УДК 531.121.1

ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИ КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ

А. Г. Егоров, А. М. Камалутдинов,
В. Н. Паймушин*, В. А. Фирсов*

Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008 Казань, Россия
* Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева, 420111 Казань, Россия
E-mails: aegorov0@gmail.com, islamui@hotmail.com, vpajmushin@mail.ru, vafirsov_49@mail.ru

Предложен метод определения коэффициента аэродинамического сопротивления пластины, гармонически колеблющейся в вязкой несжимаемой жидкости, основанный на измерении амплитуды прогибов консольно закрепленных тонких пластин при их затухающих изгибных колебаниях с частотой, соответствующей первой моде, и решении обратной задачи вычисления коэффициента сопротивления по найденному в эксперименте логарифмическому декременту колебаний балки.

Ключевые слова: свободные механические колебания, коэффициент сопротивления, вязкая несжимаемая жидкость, демпфирование, декремент колебаний.

DOI: 10.15372/PMTF20160210

Введение. Одним из наиболее опасных режимов динамического деформирования конструкций является резонансный режим, реализующийся в конструкции при совпадении частот ее собственных колебаний с частотой внешнего циклического воздействия. Как известно, при таком режиме нагружения в несколько раз возрастают амплитуды изменения параметров динамического напряженно-деформированного состояния. Для корректного и достоверного теоретического определения этих значений с необходимой для практических целей точностью в расчетных соотношениях требуется учитывать демпфирующие свойства материалов конструкции, обусловленные внутренним трением. В настоящее время существует большое количество работ, в которых предложены методы определения демпфирующих свойств материалов и построены соответствующие математические модели (см., например, [1–3]). В [4] разработан метод измерения демпфирующих свойств материала путем исследования затухающих изгибных колебаний консольно закрепленных плоских тест-образцов. При использовании такого подхода необходимо выделять аэродинамическую составляющую демпфирования, обусловленную взаимодействием тест-образца с окружающей средой (водой, воздухом) [4, 5].

В общем случае задача учета аэродинамических сил, действующих на консольно закрепленную пластину, чрезвычайно сложна, главным образом вследствие сложности трех-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-19-00667).

мерных течений газа, вызванных колебаниями пластины. Известные подходы [6, 7] к решению этой задачи основаны на предположении, что длина пластины L существенно превышает ее ширину b и толщину h. В этом случае при низких структурных модах колебаний длина вибрационной волны значительно больше величины отклонений пластины, в силу чего она может рассматриваться как локально-плоская. При этом трехмерными явлениями, соответствующими течению газа вдоль продольной оси пластины, в том числе сходом вихрей с ее торца, можно пренебречь. В этом случае аэродинамические силы в каждом сечении балки можно определить, рассматривая плоское движение газа, вызванное гармоническими осцилляциями тонкой жесткой пластины. Таким образом, задача определения аэродинамического сопротивления плоской пластины непосредственно связана с задачей выделения аэродинамической компоненты в логарифмическом декременте колебаний (ЛДК) консольно закрепленной пластины.

Трудность определения аэродинамической компоненты демпфирования по экспериментально найденному ЛДК заключается в том, что в декремент колебаний помимо аэродинамической входят также конструкционная и внутренняя составляющие. Внутреннее демпфирование является свойством материала пластины и в общем случае зависит от амплитуды колебаний. Такие зависимости в большинстве случаев достоверно не известны. Более того, указанный выше метод исследования затухающих изгибных колебаний консольно закрепленных тест-образцов [4] предназначен для определения ЛДК. Однако, как известно, для дюралюминиевых пластин внутреннее трение не зависит от амплитуды колебаний [8]. В свою очередь конструкционное демпфирование определяется способом закрепления пластины и также не зависит от амплитуды колебаний [8, 9]. Таким образом, зависимость ЛДК от амплитуды колебаний дюралюминиевых пластин полностью определяется аэродинамической компонентой. Это позволяет рассчитать по измеренному в экспериментах ЛДК аэродинамическую компоненту демпфирования и восстановить по ней аэродинамическое сопротивление пластины.

