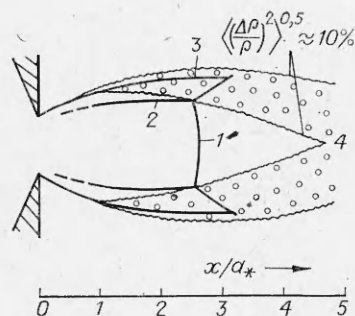


Р и с. 3



Р и с. 4

непосредственно за диском Маха. На рис. 3 показан осевой ($y = 0$) профиль плотности и пульсаций плотности для $Re_L = 1,2 \cdot 10^4$. Пульсации плотности резко возрастают на некотором расстоянии за диском Маха, соответствующем приходу возмущений с границы струи на ее ось.

Анализ поперечных профилей пульсаций на различных расстояниях от среза сопла позволяет установить границу зоны турбулентного течения во всей области начального участка струи. На рис. 4 показана структура струи при $Re_L \approx 10^4$, где 1 — диск Маха, 2 — висячий скачок уплотнения, 3 — граница струи, 4 — зона турбулентного течения.

В заключение заметим, что турбулентный характер течения в слое смешения приводит к распространению акустических волн в окружающее пространство [8]. Локализация измерений в условиях настоящих экспериментов $3 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3$ (линейный масштаб $\approx 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ см}$), что соответствует высокочастотной ветви акустического спектра струи ($\approx 2 \text{ МГц}$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Авдеевский В. С., Иванов А. В. и др. Влияние вязкости на течение в начальном участке сильно недорасширенной струи // ДАН СССР.— 1971.— Т. 197, № 1.
2. Дулов В. Г., Лукьянов Г. А. Газодинамика процессов истечения.— Новосибирск: Наука, 1984.
3. Волчков В. В., Иванов А. В. и др. Струи низкой плотности за звуковым соплом при больших перепадах давления // ПМТФ.— 1973.— № 2.
4. Новопашии С. А., Перепелкин А. Л., Ярыгин В. Н. Импульсный локальный метод исследования потоков газа по рэлеевскому рассеянию света // ПТЭ.— 1986.— № 5.
5. Питерсон К. В. Условия применения перспективной аппаратуры для диагностики поля течения // РТК.— 1979.— Т. 17, № 12.
6. Мак-Картни Э. Оптика атмосферы.— М.: Мир, 1979.
7. Агемян Т. А. Основы теории ошибок для астрономов и физиков.— М.: Наука, 1972.
8. Гиневский А. С., Власов Е. В., Колесников А. В. Аэроакустические взаимодействия.— М.: Машиностроение, 1978.

Поступила 14/III 1986 г.

УДК 532.542

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ РАСТЯЖИМОЙ ТРУБКИ, ДОПУСКАЮЩЕЙ ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ВОЛНЫ

В. Н. Филиппчук, И. Г. Проценко

(Днепропетровск, Москва)

Уединенные волны (солитоны, в частности) при анализе существенно нелинейных систем в известном смысле играют такую же фундаментальную роль, как и нормальные моды в линейном случае. Соответствующие методы (точные и приближенные) разработаны уже достаточно хорошо [1—3]. В данной работе предлагается модель растяжимой трубки (трубопровода), учитывающая эффекты образования таких волн при транспортировке жидкости. Исследована возможность образования волн качественно

различных типов, в результате численных экспериментов обнаружены их «солитонные свойства» и прослежен процесс локализации при некоторых типичных начальных условиях.

Целесообразность изучения подобных систем обусловлена как возможными техническими приложениями, так и определенной связью с проблемами биомеханики: в кровеносных сосудах локализованные волны прощупываются достаточно далеко от источника (нуль), и это, по-видимому, свидетельствует об их нелинейной природе.

1. Основные допущения. Рассмотрим осесимметричный поток идеальной несжимаемой жидкости, заключенный в трубке, поверхность которой в каждый момент времени t есть поверхность вращения $r = a(x, t)$ относительно оси x (рис. 1). Пусть в недеформированном состоянии трубка имеет радиус $r = a^0 = \text{const}$, а деформированная (под действием давления жидкости) поверхность такова, что выполняется следующее условие пологости (индекс внизу здесь и далее означает дифференцирование по указанной переменной):

$$(1.1) \quad |a_x| \ll 1.$$

Предположим, что поверхность трубки образуют упругие кольца, насаженные на продольный регулярный набор одинаково растянутых струн (рис. 1). Поверхность будем считать непрерывной и непроницаемой для жидкости. Такая конструкция может служить моделью растянутой в осевом направлении цилиндрической вафельной оболочки либо трубки из изотропного материала, помещенной в некоторую упругую среду.

