

УДК 519.676

Оценки разбалансировки загрузки процессоров при распараллеливании решения 3D краевых задач на квазиструктурированных сетках*

И.А. Климонов, В.Д. Корнеев, В.М. Свешников

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mails: ilya.klimonov@gmail.com (Климонов И.А.), korneev@ssd.sccc.ru (Корнеев В.Д.), victor@lapasrv.sccc.ru (Свешников В.М.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 17, 2024.

Климонов И.А., Корнеев В.Д., Свешников В.М. Оценки разбалансировки загрузки процессоров при распараллеливании решения 3D краевых задач на квазиструктурированных сетках // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2024. — Т. 27, № 1. — С. 61–70.

Проведены исследования влияния разбалансировки загрузки процессоров при распараллеливании решения 3D краевых задач на квазиструктурированных параллелепедальных сетках. Получены оценки влияния разбалансировки на время решения задачи в зависимости от числа процессоров и числа узлов сетки. Даны результаты численных экспериментов, подтверждающие теоретические предположения.

DOI: 10.15372/SJNM20240105

EDN: CIFODT

Ключевые слова: 3D краевые задачи, квазиструктурированные параллелепедальные сетки, распараллеливание, загрузка процессоров, разбалансировка.

Klimonov I.A., Korneev V.D., Sveshnikov V.M. Estimates of CPU load unbalance in parallelizing the solution of 3D boundary value problems on quasi-structured grids // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2024. — Vol. 27, № 1. — P. 61–70.

A study of the influence of unbalancing the processor load in parallelization of solutions of 3D boundary value problems on quasi-structured parallelepiped grids is carried out. Estimates of the influence of the unbalance on the time of solving the problems depending on the number of processors and the number of grid nodes used are given. The results of numerical experiments confirm the theoretical conclusions.

Keywords: 3D boundary value problems, quasi-structured parallelepipedal meshes, parallelization, processor load, unbalance.

Введение

Квазиструктурированные параллелепедальные сетки, рассматриваемые в настоящей работе, строятся путем декомпозиции расчетной области G на непересекающиеся подобласти равномерной макросеткой. В каждом макроэлементе строится своя структурированная параллелепедальная подсетка. Подобласти, а также подсетки, могут быть

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00385, <https://rscf.ru/project/23-21-00385/>.

как регулярными, т. е. целиком лежащими в G , так и нерегулярными — содержащими границу Γ . Нерегулярные подсетки, помимо внутренних счетных узлов, содержат внешние узлы, лежащие вне G , которые не участвуют в вычислениях, а необходимы лишь для поддержки структурированности. Более подробно построение квазиструктурированных 3D сеток излагается в работе [1].

Метод декомпозиции области, как основной инструмент распараллеливания, рассматривался в работах многих авторов (см., например, монографии [2–4]). Мы применяем вариант данного метода, основанный на прямой (непосредственной) аппроксимации уравнения Пуанкаре–Стеклова на интерфейсе, которому посвящены работы [5–9]. Система линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующая уравнение Пуанкаре–Стеклова, решается внешними итерационными методами в подпространствах Крылова [10], которые определяют итерационный процесс по подобластям. На каждом его шаге решаются краевые подзадачи в подобластях с условиями Дирихле на границах подобластей внутренними итерационными методами.

Данный вариант метода декомпозиции был разработан для практически важных целей численного моделирования интенсивных пучков заряженных частиц [11]. Работа с параллелепипедальными подобластями, в которых построены структурированные сетки, значительно упрощает расчет траекторий заряженных частиц.

При распараллеливании подсетки группируются в объединения. Каждое объединение обрабатывается своим процессором. Из-за того, что подсетки содержат различное число узлов (особенно это различие может быть большим при наличии нерегулярных подсеток), возникает разбалансировка загрузки процессоров. Проблемы балансировки процессоров при численном моделировании сложных физических задач рассматривались, например, в работах [12–14]. Основным отличием настоящей работы является то, что расчеты проводятся на квазиструктурированных сетках, состоящих преимущественно из регулярных подсеток. Возникает вопрос: должны ли нерегулярные подсетки участвовать в формировании объединений или можно их сосредоточить на одном процессоре? В настоящей работе с целью ответа на этот вопрос проведены исследования влияния разбалансировки на время решения задачи в целом. Даны оценки зависимости разбалансировки от числа процессоров и числа узлов в подсетках, которые экспериментально получены на последовательности квазиструктурированных сеток, с числом узлов, изменяющимся от нескольких тысяч до нескольких миллионов. Эти оценки подтверждают теоретические предположения.