1. Экспериментальные измерения. Для измерения декремента колебаний гармонически колеблющейся пластины была создана экспериментальная установка, схема которой представлена на рис. 1. Установка состоит из основания и стойки для крепления пластины, жестко соединенных между собой. Защемление дюралюминиевой пластины осу-

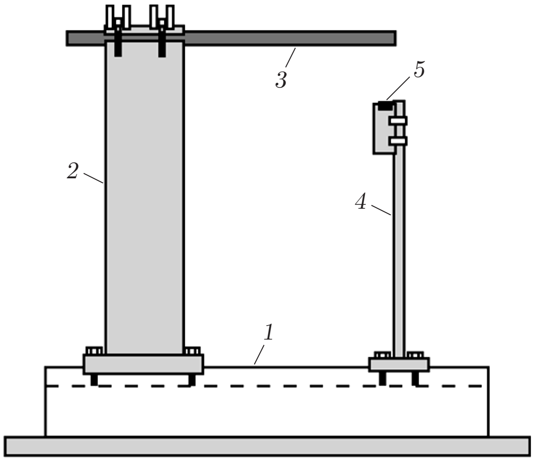

Рис. 1. Схема экспериментальной установки:
1 — основание, *2* — стойка для крепления пластины, *3* — дюралюминиевая пластина, *4* — стойка для крепления лазерного датчика перемещений, *5* — лазерный датчик перемещений

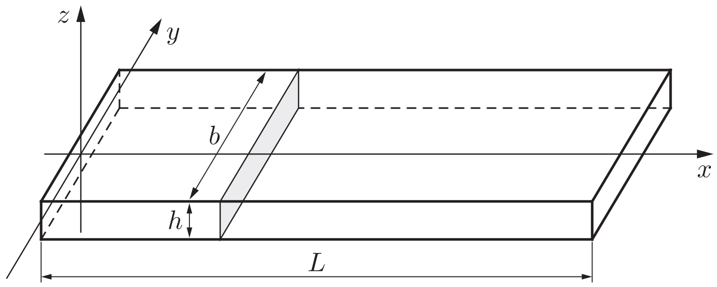

Рис. 2. Схема задачи о вибрации пластины (заштрихованная область — сечение пластины в плоской гидродинамической задаче)

ществляется с помощью разнесенных планок, соединяемых со стойкой двумя рядами болтов и исключающих поворот испытываемой пластины в сечении заделки. На основании установлена также стойка для крепления лазерного датчика перемещений, которая может перемещаться вдоль основания для измерения амплитуды колебаний точек тест-образца при изменении длины его колеблющейся части (стрелы вылета).

В экспериментах используется триангуляционный лазерный датчик фирмы RIFTEK (RF603-X/100), обеспечивающий измерение амплитуды колебаний с точностью до 0,1 мм. Результаты измерений передаются на персональный компьютер.

После отклонения пластин от начального положения равновесия они совершали свободные затухающие изгибные колебания. Измерение амплитуды начиналось с некоторой задержкой по времени, необходимой для перехода пластины из начального (статического) изогнутого состояния к основной форме колебаний. Значения амплитуды A колебаний точки на конце пластины фиксировались в течение большого (до 1000) числа циклов, пока величина отклонения пластины от положения равновесия могла быть измерена достаточно точно.

Результаты экспериментов показывают, что частота колебаний пластины ω незначительно изменяется со временем в окрестности собственной частоты ω_0, а амплитуда A колебаний конца пластины медленно затухает со временем t вследствие наличия сопротивления воздуха, внутреннего трения и конструкционного демпфирования. Затухание колебаний описывается логарифмическим декрементом колебаний $\delta = -2\pi\omega_0^{-1}A^{-1}(dA/dt)$. С использованием методики, описанной в [4], по полученной в экспериментах виброграмме определяются частота ω_0, текущие амплитуда колебаний $A(t)$ и ЛДК $\delta(t)$. В результате строится зависимость ЛДК от частоты и амплитуды колебаний $\delta(A, \omega_0)$. В экспериментах использовались дюралюминиевые пластины толщиной $h = 0{,}95$ мм и шириной $b = 10$, 20, 30 мм, длина колеблющейся части пластины L (рис. 2) изменялась в диапазоне $150 \div 300$ мм с шагом 10 мм. Во всех случаях выполнялось условие $h \ll b \ll L$.