Отметим, что в частном случае (когда струны отсутствуют) при малых перемещениях ($a - a^0$) получаем модель растяжимой трубки, рассмотренную в [4]. Соответствующий предельный переход анализируется ниже.

2. Вывод уравнений динамики трубки. Согласно принятым в п. 1 предположениям, запишем выражение для потенциальной энергии осесимметричных деформаций в виде

$$(2.1) \quad \int_l \int_{S^*} \frac{T^*}{2} a_x^2 dS^* dx + \int_l \int_S \frac{\lambda \varepsilon^2}{2} dS dx = \pi \int_l a T^* a_x^2 dx + \pi \lambda a^0 \int_l \varepsilon^2 dx, \quad \varepsilon = \frac{dS^* - dS}{dS}$$

где $dS^* = a d\theta$, $dS = a^0 d\theta$ — элементы длины окружности в поперечном сечении соответственно в деформированном и исходном состояниях трубки; T^* — суммарное усилие в струнах на единицу длины деформированного кольца; λ — упругая постоянная, характеризующая (в данном случае линейно-упругий) материал колец; l — длина трубки.

Ввиду предположения об идеальности жидкости на внутреннюю поверхность со стороны жидкости действует только нормальное давление $p^a = p^a(x, t)$ (внешнее давление полагаем равным нулю). В силу пологости влиянием этого давления и усилий в кольцах на изменение усилий в осевом направлении x будем пренебрегать и, таким образом, получим

$$(2.2) \quad 2\pi a T^* = 2\pi a^0 T = \text{const}$$

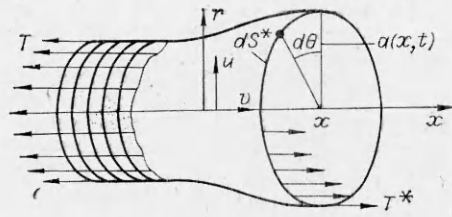
— условие сохранения потока осевых усилий.

С учетом (2.2) выражение (2.1) для потенциальной энергии приобретает вид

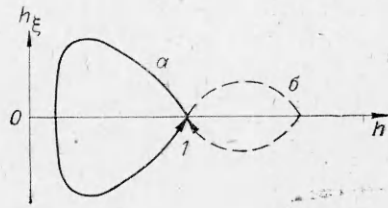
$$(2.3) \quad \pi a^0 T \int_l a_x^2 dx + \pi a^0 \lambda \int_l \left(\frac{a}{a^0} - 1 \right)^2 dx.$$

Пусть σ — поверхностная плотность трубки (σ^* — эта же величина в деформированном состоянии). Условие сохранения массы приводит к равенству $2\pi a \sigma^* dx = 2\pi a^0 \sigma dx$, и выражение для кинетической энергии всей трубки преобразуется:

$$(2.4) \quad \int_l \int_{S^*} \frac{1}{2} a_i^2 \sigma^* dS^* dx = \pi a^0 \sigma \int_l a_i^2 dx.$$



Р и с. 1



Р и с. 2

Соотношения (2.3), (2.4) позволяют написать лагранжиан свободной системы в форме

$$(2.5) \quad L = \frac{\sigma}{2} a_t^2 - \frac{T}{2} a_x^2 - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{a}{a^0} - 1 \right)^2.$$

Уравнение движения

$$(2.6) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial a_t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial a_x} - \frac{\partial L}{\partial a} = Q^a.$$

Здесь $Q^a = p^a a / a^0$ — обобщенное давление, определяемое из выражения для работы давления на виртуальном перемещении δa :

$$\int_l p^a \delta a 2\pi a dx = 2\pi a^0 \int_l p^a \frac{a}{a^0} \delta a dx = 2\pi a^0 \int_l Q^a \delta a dx.$$

Подставив (2.5) в (2.6), получим окончательно уравнение движения

$$(2.7) \quad p^a = \frac{a^0}{a} \left[\sigma a_{tt} - T a_{xx} + \frac{\lambda}{a^0} \left(\frac{a}{a^0} - 1 \right) \right].$$

Если величина $y = a - a^0$ мала по сравнению с a^0 , то, линеаризуя (2.7) по y , приходим к уравнению колебаний струны на линейно-упругом основании

$$(2.8) \quad p^a = \sigma y_{tt} - T y_{xx} + \frac{\lambda}{a^0} y.$$

Если, кроме того, струны отсутствуют ($T = 0$), (2.8) принимает вид уравнения движения линейного осциллятора. Такая упрощенная модель трубки принята в [4].

