ЛИТЕРАТУРА

1. **Jaeger R. E., Pearson A. D., Williams J. G., Presby H. M.** Fiber drawing and control// Optical Fiber Telecommunications/Ed. by S. E. Miblenm, A. G. Chynoweth.— N. Y.: Acad. Press, 1980.
2. **Pack H. C., Runk R. B.** Physical behaviour of the neck-down region during furnace drawing of silica fiber // J. Appl. Phys.— 1978.— V. 49, N 8.
3. **Homsy G. H., Walker K.** Heat transfer in laser drawing of optical fibers // Glass Technology.— 1979.— V. 20, N 1.
4. **Geyling F. T.** Basic fluid-dynamic consideration in the drawing of optical fibers // Bell Syst. Techn. J.— 1976.— V. 55, N 8.
5. **Стеклянные** волокна/Под ред. М. С. Аслановой.— М.: Химия, 1979.
6. **Гущин В. А., Коньшин В. Н.** Численное моделирование волновых движений жид кости // Сообщения по прикладной математике.— М., 1985.
7. **Кашин В. В., Перминов С. М., Перминова В. Н. и др.** Численное моделирование теплофизических процессов при вытяжке кварцевых световодов.— М., 1986.— (Препринт/ИОФАН СССР; № 241).
8. **Перминов С. М., Перминова В. Н., Сысоев В. К.** Вытяжка кварцевых волоконных световодов как задача со «свободной границей»— численное исследование.— М., 1986.— (Препринт/ИОФАН СССР; № 269).

Поступила 27/II 1987 г.

УДК 539.3

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА НАРАЩИВАНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ

А. Д. Дроздов

(Москва)

В работе найдена оптимальная скорость притока вещества к растущему упругому телу, обеспечивающая минимальную интенсивность напряжений или перемещений в момент окончания процесса наращивания при произвольно изменяющейся во времени внешней нагрузке. Задача в квазистатической постановке при малых деформациях.

1. Постановка задачи оптимизации процесса наращивания колонны. Рассмотрим процесс непрерывного наращивания колонны из линейно-упругого материала. До деформации колонна представляет собой цилиндр длиной l круглого поперечного сечения радиусом a_0. Нижний конец колонны жестко закреплен, а верхний свободен. В момент времени $t = 0$ на боковой поверхности колонны начинается наращивание материала, а на верхнем конце производится установка оборудования. Вследствие притока вещества извне радиус цилиндра изменяется по закону $a = a(t)$. Радиус растущего цилиндра равен a_1 в момент окончания наращивания $t = T$. Функция $a(t)$ монотонно не убывает. Обозначим через $V(t) = 2\pi la(t)a^\cdot(t)$ скорость наращивания цилиндра ($a^\cdot = da/dt$). Функция $V(t)$ ограничена: $0 \leqslant V_1 \leqslant V(t) \leqslant V_2 < \infty$ (V_1, V_2 — минимальная и максимальная скорости притока вещества). Наращивание осуществляется без натяга.

Воздействие оборудования на колонну сводится к сжимающему усилию $P = P(t)$, приложенному к торцу цилиндра и равному весу оборудования. Предположим, что $P(0) = 0$, $P(T) = P_0 \geqslant 0$. Величина $P(t)$ не является монотонной функцией времени, поскольку в процессе наращивания возможен подъем на верх колонны дополнительных приборов и устройств, необходимых для установки и наладки оборудования, с последующим их снятием. Максимально допустимая скорость подъема или снятия оборудования задана: $|P^\cdot(t)| \leqslant U_1$.

Под действием внешней нагрузки происходит продольная деформация колонны. Введем цилиндрическую систему координат (r, ϑ, z), ось z которой совпадает с продольной осью колонны. При одноосном напряженном состоянии деформация ε связана с напряжением σ равенством [1]

$$\sigma(t, r) = E[\varepsilon(t) - \varepsilon(\tau^*(r))], \tag{1.1}$$

где E — постоянный модуль упругости; τ^* — момент зарождения материала колонны. Для исходного цилиндра ($0 \leqslant r \leqslant a_0$) полагаем $\tau^* = 0$, в наращиваемой области ($a_0 < r \leqslant a_1$) функция $t = \tau^*(r)$ обратная к $r = a(t)$.