2. Определение аэродинамической составляющей ЛДК. С учетом малости сил трения и аэродинамических сил по сравнению с упругими силами можно показать, что логарифмический декремент колебаний представляет собой сумму двух независимых слагаемых, соответствующих механическому (внутреннему и конструкционному) δ_H и аэродинамическому δ_A демпфированию [5]:

$$\delta = \delta_H + \delta_A.$$

Напомним, что в случае дюралюминиевых пластин механическое демпфирование δ_H, в отличие от аэродинамического δ_A, не зависит от амплитуды A колебаний пластины [8, 9].

Аэродинамический декремент колебаний δ_A связан с локальным (в сечении x) коэффициентом аэродинамического сопротивления колеблющейся плоской пластины $C(\xi)$,

$\xi = x/L$ соотношением [5–7]

$$\delta_A = \frac{\rho_a}{\rho}\,\frac{b}{h}\,D, \qquad D = \frac{4}{3}\,\varkappa_0\,\frac{\langle CW^3\rangle}{\langle W^2\rangle}, \tag{1}$$

где ρ, ρ_a — плотность дюралюминия и воздуха; $\varkappa_0$ — безразмерная амплитуда колебаний конца пластины; выражение в угловых скобках обозначает среднее этого выражения по длине пластины; $W(\xi)$ ($W(1) = 1$) — функция основной моды колебаний в отсутствие сил внутреннего трения и аэродинамических сил:

$$W(\xi) = \frac{1}{2}\,(\operatorname{ch} k\xi - \cos k\xi) - \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{ch} k + \cos k}{\operatorname{sh} k + \sin k}\,(\operatorname{sh} k\xi - \sin k\xi).$$

Величина k вычисляется как наименьший положительный корень уравнения $\cos k \operatorname{ch} k = -1$ ($k = 1{,}8751$) и определяет главную частоту собственных колебаний пластины

$$\omega_0 = k^2\,\frac{h}{L^2}\,\sqrt{\frac{E}{12\rho}}\,.$$

Из анализа размерностей следует, что в данном сечении ξ безразмерный коэффициент аэродинамического сопротивления $C(\xi)$ пластины должен зависеть от трех безразмерных параметров, один из которых $\Delta = h/b$ задает форму пластины, два других

$$\beta = b^2\omega_0/(2\pi\nu), \qquad \varkappa(\xi) = \varkappa_0 W(\xi)$$

определяют параметр Стокса и (с точностью до множителя 2π) параметр Кулегана — Карпентера соответственно. Здесь β — безразмерная частота колебаний, равная квадрату отношения ширины пластины к толщине нестационарного пограничного слоя; $\varkappa$ — локальная амплитуда колебаний, нормированная на ширину пластины; ν — кинематическая вязкость воздуха.

Коэффициент аэродинамического сопротивления пластины обычно представляется [5, 6] в виде суммы вязкой C_{vis} и вихревой C_{vort} составляющих:

$$C = C_{vis} + C_{vort}.$$

Соответственно нормализованный аэродинамический декремент колебаний пластины имеет вид

$$D = D_{vis} + D_{vort}.$$

Первое слагаемое D_{vis} определяет вклад вязкой составляющей аэродинамического сопротивления пластины C_{vis} в ЛДК. Его влияние существенно при малых амплитудах колебаний пластины. Для учета вязких эффектов используется стоксово приближение, из которого для тонких пластин ($\Delta < 1/3$) следует аналитическая формула [7]

$$C_{vis} = 4{,}61/(\varkappa\sqrt{\beta}\,).$$

При этом величина D_{vis} вычисляется с использованием (1):

$$D_{vis} = 6{,}14/\sqrt{\beta}$$

и зависит лишь от безразмерной частоты.