3. Уравнения потока и постановка задачи. Осредненные с учетом допущения (1.1) уравнения Эйлера для осесимметричного потока в цилиндрической системе координат имеют вид

$$(3.1) \quad a a_t + \frac{1}{2} (a^2 \langle v \rangle)_x = 0;$$

$$(3.2) \quad \langle v \rangle_t + \langle v \rangle \langle v \rangle_x = - \frac{1}{\rho} p_{xx}^a$$

где $\langle v \rangle = \frac{2}{a^2} \int_0^a r v dr$ — средняя по сечению потока скорость частиц в осевом направлении; ρ — плотность жидкости. Уравнения (2.7), (3.1), (3.2) образуют систему относительно величин p^a , $\langle v \rangle$, a . Функция давления легко исключается подстановкой (2.7) в (3.2).

Введем безразмерные величины

$$h = \frac{a}{a^0}, \quad V = \frac{\langle v \rangle}{v^0}, \quad \bar{x} = \frac{x}{a^0}, \quad \bar{t} = \frac{v^0 t}{a^0},$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\rho a^0 v^0}, \quad \bar{T} = \frac{T}{\rho a^0 v^0}, \quad \mu = \frac{\sigma}{\rho a^0}$$

(v^0 — скорость установившегося потока в сечении, имеющем радиус $a =$

$=a^0$). Тогда после несложного преобразования система принимает вид (черту над x , t , λ , T опускаем)

$$(3.3) \quad V_t + VV_x = - \left[\frac{1}{h} (\mu h_{tt} - Th_{xx} - \lambda) \right]_x,$$

$$h_t + Vh_x = - \frac{h}{2} V_x.$$

Система (3.3) допускает стационарное решение с постоянными вдоль оси x значениями V и h ($V = 1$, $h = 1$).

Пусть в начальный момент $t = 0$ скорость потока и поверхность трубки получают некоторые возмущения. Задача состоит в изучении дальнейшей эволюции формы и распространения этих возмущений.

4. Уединенные волны. Анализ системы (3.3) в случае бесконечной трубки показывает возможность распространения уединенных волн. На рис. 2 показаны траектории соответствующих решений в плоскости (h_ξ, h) , где индекс ξ означает дифференцирование по фазовой переменной бегущей волны.

Тип траектории зависит от значения параметра $b = (1 - c)^2/2\lambda$. При $b < 1/4$ траектория (a) располагается в области $h < 1$. Она соответствует уединенной волне в форме осесимметричной вмятины в трубке. Если $1/4 < b < 1$, величина h больше единицы (b). Это — бегущая волна в виде локализованного осесимметричного «раздутия». На рис. 2 петли a и b при $b \rightarrow 1/4$ стягиваются в точку $h = 1$, а при $b = 1/4$ происходит качественная смена возможной формы уединенной волны. Для значений b , близких к $1/4$, может быть получено простое аналитическое решение

$$(4.1) \quad h = 1 - \frac{A}{\operatorname{ch}^2 \xi}, \quad V = c + \frac{1 - c}{h^2},$$

где $A = \frac{1}{4b} - 1$;

$$(4.2) \quad \xi = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda \left(\frac{1 - 4b}{T - \mu c^2} \right)} (x - ct).$$

Анализ этого решения и подкоренного выражения в (4.2) показывает, что локализованная вмятина распространяется в достаточно жестких либо относительно легких трубках.

Наоборот, для распространения локализованного раздутия трубка должна быть достаточно массивной либо иметь относительно большую жесткость на поперечное растяжение (по сравнению с осевым растяжением).