Работа построена следующим образом: в пункте 1 дается постановка задачи и основы построения квазиструктурированных сеток, в п. 2 приводится краткое изложение этапов решения задачи, п. 3 посвящен технологиям распараллеливания и теоретическим предположениям разбалансировки загрузки процессоров, в п. 4 дается описание численных экспериментов на модельной задаче, в результате которых получены оценки влияния разбалансировки.

1. Постановка задачи. Квазиструктурированные сетки

Пусть в замкнутой области $\bar{G} = G \cup \Gamma$ требуется решить 3D краевую задачу

$$L\varphi = f \quad \text{в области } G, \quad (1)$$

$$l\varphi = g \quad \text{на границе } \Gamma, \quad (2)$$

где L — эллиптический оператор, l — оператор граничных условий, φ — искомая, f, g — заданные функции координат x, y, z . Рассматриваются граничные условия Дирихле и

Неймана. Предполагается, что исходные данные обеспечивают единственное достаточно гладкое решение поставленной задачи.

Решение задачи (1), (2) проводится на квазиструктурированных сетках, суть построения которых заключается в следующем. Опишем вокруг исследуемой области G с границей Γ параллелепипед, в котором построим равномерную параллелепипедальную макросетку вида

$$\Omega_H = \{X_I = IH_x, Y_J = JH_y, Z_K = KH_z\}, \quad I = \overline{0, N_x}, \quad J = \overline{0, N_y}, \quad K = \overline{0, N_z}, \quad (3)$$

с шагами H_x, H_y, H_z , намного превышающими максимальный шаг подсеток h . Здесь $N_x, N_y, N_z > 0$ — заданные целые числа. Тем самым проводится декомпозиция области на непересекающиеся подобласти. Среди них могут оказаться внешние подобласти, не содержащие точек G . Такие подобласти исключаются из расчетов, а во всех остальных подобластях проводятся расчеты. Расчетные подобласти, которые обозначим как G_m , $m = \overline{1, M}$, где M известно, делятся на внутренние $G_m^{(1)}$, содержащие только точки G , и граничные $G_m^{(2)}$, содержащие точки G и Γ . В каждой подобласти G_m строится своя равномерная параллелепипедальная подсетка вида

$$\omega_h = \{x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_k = kh_z\}, \quad i = \overline{0, n_x}, \quad j = \overline{0, n_y}, \quad k = \overline{0, n_z}. \quad (4)$$

Будем предполагать, что n_x, n_y, n_z суть 2 в целой степени. Подчеркнем, что подсетки могут быть несогласованными. Так как подсетки ω_h структурированные, то в них могут входить узлы разных типов. Во внутренние подсетки входят только внутренние узлы, а в граничных подсетках могут быть, помимо внутренних расчетных узлов, еще и внешние узлы, в которых не проводятся расчеты, они необходимы лишь для поддержки структурированности. Подсетки во внутренних подобластях будем называть регулярными, а подсетки в граничных подобластях — нерегулярными.

Граница сопряжения подобластей (интерфейс) γ может быть представлена в виде

$$\gamma = f \cup e \cup b,$$

где f — грани, e — ребра, b — макроузлы сетки Ω_H .

Введем подсетки ω_f на гранях и ω_e на ребрах. Данные подсетки строятся из совпадающих узлов смежных подсеток (4). Для единообразия через ω_b обозначим макроузлы ($\omega_b = b$).

Объединение рассмотренных выше подсеток образует результирующую квазиструктурированную сетку, на которой ищется решение исходной задачи.