Величина $D_{vort}(\varkappa_0, \beta, \Delta)$ представляет собой вклад вихревой компоненты аэродинамического сопротивления пластины $C_{vort}(\varkappa, \beta, \Delta)$ в ЛДК. Очевидно, что при $\varkappa \to 0$ вихревая составляющая аэродинамического сопротивления C_{vort} исчезает. Поэтому при $\varkappa_0 = 0$ вклад в общий ЛДК вносят лишь механическая и вязкая составляющие демпфирования.

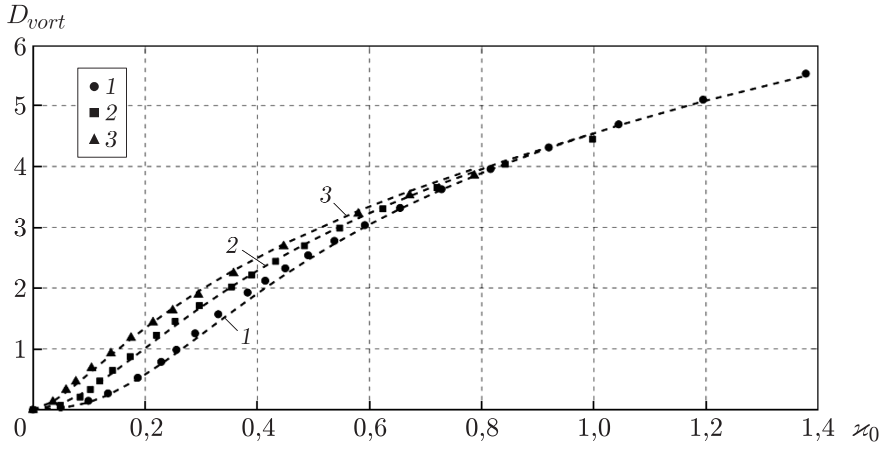

Рис. 3. Зависимость $D_{vort}(\varkappa_0)$:
точки — экспериментальные данные, линии — аппроксимация; *1* — $b = 10$ мм, $\beta = 55$, *2* — $b = 20$ мм, $\beta = 309$, *3* — $b = 30$ мм, $\beta = 1512$

Однако, как отмечено выше, эти составляющие не зависят от амплитуды колебаний пластины, что позволяет определить D_{vort} по измеренному в экспериментах ЛДК $\delta(\varkappa_0)$:

$$D_{vort}(\varkappa_0) = \frac{\rho}{\rho_a}\,\frac{h}{b}\,(\delta(\varkappa_0) - \delta(0)).$$

Построенные таким образом зависимости $D_{vort}(\varkappa_0)$ качественно подобны для всех трех серий экспериментов с пластинами шириной 10, 20, 30 мм. В каждой из этих серий параметр β за счет изменения длины колеблющегося участка пластины варьировался. На рис. 3 точками показаны определенные по экспериментальным данным типичные зависимости $D_{vort}(\varkappa_0)$. Видно, что с увеличением $\varkappa_0$ все кривые сливаются. Это объясняется тем, что при больших амплитудах колебаний вязкость становится несущественной, а значит, параметр β не входит в число определяющих параметров процесса [5, 7]. Предельные (при больших $\varkappa_0$) кривые $D_{vort}(\varkappa_0)$ с высокой точностью можно аппроксимировать степенной зависимостью $D_{vort} \approx 5{,}1\varkappa_0^{0{,}42}$. С учетом этого при обработке результатов экспериментов во всем диапазоне значений $\varkappa_0$ использовалась аппроксимационная зависимость

$$D_{vort} = \frac{5{,}1\varkappa^{a+0{,}42}}{d + \varkappa^a}. \tag{2}$$

Чтобы более точно описать экспериментальные данные, в каждом эксперименте параметры a и d подбирались методом наименьших квадратов.

В ходе обработки экспериментальных данных установлено, что параметр d практически не меняется от эксперимента к эксперименту, а в плоскости (a, β) все экспериментальные точки располагаются вдоль одной линии (рис. 4). Полученные таким образом аппроксимации имеют вид

$$d = 0{,}12, \qquad a = 1{,}03 + 16{,}61\beta^{-0{,}627} \tag{3}$$

и совместно с зависимостью (2) полностью определяют искомую аппроксимацию для $D_{vort}(\varkappa_0, \beta)$.