Выражение (1.1) удовлетворяет уравнениям равновесия и граничным условиям на боковой поверхности цилиндра. Запишем граничные условия на торцах колонны: $2\pi \int\limits_0^{a(t)} \sigma(t, r) r dr = -P(t)$. Подставим в это равенство выражение (1.1). Интеграл по r представим в виде суммы двух интегралов в пределах от 0 до a_0 и от a_0 до $a(t)$. Первый интеграл вычислим явно, а во втором сделаем замену переменной интегрирования $r = a(s)$. В результате имеем

$$a_0^2 \varepsilon(t) + 2\int\limits_0^t [\varepsilon(t) - \varepsilon(s)]\, a(s)\, a^{\cdot}(s)\, ds = -P(t)(\pi E)^{-1}. \tag{1.2}$$

Продифференцируем соотношение (1.2) по времени t. Учитывая связь между радиусом растущего цилиндра $a(t)$ и скоростью наращивания $V(t)$, запишем полученное равенство в виде

$$\varepsilon^{\cdot} = -u(t)\left[1 + \int\limits_0^t v(s)\, ds\right]^{-1}, \quad \varepsilon(0) = 0. \tag{1.3}$$

Здесь $u(t) = P^{\cdot}(t)(\pi E a_0^2)^{-1}$; $v(t) = V(t)(\pi l a_0^2)^{-1}$. Начальное условие для уравнения (1.3) найдем, полагая $t = 0$ в соотношении (1.2).

На функции $u(t)$ и $v(t)$ наложены ограничения:

$$\int\limits_0^T u(t)\, dt = p_0, \quad \int\limits_0^t u(s)\, ds \geqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{1.4}$$

$$\int\limits_0^T v(t)\, dt = \lambda, \tag{1.5}$$

где $p_0 = P_0(\pi E a_0^2)^{-1}$; $\lambda = (a_1 a_0^{-1})^2 - 1$.

Задача оптимизации процесса наращивания колонны состоит в определении кусочно-непрерывной скорости наращивания $v(t)$, удовлетворяющей неравенству

$$v_1 \leqslant v(t) \leqslant v_2 \left(v_1 = V_1(\pi l a_0^2)^{-1}, \quad v_2 = V_2(\pi l a_0^2)^{-1}\right) \tag{1.6}$$

и доставляющей минимальное значение продольной деформации в момент окончания наращивания $|\varepsilon(T)|$. Поскольку $\varepsilon(T)$ зависит от истории нагружения $P(t)$, указанную задачу трактуем как задачу определения

$$\inf_{v(t)} \sup_{u(t)} |\varepsilon(T)|. \tag{1.7}$$

Супремум в этом выражении вычисляется по всем кусочно-непрерывным функциям $u(t)$, для которых справедлива оценка

$$|u(t)| \leqslant u_1 \left(u_1 = U_1(\pi E a_0^2)^{-1}\right). \tag{1.8}$$

В дальнейшем предполагается, что точные верхняя и нижняя грани в выражении (1.7) достигаются на единственных (с точностью до значений на множествах меры нуль) функциях $u_0(t)$ и $v_0(t)$. Кроме того, считаем, что возможны нетривиальный выбор оптимальной скорости наращивания колонны и нетривиальный выбор закона изменения нагрузки:

$$V_1 T < \pi(a_1^2 - a_0^2) l < V_2 T, \quad P_0 < U_1 T. \tag{1.9}$$

Соотношения (1.9) не позволяют функциям $u(t)$ и $v(t)$ принимать только максимально возможное или только минимально возможное значения для почти всех $t \in [0, T]$. Предполагается, что в любой момент времени $t \in [0, T]$ сжимающая нагрузка $P(t)$ не превосходит эйлерова критического усилия и потеря устойчивости колонной невозможна.

2. Определение оптимального режима нагружения. Фиксируем допустимую скорость наращивания $v(t)$ и рассмотрим сначала задачу определения функции $u_0(t)$, которая доставляет максимальное значение функционалу $\Phi = |\varepsilon(T)|$ на множестве траекторий уравнения (1.3) при ограничениях (1.4). Нетрудно проверить, что для любой допустимой функции $u(t)$ величина $\varepsilon(T)$ отрицательна. Заменим задачу определения максимума функционала Φ задачей максимизации функционала $\Phi_1 = -\varepsilon(T) + \psi_1\left(\int\limits_0^T u(t)\,dt - p_0\right)$ на множестве траекторий уравнения (1.3). Здесь ψ_1 — множитель Лагранжа, учитывающий первое условие (1.4). Если функция $u_0(t)$, доставляющая экстремум функционалу Φ_1, обеспечивает выполнение второго условия (1.4), то эта функция доставляет также экстремум и функционалу Φ. Вычислим приращение функционала Φ_1:

$$\Delta\Phi_1 = \int\limits_0^T F_1(t)\,\Delta u(t)\,dt \left(F_1(t) = \psi_1 + \left[1 + \int\limits_0^t v(s)\,ds\right]^{-1}\right). \tag{2.1}$$

Согласно необходимому условию оптимальности [2], для функции $u_0(t)$ выражение, стоящее под знаком интеграла в (2.1), должно быть неположительно для почти всех $t \in [0,\ T]$ и любых допустимых приращений функции $u_0(t)$. Указанное условие выполняется, если оптимальная функция $u_0(t)$ принимает значение $-u_1$ при $F_1(t) < 0$ и u_1 при $F_1(t) \geqslant 0$. Отсюда и из (1.9) следует, что функция $F_1(t)$ не может принимать только отрицательные или только неотрицательные значения на отрезке $[0,\ T]$. Поскольку функция $F_1(t)$ монотонно не возрастает, существует такое $t_0 \in (0,\ T)$, что

$$u_0(t) = u_1,\ 0 \leqslant t < t_0;\ u_0(t) = -u_1,\ t_0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.2}$$

Параметр t_0 определяется из (1.4), (2.2) в виде

$$t_0 = (1/2)\left(T + p_0 u_1^{-1}\right). \tag{2.3}$$

Согласно (2.2), второе условие (1.4) выполняется. Функция $u_0(t)$ обеспечивает максимум функционала Φ и не зависит от скорости наращивания материала $v(t)$.

3. Определение оптимального режима наращивания. В соответствии с (2.2) задача оптимизации скорости наращивания колонны состоит в определении оптимального управления уравнением (1.3) при $u = u_0(t)$, которое доставляет минимальное значение функционалу Φ при ограничении (1.5). Вводя множитель Лагранжа ψ_2, учитывающий изопериметрическое условие (1.5), заменим эту задачу задачей минимизации функционала $\Phi_2 = -\varepsilon(T) + \psi_2\left(\int\limits_0^T v(t)\,dt - \lambda\right)$ на множестве траекторий уравнения (1.3). Вычислим приращение функционала Φ_2:

$$\Delta\Phi_2 = \int\limits_0^T F_2(t)\,\Delta v(t)\,dt; \tag{3.1}$$

$$F_2(t) = \psi_2 - \int\limits_t^T u_0(\tau)\left[1 + \int\limits_0^\tau v(s)\,ds\right]^{-2} d\tau. \tag{3.2}$$

Согласно необходимому условию оптимальности [2], для функции $v_0(t)$ выражение, стоящее под знаком интеграла в (3.1), неотрицательно для почти всех $t \in [0,\ T]$ и любых допустимых приращений функции $v_0(t)$. Указанное условие выполняется, если управление $v_0(t)$ принимает значение v_1 при $F_2(t) \geqslant 0$ и значение v_2 при $F_2(t) < 0$. Из (1.9) следует, что функция $F_2(t)$ не может принимать только отрицательные или только неотрицательные значения на отрезке $[0,\ T]$. В соответствии с (2.2), (3.2) функция $F_2(t)$ возрастает на интервале $[0,\ t_0)$ и убывает на интервале $(t_0, T]$. Кроме того, выполняется неравенство $F_2(0) < F_2(T)$. Из перечисленных свойств функции $F_2(t)$ вытекает, что возможны только два оптимальных режима наращивания:

$$v_0(t) = v_2,\ 0 \leqslant t < t_1;\ v_0(t) = v_1,\ t_1 \leqslant t \leqslant T; \tag{3.3}$$

$$v_0(t) = v_2,\ 0 \leqslant t < t_2,\ t_3 \leqslant t \leqslant T;\ v_0(t) = v_1,\ t_2 \leqslant t < t_3, \tag{3.4}$$

где $t_1 < t_0$, $t_2 < t_0 < t_3$ — моменты переключения оптимальной скорости притока вещества.

Выясним условия, при которых реализуется режим наращивания (3.3). Параметр t_1 определяется из (1.5) в виде

$$t_1 = (\lambda - v_1T)(v_2 - v_1)^{-1}. \tag{3.5}$$

Для реализации режима наращивания (3.3) необходимо и достаточно выполнения неравенства $F_2(T) \geqslant 0$. Согласно (2.2), (2.3), (3.2), (3.3), (3.5), находим

$$\begin{aligned} 4\left[2(1+\lambda) + v_1\left(p_0u_1^{-1} - T\right)\right]^{-1} &\leqslant (1+\lambda)^{-1} + \\ &+ (v_2 - v_1)\left[(1+\lambda)v_2 - v_1(1+v_2T)\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Если неравенство (3.6) не выполняется, то оптимальный режим наращивания имеет вид (3.4). Параметры t_2, t_3 определяются из соотношений

$$\begin{aligned} t_3 - t_2 = (v_2T - \lambda)(v_2 - v_1)^{-1},\ 2[1 + v_2t_2 + v_1(t_0 - t_2)]^{-1} &= \\ = (1 + v_2t_2)^{-1} + [1 + v_2t_2 + v_1(t_3 - t_2)]^{-1}&. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Первое равенство (3.7) представляет собой запись изопериметрического условия (1.5). Второе соотношение (3.7) следует из равенств $F_2(t_2) = F_2(t_3) = 0$.

Полученные соотношения справедливы при $v_1 > 0$. Если $v_1 = 0$, то они существенно упрощаются. В частности, оценка (3.6) принимает вид

$$p_0u_1^{-1} \geqslant \lambda v_2^{-1}, \tag{3.8}$$

а параметры t_2, t_3 определяются выражениями $t_2 = (1/2)\left(p_0u_1^{-1} + \lambda v_2^{-1}\right)$, $t_3 = T + (1/2)\left(p_0u_1^{-1} - \lambda v_2^{-1}\right)$.

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема. *Если выполняется неравенство* (3.6), *то оптимальная скорость наращивания материала — кусочно-постоянная функция с одной точкой переключения. На первом интервале постоянства оптимальная скорость притока вещества принимает наибольшее значение, а на втором — наименьшее. Если неравенство* (3.6) *не выполняется, то оптимальная скорость наращивания — кусочно-постоянная функция с двумя точками переключения. На первом и последнем интервалах постоянства оптимальная скорость притока вещества принимает наибольшее значение, а на втором — наименьшее.*

4. Возможные обобщения. Теорема позволяет определить оптимальную скорость притока вещества и в ряде других задач наращивания упругих тел. Для примера рассмотрим задачу оптимизации кручения растущего цилиндра. До деформации цилиндр круглого поперечного сечения радиусом a_0 находится в естественном состоянии. В момент времени $t = 0$ к его торцам прикладывается крутящий момент $M(t)$, $M(0) = 0$, а на свободной от нагрузки боковой поверхности начинается непрерывное наращивание материала. Скорость изменения крутящего момента ограничена $(|M^{\cdot}(t)| \leqslant U_1)$, и задано его значение в момент окончания наращивания $(M(T) = M_0)$. Требуется найти допустимую скорость притока вещества $v_0(t)$, которая обеспечивает заданное значение радиуса цилиндра в момент окончания наращивания a_1 и доставляет минимум угла крутки α в конечный момент времени при произвольном допустимом изменении крутящего момента, т. е. доставляет $\inf_{v(t)} \sup_{u(t)} |\alpha(T)|$, где $u(t) = 2M^{\cdot}(t)(\pi G a_0^4)^{-1}$, G — постоянный модуль сдвига материала.

Для простоты ограничимся анализом процесса наращивания без натяга, когда минимально возможная скорость притока вещества равна нулю. Повторяя рассуждения пп. 2 и 3, получим, что оптимальная скорость наращивания определяется из теоремы, причем неравенство, характеризующее число точек переключения, имеет вид, аналогичный (3.8): $m_0 u_1^{-1} \geqslant \lambda v_2^{-1} \left(m_0 = 2M_0 \left(\pi G a_0^4\right)^{-1}\right)$.

Автор выражает глубокую благодарность Н. Х. Арутюняну за внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.** Теория ползучести неоднородных тел.— М.: Наука, 1983.
2. **Васильев Ф. П.** Методы решения экстремальных задач.— М.: Наука, 1981.

Поступила 25/IX 1987 г.

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, НАГРУЖЕННОЙ ПО КРУГОВОЙ ПЛОЩАДКЕ

Б. В. Нерубайло, И. Ф. Образцов, В. П. Ольшанский

(Москва, Харьков)

Цилиндрическая оболочка относится к распространенным элементам конструкций. Поэтому расчету ее локальной прочности уделялось значительное внимание. Наиболее изучено напряженное состояние при нагружении оболочки по прямоугольной площадке и отрезку координатной линии [1—3]. Гораздо беднее информация по расчету прочности оболочки в зоне круговой площадки нагружения. Первые замкнутые формулы для вычисления изгибающих моментов под нормальной силой в центре круга получены в [4]. Позже эти величины представлялись рядами по функциям Макдональда комплексного аргумента [5—7], что позволило расширить область их применимости на оболочки других форм. В [8] для вычисления усилий и моментов в панелях нулевой и положительной кривизны предложены степенные ряды с логарифмом. Путем обрывания разложений даны простые асимптотические формулы, в которых учитываются размеры оболочки и площадки нагружения, а также закон распределения внешней нагрузки. Плотность распределения задается степенной зависимостью с произвольным показателем. Меняя его, можно получать как регулярные, так и сингулярные распределения. Однако остались неизвестными границы применимости полученных асимптотических выражений.

В данной работе предложены замкнутые формулы для вычисления изгибающих моментов и тангенциальных усилий, что важно при полном определении нормальных напряжений на внешней и внутренней поверхностях оболочки. Их вычисление сведено к табулированным функциям Томсона. Кроме равномерного рассмотрено параболическое распределение нагрузки с нулевым значением давления на контуре площадки. Даны простые асимптотические формулы для вычисления усилий и моментов, а также установлены границы их применимости. Проведено сравнение с численными результатами других авторов. Показано, что локальное напряженное состояние бесконечно длинных оболочек определяется одним безразмерным параметром подобия. Это позволяет построить универсальные графики для расчета оболочек различных толщин и диаметров, нагруженных по круговым площадкам различных радиусов. Определение напряжений в наиболее опасной точке (центре площадки) при заданной плотности распределения нагрузки сводится к использованию четырех таких графиков.

При анализе локального напряженного состояния исходим из уравнений тонких упругих изотропных оболочек с большим показателем изменяемости [9]. Площадку нагружения считаем достаточно удаленной от торцов тонкостенного тела, когда можно пренебречь их влиянием на значения местных напряжений. В этих условиях исследование удобно провести методом двумерных интегральных преобразований Фурье. Полученные решения не будут периодическими по окружной координате. Однако это не вносит больших погрешностей ввиду быстрого убывания решений по этой переменной [10]. В пользу таких приближенных решений сделан вывод при сравнении их с точными [11].