На рисунке изображена расчетная область \bar{G} , покрытая квазиструктурированной сеткой, которая участвует в численных экспериментах, приведенных ниже. Данная область представляет собой единичный куб $\bar{R} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ с вырезом $V = \{s_x \leq x \leq 1, s_y \leq y \leq 1, s_z \leq z \leq 1\}$, т.е. $\bar{G} = \bar{R} \setminus V$, где s_x, s_y, s_z — заданные числа, определяющие границу Γ в районе выреза, который изображен в правом верхнем углу. Толстыми линиями показаны координатные линии макросетки, а тонкими — координатные линии микросеток. В подобластях, попадающих в вырез и являющихся внешними, подсетки не строятся.

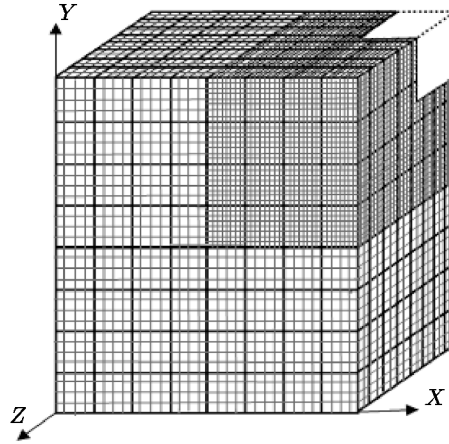


Рис. Расчетная область и квазиструктурированная сетка

2. Основные этапы решения задачи

Введем на гранях f уравнение Пуанкаре–Стеклова

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}\right)_f^+ - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}\right)_f^- = 0, \quad (5)$$

которое обеспечивает “сшивку” решений в подобластях. Здесь \vec{n} — нормаль к f , а знаки $+$, $-$ означают принадлежность объекта смежным подобластям. Производные, входящие в уравнение (5), аппроксимируются конечно-разностными соотношениями, что приводит к приближенному уравнению

$$(d_h u(v))^+ - (d_h u(v))^- = 0 \quad (6)$$

относительно функции v , которая является следом функции u на гранях f :

$$v = u|_f. \quad (7)$$

Здесь u — приближенное значение функции φ , d_h — конечно-разностный оператор. Функция v должна быть найдена такой, что на решении u в подобластях с граничными условиями (2), (7) должно выполняться уравнение (6). Уравнение (6) можно записать в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$Sv + q = 0, \quad (8)$$

где S — квадратная матрица, q — вектор. Элементы матрицы S не вычисляются, так как система (8) решается каким-либо итерационным методом в подпространствах Крылова вида

$$v^{k+1} = \Lambda(v^k, Sr^k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (9)$$

который требует знания лишь действия матрицы на вектор. Здесь функция Λ определяет конкретный алгоритм, r — вспомогательный вектор. В настоящей работе для этих целей используется метод сопряженных невязок [10]. Привлекательной стороной такого выбора служит то, что данный метод обладает сравнительно быстрой сходимостью и дает монотонное приближение к решению. Действие матрицы на вектор вычисляется как разность производных, входящих в уравнение (6).

На каждом шаге итерационного процесса (9) методом конечных разностей или методом конечных объемов [15] решаются следующие краевые подзадачи: в подобластях (на подсетках ω_h), на гранях (на подсетках ω_f), на ребрах (на подсетках ω_e) и в макроузлах (на подсетках ω_b).

Данный итерационный процесс состоит из следующих этапов, которые выполняются параллельно:

1. Задается начальное приближение v^0 на гранях.
2. Рассчитываются значения искомой функции u_e^k, u_b^k на ребрах и в макроузлах (k — номер итерации) соответственно.
3. Рассчитываются значения искомой функции u^k в подобластях путем решения краевых задач с условием (7).
4. Рассчитываются разностные производные, входящие в (6).
5. Выполняется очередной $(k + 1)$ -й шаг итерационного процесса (9).
6. Выполняется проверка на сходимость путем анализа нормы $\|\nu^{k+1} - \nu^k\| < \varepsilon$, где ε — заданная малая величина.
7. Если приведенное неравенство выполняется, то итерации (9) сошлись и после окончательного вычисления искомой функции на ребрах и в макроузлах расчеты прекращаются, а если это не так, то расчеты продолжаются, начиная с этапа 2.

Особое внимание уделяется этапу 3, так как он занимает преимущественное время вычислений.