Качество предложенной аппроксимационной формулы (2), (3) можно оценить по рис. 5. По оси ординат отложены значения $D_{vort}(\varkappa_0, \beta)$, полученные в эксперименте, по оси абсцисс — вычисленные по формуле (2), (3). Экспериментальные точки группируются вблизи прямой $D_{exp} = D_{app}$, что свидетельствует о высокой точности аппроксимации (2), (3) во всем диапазоне исследованных параметров.

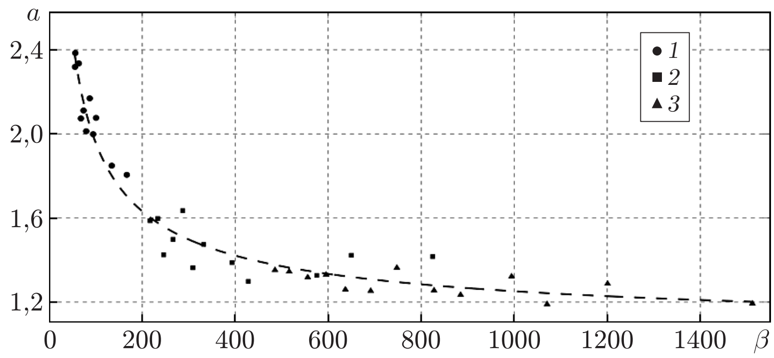

Рис. 4. Зависимость $a(\beta)$ для пластин различной ширины:
точки *1–3* — экспериментальные данные (*1* — $b = 10$ мм, *2* — $b = 20$ мм, *3* — $b = 30$ мм);
линия — аппроксимация (3)

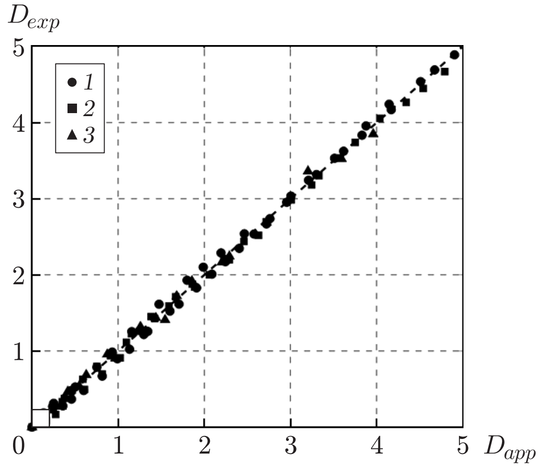

Рис. 5. Значения вихревой составляющей декремента затухания, полученные
в эксперименте (точки *1–3*) и аналитически (линия):
1 — $b = 10$ мм, *2* — $b = 20$ мм, *3* — $b = 30$ мм

Следует отметить два обстоятельства. Во-первых, в данной работе представлены результаты экспериментов, проведенных для тонких пластин толщиной $\Delta < 10^{-1}$. Для таких пластин величина D_{vort} не зависит от Δ. Однако, как показывают лабораторные испытания, уже при $\Delta = 0{,}33$ учет этого параметра при определении D_{vort} становится необходимым. Во-вторых, полученная аппроксимационная формула (2), (3) применима в ограниченной области использованных в экспериментах параметров $\varkappa_0 < 2$, $50 < \beta < 2000$.

3. Определение коэффициента аэродинамического сопротивления. Для определения вихревой составляющей $C_{vort}(\varkappa)$ коэффициента сопротивления гармонически колеблющейся пластины с использованием зависимости $D_{vort}(\varkappa_0)$ необходимо решить интегральное уравнение

$$\int_0^1 C_{vort}(\varkappa_0 W(\xi))W^3(\xi)\,d\xi = f(\varkappa_0), \qquad f(\varkappa_0) = \frac{3\langle W^2\rangle}{4\varkappa_0}\,D_{vort}(\varkappa_0). \tag{4}$$

Применяемый для решения (4) приближенный подход основан на том, что профиль $W(\xi)$ основной моды колебаний может быть достаточно точно аппроксимирован степенной зависимостью $W(\xi) \approx \xi^{3/2}$ (рис. 6). Заменяя в (4) $W(\xi)$ на $\xi^{3/2}$ и проводя в интеграле (4)

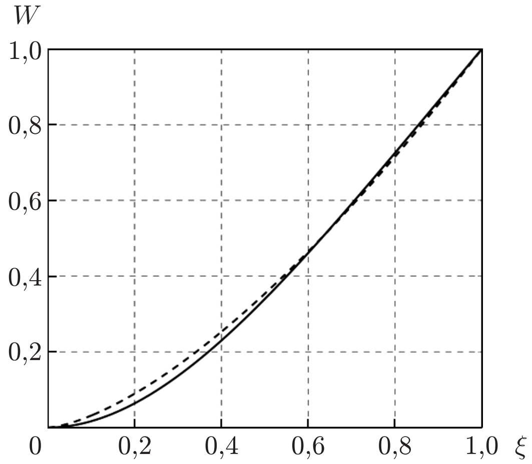

Рис. 6. Профиль основной моды колебаний (сплошная линия) и его аппроксимация $W(\xi) = \xi^{3/2}$ (штриховая линия)

замену переменных, получаем

$$\int\limits_0^{\varkappa_0} C_{vort}(\varkappa)\varkappa^{8/3}\,d\varkappa = \frac{9}{32}\,\varkappa_0^{8/3} D_{vort}(\varkappa_0).$$

Дифференцируя это выражение по $\varkappa_0$, находим

$$C_{vort}(\varkappa) = \frac{9}{32}\,\varkappa^{-8/3}\,\frac{d}{d\varkappa}\,(\varkappa^{8/3} D_{vort}(\varkappa)).$$

С учетом (2), (3) получаем

$$C_{vort}(\varkappa) = 0{,}171\varkappa^{a-0{,}58}\,\frac{a + 3{,}087 + 25{,}8\varkappa^a}{(0{,}12 + \varkappa^a)^2}. \tag{5}$$

Напомним, что зависимость параметра a от β определяется формулой (3). При больших значениях $\varkappa$ из приближенного решения (5) следует

$$\varkappa \to \infty: \qquad C_{vort}(\varkappa) = 4{,}412\varkappa^{-0{,}58}.$$

Аналогичную асимптотику можно найти точно. Она имеет тот же вид, что и приближенная, но константа 4,412 заменяется на 4,409.

На рис. 7 приведена функция $f(\varkappa_0)$, вычисленная по декременту колебаний (второе соотношение в (4)) и путем интегрирования (первое соотношение в (4)). Видно, что полученное приближенное решение (5) удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными. Заметим, что во всем исследованном диапазоне параметров погрешность приближенного решения не превышает 0,004.

Для определения значения коэффициента сопротивления C достаточно к вихревой составляющей C_{vort} добавить вязкую $C_{vis} = 4{,}61\varkappa^{-1}\beta^{-1/2}$. Верификация полученной таким образом формулы выполнялась путем ее сравнения с результатами измерения C, полученными другими (чисто гидродинамическими) методами. На рис. 8 линиями *1–3* представлены зависимости $C = C_{vis} + C_{vort}$ от безразмерной амплитуды колебаний $\varkappa_0$, полученные в данной работе. Точками показаны экспериментальные данные [10], полученные при $\beta = 436$. На рис. 8 видно, что результаты, полученные в данной работе, хорошо согласуются с известными данными.

