0, 0, -Pl/h\}. \end{aligned}$$

Самоуравновешенная система сосредоточенных сил в первой задаче приложена к одной из торцевых граней волнообразователя, во второй — к обеим граням. В среднем параллельном сечении кольца она приводится к вектору-силе Δp и вектору-моменту Δq . В фигурные скобки заключены векторы-столбцы, угловая координата $\varphi = t_3/R$ отсчитывалась от вертикального диаметра кольца, расчет выполнен при значениях $\varphi_n = \pi/20$ рад и $P = 10^4$ Н.

В таблице показано распределение по внешнему периметру кольцевой передачи дополнительных перемещений и поворотов, наложенных на ее равномерно сжатое состояние (Δu_1 — перемещение из плоскости, Δu_2 — радиальное перемещение, $\Delta \omega_2$ — угол поворота образующей относительно радиуса, $\Delta \omega_3$ — угол кручения). В первой задаче кольцо изгибается из плоскости симметрично относительно горизонтального диаметра, функция $\Delta \omega_2$ антисимметрична. Во второй задаче кольцо закручивается относительно вертикального

φ , рад	Задача 1				Задача 2			
	Δu_1 , мм	Δu_2 , мм	$\Delta \omega_2$, рад	$\Delta \omega_3$, рад	Δu_1 , мм	Δu_2 , мм	$\Delta \omega_2$, рад	$\Delta \omega_3$, рад
$-\pi/2$	-0,165	0,428	0	0,005	0	0,428	0	0
$-\pi/3$	-0,090	0,219	0,007	0	0,013	0,219	0,001	-0,001
$-\pi/6$	0,080	-0,240	0,008	-0,012	0,027	-0,240	0	-0,003
0	0,187	-0,512	0	-0,022	0	-0,512	-0,002	0
$\pi/6$	0,078	-0,242	-0,008	-0,012	-0,027	-0,242	0	0,003
$\pi/3$	0,090	0,218	-0,007	0	-0,013	0,218	0,001	0,001
$\pi/2$	-0,165	0,427	0	0,005	0	0,427	0	0

диаметра, функции Δu_2 и $\Delta \omega_2$ симметричны, Δu_1 и $\Delta \omega_3$ антисимметричны. Расчет выполнен на IBM PC 386. Вычислительная программа использовалась при проектировании волновых передач кольцевого типа по заданным показателям качества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкутин Л. И. Механика деформаций гибких тел. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.
2. Шкутин Л. И. Обобщенные модели типа Коссера для анализа конечных деформаций тонких тел // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 3. С. 120–132.

Поступила в редакцию 5/VI 1997 г.,
в окончательном варианте — 17/XI 1997 г.