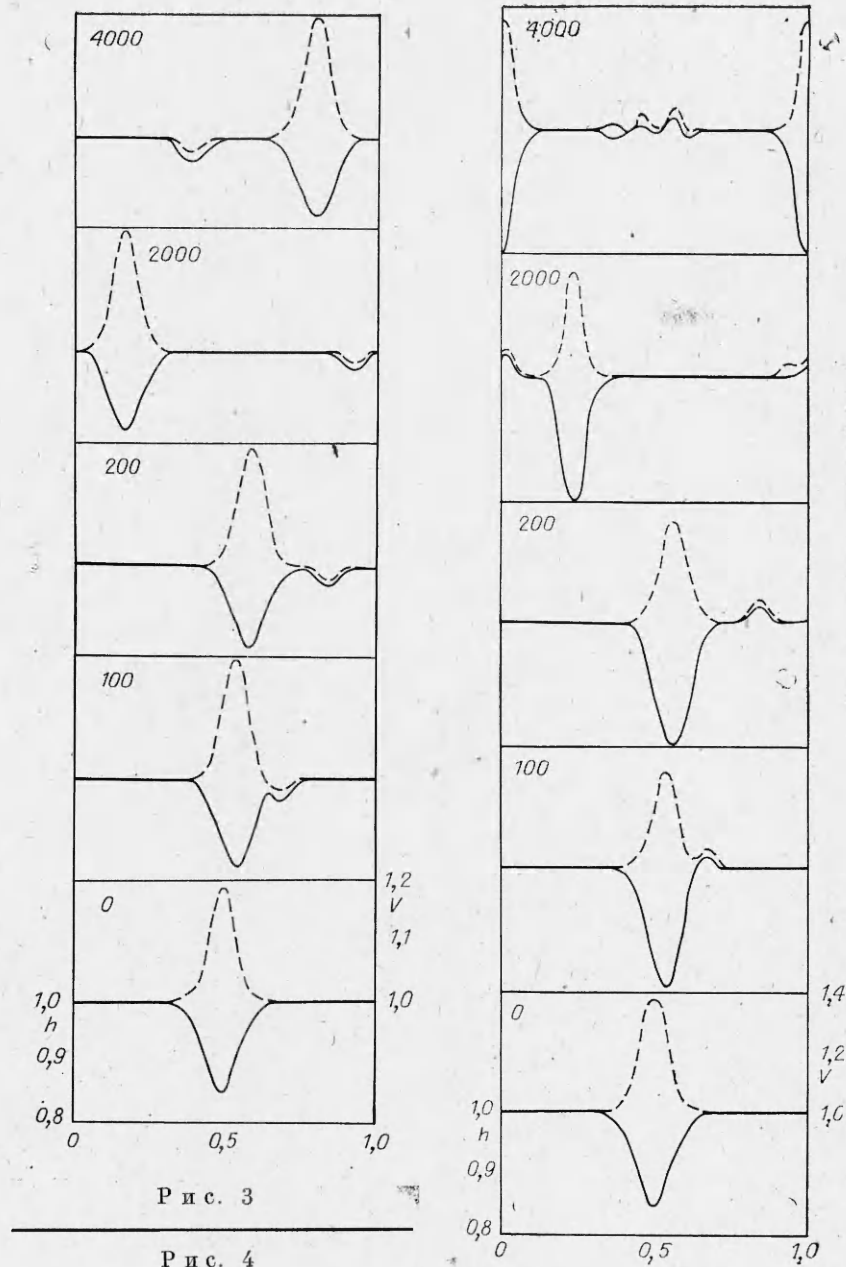
При использовании решения (4.1) необходимо следующее ограничение:

$$|A| = \left| \frac{\lambda}{2(1 - c)^2} - 1 \right| \ll 1.$$

При отсутствии продольного натяжения ($T = 0$) возможен лишь второй тип уединенных волн.

5. Схема вычислений. С целью изучения характера волновых процессов при начальных возмущениях более общего вида проведены численные эксперименты. Интегрирование системы (3.3) проводилось в частном случае безынерционной трубки ($\mu = 0$) при периодических краевых условиях.

Численная конечно-разностная схема интегрирования выбиралась явной трехшаговой со вторым порядком точности аппроксимации пространственных производных. Интегрировалась система уравнений на 101-точечном шаблоне с шагом по x $\Delta x = 0,01$ и по времени $\Delta t = 0,001$, что обеспечивало устойчивость численной схемы. Начальные условия



задавались в виде (4.1). На рис. 3, 4 цифра в левом верхнем углу каждого кадра указывает номер шага интегрирования по времени. Слева указаны значения ординат точек поверхности трубки $h = h(x)$ (сплошные линии), цифры справа соответствуют графикам распределения скорости $V = V(x)$ (штриховые линии).