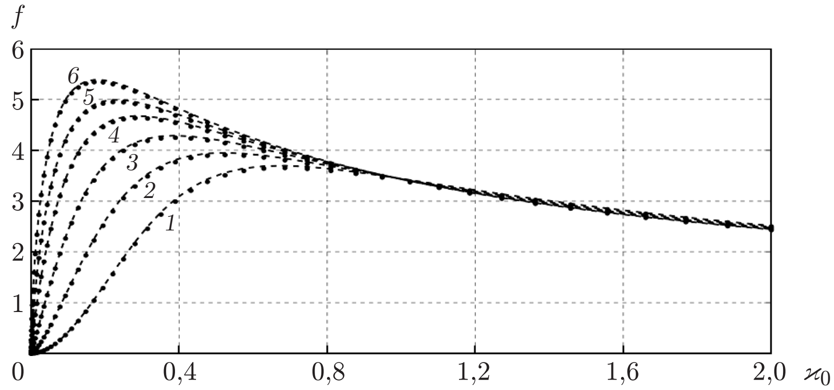

Рис. 7. Зависимость $f(\varkappa_0)$:
линии — результаты приближенного решения интегрального уравнения (4), точки — экспериментальные данные; *1* — $\beta = 55$, *2* — $\beta = 100$, *3* — $\beta = 208$, *4* — $\beta = 393$, *5* — $\beta = 691$, *6* — $\beta = 1512$

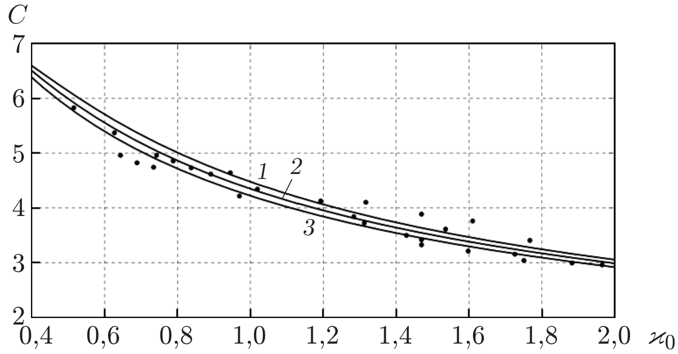

Рис. 8. Зависимость коэффициента сопротивления пластины от безразмерной амплитуды колебаний:
линии *1–3* — данные настоящей работы (*1* — $\beta = 210$, *2* — $\beta = 436$, *3* — $\beta = 1512$), точки — экспериментальные данные [10] ($\beta = 436$)

Заключение. Разработан теоретико-экспериментальный метод определения коэффициента аэродинамического сопротивления C пластин, совершающих гармонические колебания в вязкой среде, на основе анализа виброграмм их затухающих изгибных колебаний. С использованием результатов экспериментов для тонких пластин получена замкнутая формула, с высокой точностью аппроксимирующая коэффициент аэрогидродинамического сопротивления C в исследованном диапазоне параметров $\varkappa_0 < 2$, $50 < \beta < 2000$. Полученные результаты хорошо согласуются с известными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Давиденков Н. Н.** О рассеянии энергии при вибрациях // Журн. техн. физики. 1938. Т. 8, вып. 6. С. 483–499.
2. **Дубенец В. Г.** Колебания демпфированных композитных конструкций / В. Г. Дубенец, В. В. Хильчевский. Киев: Вища шк., 1995. Т. 1.
3. **Кристенсен Р.** Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974.
4. **Паймушин В. Н., Фирсов В. А., Гюнал И., Егоров А. Г.** Теоретико-экспериментальный метод определения параметров демпфирования на основе исследования

затухающих изгибных колебаний тест-образцов. 1. Экспериментальные основы // Механика композит. материалов. 2014. Т. 50, № 2. С. 185–198.

5. **Егоров А. Г., Камалутдинов А. М., Нуриев А. Н., Паймушин В. Н.** Теоретико-экспериментальный метод определения параметров демпфирования на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов. 2. Аэродинамическая составляющая демпфирования // Механика композит. материалов. 2014. Т. 50, № 3. С. 379–396.
6. **Sader J. E.** Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope // J. Appl. Phys. 1998. V. 84, N 1. P. 64–76.
7. **Aureli M., Porfiri M.** Low frequency and large amplitude oscillations of cantilevers in viscous fluids // Appl. Phys. Lett. 2010. V. 96. 164102.
8. **Adams R. D.** The damping characteristics of certain steels, cast Irons and other metals // J. Sound Vibrat. 1972. V. 23, N 2. P. 199–216.
9. **Felicity J. G.** Property-microstructural relationships in GFRP: PhD Thesis. Plymouth: Univ. of Plymouth, 1978.
10. **Singh S.** Forces on bodies in oscillatory flow: PhD Thesis. L.: Univ. of London, 1979.

Поступила в редакцию 15/I 2015 г.