Решение в подобластях находится также итерационными методами. Для регулярных подобластей используется трехмерный аналог метода Писмана–Речфорда [16], обладающий рекордно высокой скоростью сходимости, а в нерегулярных подобластях — метод последовательной верхней релаксации, хорошо себя зарекомендовавший на сетках с малым числом узлов [17].

3. Технологии балансировки загрузки процессоров

Наибольшую часть времени решения всей задачи занимает решение краевых подзадач в подобластях на подсетках ω_h . В целях сокращения времени оно выполняется параллельно. Число узлов в подсетках ω_h , которое обозначим как N_m , может существенно разниться в зависимости от подобласти. Так, в нерегулярных подсетках может быть $N_m \sim 10$, а в регулярных ~ 100000 . Отсюда следует, что обычно применяемое отображение “одна подобласть — один процессор” неприменимо из-за возможно громадной разбалансировки загрузки процессоров. Действительно, процессор, отвечающий за нерегулярную подсетку с десятками узлов, будет простаивать, ожидая завершения работы процессора для регулярной подсетки с сотнями тысяч узлов, что увеличивает время решения задачи. Это подтверждается результатами численных экспериментов, приведенных ниже.

Для балансировки загрузки процессоров подобласти (подсетки) группируются в объединения Ψ_p , $p = 1, 2, \dots, P$, где P — известное число. Пусть $\bar{N} = [N_\Sigma / P]$ — среднее число счетных узлов в квазиструктурированной сетке (N_Σ — суммарное число счетных узлов; квадратные скобки означают целую часть числа). В каждое объединение Ψ_p включаются такие подсетки, которые давали бы в сумме число счетных узлов

$$N_p \approx \bar{N}. \quad (10)$$

Для этого перебираются подобласти G_m в том порядке, в котором они занумерованы в макросетке (3). Если $N_m \geq \bar{N}$, то формирование текущего p -го объединения считается завершенным. Если это не так, то для достижения критерия (10) в p -е объединение, помимо G_m , включаются подобласти, содержащие другие подсетки. При этом в первую очередь анализируются непросмотренные подсетки в соседних подобластях, имеющих с G_m общие границы. Это делается для того, чтобы исключить по возможности межпроцессорные обмены, которые неизбежны при вычислении разностей, входящих в (6), на границе подобластей, лежащих в разных объединениях.

Проведем анализ разбалансировки в предположении, что время решения на подсетках пропорционально числу узлов. Пусть все нерегулярные подсетки сгруппированы в одно объединение, обрабатываемое одним процессором, например с номером 0, а все регулярные подсетки — процессорами с номерами $1, 2, \dots, P-1$. Обозначим через T_0 — время работы процессора 0, а через T_p — время работы каждого из $(P-1)$ остальных процессоров. Время T_Σ решения на одном процессоре всей задачи без распараллеливания равно

$$T_\Sigma = T_0 + (P-1)T_p. \quad (11)$$

Время T_- решения всей задачи с распараллеливанием, но без балансировки, равно

$$T_- = T_p, \quad (12)$$

а время T_+ решения всей задачи с идеальной балансировкой равно

$$T_+ = T_\Sigma / P. \quad (13)$$

Введем отношение

$$Q = T_- / T_+, \quad (14)$$

характеризующее влияние разбалансировки процессоров на время расчета, которое назовем коэффициентом разбалансировки. Тогда из (11)–(13) следует, что

$$Q = \frac{P}{P-1 + T_0/T_p}. \quad (15)$$

Из (12) следует справедливость неравенства $T_0 \leq T_p$, что соответствует малому числу нерегулярных подсеток в квазиструктурированной сетке по сравнению с регулярными. Такая ситуация часто встречается при расчете интенсивных пучков заряженных частиц. Приведенное неравенство ограничивает число процессоров. Ясно, что при $P \rightarrow \infty$ будет преимущественно работать процессор 0. Но при этом значительно увеличивается время межпроцессорных обменов и падает эффективность распараллеливания. Поэтому в данной статье рассматривается конечное число P , при котором справедливо указанное неравенство. Из (15) видно, что $Q \geq 1$, и влияние разбалансировки падает с увеличением числа процессоров P , а при малом числе процессоров оно велико (достигает $Q \approx 2$ при $P = 2$).

4. Численные эксперименты

Цель численных экспериментов — исследование влияния разбалансировки загрузки процессоров при распараллеливании решения 3D краевых задач на квазиструктурированных сетках, содержащих нерегулярные подсетки. Рассматривалась модельная краевая задача для уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{в области } G, \quad (16)$$

$$\varphi = 1 \quad \text{на границе } \Gamma. \quad (17)$$

Расчетная область \overline{G} изображена на рисунке. Задача (16), (17) решалась на квази-структурированных сетках, в которых макросетка имела параметры $N_x = N_y = N_z = 8$, т. е. проводилась декомпозиция \overline{G} на 512 подобластей. В каждой подобласти строились согласованные кубические подсетки с параметрами $n_x = n_y = n_z = 8, 16, 32$, при этом общее число узлов N_h в каждой квазиструктурированной сетке было соответственно равно

$$N_h = 262144, 2097152, 16777216. \quad (18)$$

В вырезе V было $5^3 = 125$ подобластей, из них 64 внешних и 61 нерегулярных, т. е. содержащих помимо внутренних узлов внешние узлы. Разрез, образующий V , проходил через середины подобластей. Число регулярных подобластей $512 - 125 = 387$.

Уравнение (16) аппроксимировалось на подсетках квазиструктурированной сетки обычной семиточечной схемой [15]. Так как граница выреза проходила по координатным плоскостям, граничное условие (17) учитывалось непосредственно путем подстановки его в разностное уравнение.

Расчеты проводились для числа процессоров $P = 2, 4, 8$ в двух режимах загрузки: 1) разбалансировка, 2) балансировка. В первом режиме все нерегулярные подсетки, которые по сумме узлов эквивалентны 30-и регулярным подсеткам, обрабатывались одним процессором, например процессором с номером 0, а все регулярные подсетки равномерно распределялись между оставшимися $(P - 1)$ процессорами. Во втором режиме, обеспечивая выполнения условия (10), вся нагрузка распределялась между P процессорами.

Для этого при $P = 2$ загрузка процессора 0 дополнялась 194-я подобластями, а на процессор 1 приходилось 224 регулярные подобласти. При $P = 4$ дополнение на процессор 0 составило 75 подобластей, на каждый последующий процессор приходилось по 104 подобласти, а при $P = 8$ эти числа были равны 23, 52 соответственно.

В таблице приведены экспериментальные значения коэффициента разбалансировки процессоров Q , рассчитанные на сетках, с числом узлов (18), при различном числе процессоров.

Таблица. Значения коэффициента разбалансировки Q

$P \backslash \omega_h$	8^3	16^3	32^3
2	2.368	1.721	1.595
4	1.137	1.126	1.092
8	1.014	1.118	1.090

Из таблицы видно, что, во-первых, коэффициент разбалансировки с увеличением числа процессоров уменьшается, стремясь к своему предельному значению 1, при котором нет влияния разбалансировки, и, во-вторых, при малом числе процессоров данный коэффициент уменьшается с ростом числа узлов в подсетках, что особенно заметно при $P = 2$. Последняя особенность поведения Q объясняется следующим образом: регулярные и нерегулярные подсетки рассчитываются итерационными методами с различной скоростью сходимости, что влияет на отношение T_0/T_P в формуле (15).

Результаты расчетов говорят о том, что при выбранной загрузке даже при небольшом числе процессоров ($P = 8$) разбалансировка существенно не влияет на время решения задачи.

5. Заключение

Проведены исследования разбалансировки процессоров при распараллеливании решения 3D краевых задач на квазиструктурированных сетках. Предполагается применение таких сеток в условиях, когда регулярных подобластей, лежащих внутри расчетной области, намного больше, чем нерегулярных, лежащих вблизи границы. На практике — это, например, численное моделирование интенсивных пучков заряженных частиц, движущихся в областях со сложной конфигурацией границы. Показано, что при малом числе процессоров влияние разбалансировки существенно (например, при $P = 2$ время расчета увеличивается более чем вдвое), а при возрастании P влияние разбалансировки уменьшается (уже при $P = 8$ прирост времени не превышает 12 %), т. е. при сделанных предположениях и при достаточно большом числе процессоров влияние разбалансировки не существенно.

Литература

1. **Korneev V.D., Sveshnikov V.M.** Parallel algorithms and domain decomposition techniques for solving three-dimensional boundary value problems on quasi-structured grids // Numerical Analysis and Applications. — 2016. — Vol. 9, № 2. — P. 141–149.
2. **Dolean V., Jolivet P., Nataf F.** An Introduction to Domain Decomposition Methods: Algorithms, Theory and Parallel Implementation. — Philadelphia, USA: SIAM, 2015.
3. **Quarteroni A., Valli A.** Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. — Oxford: Clarendon Press, 1999.
4. **Василевский Ю.В., Ольшанский М.А.** Краткий курс по многосеточным методам и методам декомпозиции области. — М.: МГУ, 2007.
5. **Свешников В.М.** Построение прямых и итерационных методов декомпозиции // Сиб. журн. индустр. математики. — 2009. — Т. 12, № 3. — С. 99–109.
6. **Климонов И.А., Корнеев В.Д., Свешников В.М.** Исследование эффективности применения графических ускорителей при распараллеливании решения трехмерных краевых задач на квазиструктурированных сетках // Материалы 10-й Международной научной конференции “Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ’2016)”. — Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2016. — Vol. 1576. — P. 181–190.
7. **Климонов И.А., Корнеев В.Д., Свешников В.М.** Технологии распараллеливания решения трехмерных краевых задач на квазиструктурированных сетках в гибридной вычислительной среде CPU+GPU // Вычислительные методы и программирование. — 2016. — Т. 17. — С. 65–71.
8. **Корнеев В.Д., Свешников В.М.** Параллельные технологии и сеточные структуры данных для решения трехмерных краевых задач в сложных областях на квазиструктурированных сетках // Вычислительные методы и программирование. — 2018. — Т. 19. — С. 496–506.
9. **Климонов И.А., Корнеев В.Д., Свешников В.М.** Ускорение параллельных алгоритмов решения трехмерных краевых задач на квазиструктурированных сетках // Вычислительные методы и программирование. — 2018. — Т. 19. — С. 121–129.
10. **Ильин В.П.** Методы и технологии конечных элементов. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2007.
11. **Сыровой В.А., Свешников В.М., Козырев А.Н.** Аналитическое и численное моделирование интенсивных пучков заряженных частиц. — Новосибирск: СО РАН, 2023.
12. **Волков К.Н.** Балансировка нагрузки процессоров при решении краевых задач механики жидкости и газа сеточными методами // Вычислительные методы и программирование. — 2012. — Т. 13. — С. 107–129.

13. **Железнякова А.Л.** Балансировка нагрузки процессоров при решении задач молекулярной динамики // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. — 2017. — Т. 18. — С. 1–20.
14. **Пекунов В.В.** Улучшенная балансировка нагрузки процессоров при численном решении задач механики сплошной среды, осложненных химической кинетикой // Кибернетика и программирование. — 2021. — № 1. — С. 13–19.
15. **Ильин В.П.** Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2001.
16. **Klimonov I.A., Sveshnikov V.M.** Technologies of parallelizing the three-dimensional Peaceman-Rachford method on GPU // Короткие статьи и описания плакатов XIII Международной научной конференции “Параллельные вычислительные технологии (PaVT’2019)”. — Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2019. — С. 34–39.
17. **Климонов И.А., Свешников В.М.** Экспериментальное исследование некоторых решателей 3D краевых подзадач на подсетках квазиструктурированных параллелепипедальных сеток // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 4. — С. 429–440.

Поступила в редакцию 22 июня 2023 г.

После исправления 2 октября 2023 г.

Принята к печати 27 октября 2023 г.

Литература в транслитерации

1. **Korneev V.D., Sveshnikov V.M.** Parallel algorithms and domain decomposition techniques for solving three-dimensional boundary value problems on quasi-structured grids // Numerical Analysis and Applications. — 2016. — Vol. 9, № 2. — P. 141–149.
2. **Dolean V., Jolivet P., Nataf F.** An Introduction to Domain Decomposition Methods: Algorithms, Theory and Parallel Implementation. — Philadelphia, USA: SIAM, 2015.
3. **Quarteroni A., Valli A.** Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. — Oxford: Clarendon Press, 1999.
4. **Vasilevskii Yu.V., Ol'shanskii M.A.** Kratkii kurs po mnogosetochnym metodam i metodam dekompozicii oblasti. — M.: MGU, 2007.
5. **Sveshnikov V.M.** Postroenie pryamykh i iteracionnykh metodov dekompozicii // Sib. zhurn. industr. matematiki. — 2009. — Т. 12, № 3. — С. 99–109.
6. **Klimonov I.A., Korneev V.D., Sveshnikov V.M.** Issledovanie effektivnosti primeneniya graficheskikh uskoritelei pri rasparallelivanii resheniya trekhmernykh kraevykh zadach na kvazistrukturirovannykh setkakh // Materialy 10-i Mezhdunarodnoi nauchnoi konferencii “Parallel’nye vychislitel’nye tekhnologii (PaVT’2016)”. — Chelyabinsk: Izd. centr YuUrGU, 2016. — Vol. 1576. — P. 181–190.
7. **Klimonov I.A., Korneev V.D., Sveshnikov V.M.** Tekhnologii rasparallelivaniya resheniya trekhmernykh kraevykh zadach na kvazistrukturirovannykh setkakh v gibridnoi vychislitel’noi srede CPU+GPU // Vychislitel’nye metody i programmirovaniye. — 2016. — Т. 17. — С. 65–71.
8. **Korneev V.D., Sveshnikov V.M.** Parallel’nye tekhnologii i setochnye struktury dannykh dlya resheniya trekhmernykh kraevykh zadach v slozhnykh oblastiakh na kvazistrukturirovannykh setkakh // Vychislitel’nye metody i programmirovaniye. — 2018. — Т. 19. — С. 496–506.
9. **Klimonov I.A., Korneev V.D., Sveshnikov V.M.** Uskorenie parallel’nykh algoritmov resheniya trekhmernykh kraevykh zadach na kvazistrukturirovannykh setkakh // Vychislitel’nye metody i programmirovaniye. — 2018. — Т. 19. — С. 121–129.
10. **Il’in V.P.** Metody i tekhnologii konechnykh elementov. — Novosibirsk: Izd-vo IVMiMG SO RAN, 2007.

11. **Syrovoy V.A., Sveshnikov V.M., Kozyrev A.N.** Analiticheskoe i chislennoe modelirovanie intensivnykh puchkov zaryazhennykh chastic. — Novosibirsk: SO RAN, 2023.
12. **Volkov K.N.** Balansirovka nagruzki processorov pri reshenii kraevykh zadach mekhaniki zhidkosti i gaza setochnymi metodami // Vychislitel'nye metody i programmirovaniye. — 2012. — T. 13. — S. 107–129.
13. **Zheleznyakova A.L.** Balansirovka nagruzki processorov pri reshenii zadach molekulyarnoi dinamiki // Fiziko-khimicheskaya kinetika v gazovoi dinamike. — 2017. — T. 18. — S. 1–20.
14. **Pekunov V.V.** Uluchshennaya balansirovka nagruzki processorov pri chislennom reshenii zadach mekhaniki sploshnoi sredy, oslozhnennykh khimicheskoi kinetikoi // Kibernetika i programmirovaniye. — 2021. — № 1. — S. 13–19.
15. **Il'in V.P.** Metody konechnykh raznostei i konechnykh ob"emov dlya ellipticheskikh uravnenii. — Novosibirsk: Izd-vo IVMiMG SO RAN, 2001.
16. **Klimonov Il., Sveshnikov V.** Technologies of parallelizing the three-dimensional Peaceman-Rachford method on GPU // Korotkie stat'i i opisaniya plakatov XIII Mezhdunarodnoi nauchnoi konferencii "Parallel'nye vychislitel'nye tekhnologii (PaVT'2019)". — Chelyabinsk: Izd. centr YuUrGU, 2019. — S. 34–39.
17. **Klimonov I.A., Sveshnikov V.M.** Eksperimental'noe issledovanie nekotorykh reshatelei 3D kraevykh podzadach na podsetkakh kvazistrukturirovannykh parallelepipedal'nykh setok // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2022. — T. 25, № 4. — S. 429–440.