6. Обсуждение результатов. Если графики скорости и поверхности взаимно симметричны относительно осей абсцисс, то это означает, что в местах сужений скорость выше, чем в расширениях трубки. Обнаружены, однако, «выбросы» в виде локализованных волн, для которых выпуклости графиков направлены в одну сторону — вниз или вверх (рис. 3,4). Несмотря на небольшие по сравнению с вмятиной размеры, раздутие распространяется с большей фазовой скоростью. Подчеркнем, что вычисления проводились для случая безынерционной трубки ($\mu = 0$), когда описанный в п. 4 анализ дает уединенные волны только в виде вмятин.

Во всех случаях заметна тенденция к образованию локализованных волн из различных начальных возмущений. Эти волны обладают определенной устойчивостью и достаточно долгое время сохраняют индивидуальность после взаимодействия с себе подобными. Процесс сброса начальным возмущением «лишней энергии» аналогичен тому, который демонстрируют некоторые точно интегрируемые системы [1, 2].

В целом результаты численного анализа позволяют считать, что поведение локализованных волн в рассматриваемой системе имеет основные характерные особенности распространения солитонов, по крайней мере, на относительно больших интервалах времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория солитонов: метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980.
2. Солитоны в действии. — М.: Мир, 1981.
3. Горшков К. А., Островский Л. А., Папко В. В. Взаимодействия и связанные состояния солитонов как классических частиц // ЖЭТФ. — 1976. — Т. 71, вып. 2(8).
4. Thielheim K. O. Solitons in distensible tubes // J. Appl. Phys. — 1983. — V. 54, N 6.

Поступила 24/IV 1986 г.

УДК 517.9 : 533.9

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ СФЕРИЧЕСКОГО ПОРШНЯ В ТЕПЛОПРОВОДНОЙ СРЕДЕ С СОХРАНЕНИЕМ ЭНЕРГИИ ТОЧЕЧНОГО ВЗРЫВА

Р. Г. Даутов, Е. В. Ермолин
(Казань)

В работе рассматривается задача о движении сферического поршня с заданным на нем теплоотводом по теплопроводной среде с распределенной плотностью, в которой в начальный момент времени произошел точечный взрыв с выделением конечной энергии E_0 . При этом изучается случай, когда теплоотвод компенсирует работу поршня, т. е. полная энергия среды остается постоянной и равной выделенной энергии E_0 .

В результате анализа численно найденных автомодельных решений обнаружены следующие закономерности.

Для решений, имеющих одну и ту же полную энергию, с увеличением скорости поршня и теплоотвода на нем уменьшаются массовая скорость распространения переднего фронта волны, разность между скоростями переднего фронта возмущений и идущей за ней ударной волны, доля тепловой энергии.

С увеличением E_0 происходит, во-первых, усиление вышеперечисленных закономерностей, во-вторых, для двух предельных задач — чистый взрыв [1, 2], максимальный теплоотвод — обнаруживаются интересные в сопоставлении закономерности: процент кинетической энергии взрыва в задаче без поршня (чистый взрыв) падает, процент кинетической энергии взрыва в задаче с максимальным теплоотводом (температура на поршне равна нулю) возрастает.

Запишем систему уравнений газовой динамики в лагранжевой массовой системе координат [3]:

$$(1) \quad \frac{\partial r}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{\rho r^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -r^2 \frac{\partial p}{\partial m}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial (r^2 v)}{\partial m},$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p \frac{\partial (r^2 v)}{\partial m} - \frac{\partial (r^2 w)}{\partial m}, \quad W = -r^2 \rho \kappa \frac{\partial T}{\partial m},$$

$$\varepsilon = \frac{RT}{\gamma - 1}, \quad p = R\rho T, \quad \kappa = aT^{5/2}, \quad \gamma = \frac{5}{3}.$$

Здесь r — радиус; m — лагранжева массовая переменная; t — время; v — скорость; ρ — плотность; p — давление; ε — внутренняя энергия; T — температура; W — тепловой поток; κ — коэффициент теплопроводности, характерный для высокотемпературной водородной плазмы.

Из размерностного анализа [4] следует, что задача о мгновенном точечном взрыве с последующим движением сферического поршня имеет автомодельное решение при выполнении: