

УДК 519.633.6

О влиянии случайных факторов внешней среды на процессы теплопереноса в летательных аппаратах*

С.А. Гусев^{1,2}, В.Н. Николаев³

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

²Новосибирский государственный технический университет, просп. Карла Маркса, 20, Новосибирск, 630073

³Сибирский научно-исследовательский институт авиации имени С.А. Чаплыгина, ул. Ползунова, 21, Новосибирск, 630051

E-mails: sag@osmf.sccc.ru (Гусев С.А.), nikvla50@mail.ru (Николаев В.Н.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 17, 2024.

Гусев С.А., Николаев В.Н. О влиянии случайных факторов внешней среды на процессы теплопереноса в летательных аппаратах // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2024. — Т. 27, № 2. — С. 165–172.

Основной целью работы является моделирование теплопереноса в элементах конструкции летательного аппарата в условиях случайных перепадов температуры на внешней поверхности из-за быстрых изменений параметров окружающей среды. При этом для моделирования теплообмена берётся одномерная краевая задача третьего рода для уравнения теплопроводности. На границе, соответствующей внешней поверхности, задаются случайные возмущения. Численное решение основано на применении метода Галёркина. Моделирование случайных возмущений внешней среды осуществляется с помощью винеровского интеграла в системе дифференциальных уравнений, записанных в интегральной форме. Расчёты на задаче с известным точным решением показали, что при удалении от границы со случайными возмущениями численное решение краевой задачи с возмущениями сходится к известному точному решению невозмущённой краевой задачи. На основе разложения краевой задачи по тригонометрическим функциям в работе получены теоретические оценки влияния возмущения на внешней поверхности в зависимости от толщины стенки и уровня возмущений.

DOI: 10.15372/SJNM20240203

EDN: TCAUCA

Ключевые слова: теплоперенос, краевая задача, случайные возмущения, математическое моделирование.

Gusev S.A., Nikolaev V.N. On the influence of random environmental factors on heat transfer processes in aircrafts // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2024. — Vol. 27, № 2. — P. 165–172.

The main goal of the work is to simulate heat transfer in structural elements of an aircraft under random temperature changes on its outer surface due to rapid changes in environmental parameters. In this case, to model the heat transfer a one-dimensional boundary value problem of the third kind is taken for the heat conduction equation. Random disturbances are specified at the boundary corresponding to the outer surface. The numerical solution is based on an application of the Galerkin method. Modeling the random disturbances of the external environment is carried out using a Wiener integral in a system of differential equations written in integral form. Calculations for a problem with a known exact solution show that when moving away from the boundary with random disturbances, the numerical solution of the boundary value problem with disturbances

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект № 0251-2022-0002).

converges to the known exact solution of the unperturbed boundary value problem. Based on an expansion of the solution to the boundary value problem in trigonometric functions, theoretical estimates are obtained for the influence of a disturbance on the outer surface as a function of the wall thickness and the disturbance magnitude.

Keywords: *heat transfer, boundary value problem, random disturbances, mathematical modeling.*

1. Описание проблемы

Движение летательного аппарата в атмосфере с большими скоростями, как правило, сопровождается быстрой и случайной сменой физических параметров внешней среды, что может существенно влиять на процессы теплообмена и при этом на показания приборов, свойства материалов и теплозащиту отсеков [1–3]. Важно отметить, что в элементах конструкции самолёта материал вблизи наружной поверхности прогревается или остывает интенсивнее, чем на некотором расстоянии от неё. Такое изменение температуры на различном удалении от наружной поверхности, а также в случае неоднородности материала конструкции, приводит иногда к возникновению напряжений, что в условиях аэродинамических нагрузок может вызвать образование микротрещин и быстрое, по сравнению с предполагаемым сроком службы, старение и износ материалов конструкции.

Основной целью работы является моделирование процессов теплообмена в элементах конструкции летательного аппарата в условиях случайных перепадов температуры на внешней поверхности из-за быстрых изменений параметров окружающей среды. Перепады температуры зависят от внешних воздействий среды и, в значительной степени, от теплофизических свойств материалов конструкции. Поскольку в настоящее время появляется много новых материалов, предлагаемых для использования в авиационной технике, необходимо всестороннее исследование их пригодности для этой цели, в том числе изучение возможности их применения в условиях быстрой смены физических параметров окружающей среды.

Для моделирования теплообмена берётся одномерная краевая задача третьего рода для уравнения теплопроводности. Использование в расчётах одномерной краевой задачи даёт неплохие оценки в тех случаях, когда тепловые потоки преимущественно направлены перпендикулярно внешней поверхности изделия, например, в точках обшивки фюзеляжа. Также такое моделирование может быть полезным при исследовании характеристик новых материалов в лабораторных условиях.

Решение краевой задачи аппроксимируется методом Галёркина [4, 5]. Моделирование случайных возмущений внешней среды осуществляется с помощью винеровского интеграла в системе дифференциальных уравнений, записанных в интегральной форме. Проведённые численные эксперименты на задаче с известным точным решением показали, что при удалении от границы со случайными возмущениями, решение краевой задачи с возмущениями сходится к известному точному решению невозмущённой краевой задачи.

В работе получены оценки влияния возмущения на внешней поверхности в зависимости от толщины стенки и уровня возмущений. Для этой цели используется разложение решения краевой задачи в тригонометрический ряд. При этом рассматривается простейший случай, когда возмущение в граничном условии — постоянная величина. Такой подход может быть оправданным, если рассматривать в качестве отклонения внешней температуры на границе оценку его максимально возможного значения.

2. Постановка задачи численного моделирования теплообмена при случайных возмущениях на внешней границе

В качестве математической модели для описания процесса теплообмена рассматривается следующая краевая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu, \quad (t, x) \in (0, T] \times (0, l) \quad (a > 0), \quad (1)$$

$$k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_0(u(t, 0) - r_0(t)), \quad (2)$$

$$-k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \alpha_1(u(t, l) - r_1(t)), \quad (3)$$

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (4)$$

Для решения краевой задачи (1)–(4) используется метод Галёркина с кусочно-линейным базисом на равномерной сетке $S = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, где $x_0 = 0$, $x_N = l$. При этом аппроксимация решения задачи записывается в виде

$$u(t, x) = \sum_{i=0}^N y_i(t) \varphi_i(x), \quad (5)$$

здесь y_i — функции, которые надо определить, φ_i — кусочно-линейный базис:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & x \notin [x_0, x_1], \end{cases} \quad \varphi_N(x) = \begin{cases} \frac{x - x_N}{x_N - x_{N-1}}, & x \in [x_{N-1}, x_N], \\ 0, & x \notin [x_{N-1}, x_N], \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases}$$

В результате применения метода Галёркина получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\dot{Y} = aA^{-1}B(t, Y) + bY, \quad Y(0) = (u_0(x_0), u_0(x_1), \dots, u_0(x_N))^T, \quad (6)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - x_0}{3} & \frac{x_1 - x_0}{6} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x_1 - x_0}{6} & \frac{x_2 - x_0}{3} & \frac{x_2 - x_1}{6} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{x_{N-1} - x_{N-2}}{6} & \frac{x_N - x_{N-2}}{3} & \frac{x_N - x_{N-1}}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{x_N - x_{N-1}}{6} & \frac{x_N - x_{N-1}}{3} \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad B(t, Y) = \begin{pmatrix} -\alpha_0(t)(y_0 - r_0(t)) + a \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ \vdots \\ a \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \right) \\ \vdots \\ \alpha_1(t)(r_1(t) - y_N) - a \frac{y_N - y_{N-1}}{x_N - x_{N-1}} \end{pmatrix}.$$

Запишем систему ОДУ (6) в интегральной форме

$$Y_t = Y_0 + aA^{-1} \int_0^t B(s, Y_s) ds + b \int_0^t Y_s ds. \quad (7)$$

Функции $r_0(t)$, $r_1(t)$ в краевой задаче (1)–(4) и в правых частях систем ОДУ (6) и (7) являются детерминированными функциями. Мы моделируем случайные возмущения внешней среды путём добавления стохастического интеграла Ито к функции $r_1(t)$ в (7). В результате система (7) преобразуется в систему стохастических дифференциальных уравнений (СДУ)

$$Y_t = Y_0 + aA^{-1} \left(\int_0^t B(s, Y_s) ds + e_N \alpha_1(t) \int_0^t \sigma dW_s \right) + b \int_0^t Y_s ds, \quad (8)$$

где $\int_0^t \sigma dW_s$ — стохастический интеграл Ито; σ — уровень случайных возмущений, который в общем случае может зависеть от t ; e_N — $(N+1)$ -мерный единичный вектор, у которого $(N+1)$ -я компонента равна единице, а остальные компоненты равны нулю. Такое преобразование системы (7) равносильно в обобщённом смысле добавлению в уравнении (3) к функции $r_1(t)$ белого шума интенсивностью $\frac{\sigma^2}{2\pi}$ [6, 7].

Для численного стохастического моделирования траекторий СДУ (8) применяется схема Эйлера–Маруямы с постоянным шагом [6]

$$Y_{n+1} = Y_n + h \left(aA^{-1}B(t_n, Y_n) + bY_n \right) + h^{0.5} \xi_n aA^{-1} e_N \alpha_1(t_n) \sigma(t_n, Y_n), \quad (9)$$

где $\xi_n \sim N(0,1)$ случайные величины.

3. Численный эксперимент

Численный эксперимент проводился для краевой задачи с известным точным решением, в которую по описанной выше схеме были добавлены случайные возмущения в граничное условие, соответствующее внешней поверхности. Для выбранных числовых параметров краевой задачи численно моделировалось решение задачи со случайными возмущениями, которое потом сравнивалось с точным решением невозмущённой задачи.

В качестве точного решения уравнения (1) рассматривалось частное решение из книги А.Д. Полянина [8, с. 60] вида

$$u(t, x) = (A(x^2 + 2at) + B) \exp(bt). \quad (10)$$

Константы A и B в формуле (10) были взяты следующие: $A = 2$, $B = 1$. В этом случае решение (10) принимает вид

$$u(t, x) = (2x^2 + 4at + 1) \exp(bt). \quad (11)$$

Отсюда при $t = 0$ получаем начальное распределение температуры

$$u_0(x) = 2x^2 + 1. \quad (12)$$

Для данного эксперимента в граничных условиях $k = a$ коэффициенты теплообмена были взяты постоянными:

$$\alpha_0(t) = 1, \quad \alpha_1(t) = 10. \quad (13)$$

На основе уравнений (2), (3), (11), (13) получаем функции температуры окружающей среды для внутренней и внешней поверхностей:

$$r_0(t) = (4at + 1) \exp(bt), \quad (14)$$

$$r_1(t) = (4at + 0.4al + 2l^2 + 1) \exp(bt). \quad (15)$$

В численном эксперименте были приняты следующие значения числовых параметров: $a = 2$, $b = -10^{-6}$, $l = 0.5$, $T = 10$. Значение коэффициента уровня шума σ — постоянная величина, равная 1.0.

Для проверки точности вычислений решение невозмущённой задачи было вычислено на сетке из 101 узла по переменной x и с шагом $h = 10^{-6}$ по переменной t в методе Эйлера–Маруямы. При этом наблюдалось совпадение шести десятичных знаков в численном и точном решениях. Но в расчётах с моделированием случайных возмущений параметры, определяющие точность вычислений, были усилены: $h = 10^{-8}$, $N = 140$.

На рисунках 1 и 2 представлены графики решений невозмущённой задачи и задачи со случайными возмущениями в граничном условии соответственно. Результаты вычислений показали сходимость численного решения задачи с возмущениями к точному решению невозмущённой задачи при удалении от границы со случайными возмущениями.

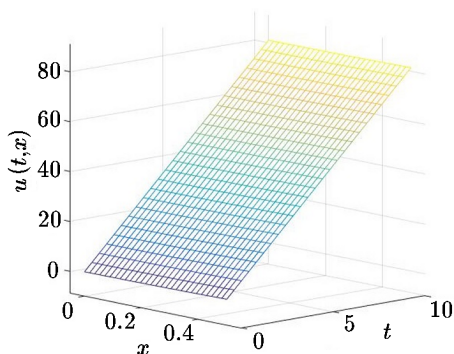


Рис. 1. Решение невозмущённой задачи

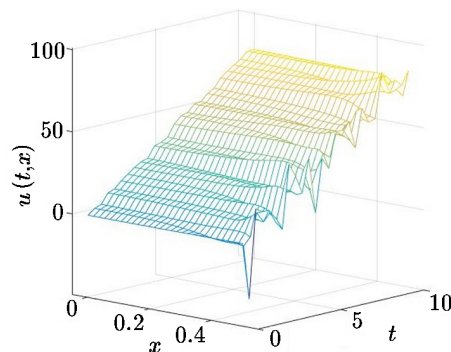


Рис. 2. Решение со случайными возмущениями в граничном условии

4. Оценка влияния возмущений на внешней границе

Моделирование случайных возмущений на внешней границе ($x = l$) позволяет наглядно продемонстрировать реальные ситуации, которые могут происходить во время полёта. Кроме того, моделируя большое количество траекторий, можно оценивать некоторые

вероятностные характеристики, например вероятность превышения заданных уровней температуры на определённом расстоянии от внешней поверхности.

В данном пункте рассматривается более простой случай и находится оценка изменения температуры на внутренней границе ($x = 0$), когда на внешней границе изменение происходит на некоторую заданную постоянную величину. Такая постановка вполне уместна, если, например, важно максимально возможное отклонение температуры, и вопрос стоит о надёжности изделия.

Пусть отклонение внешней температуры в граничном условии есть постоянная величина Z на всём отрезке времени $[0, T]$, а значение коэффициента b в правой части уравнения (1) равно нулю. Запишем для этого случая невозмущённую и возмущённую краевые задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad (t, x) \in (0, T] \times (0, l), & \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad (t, x) \in (0, T] \times (0, l), \\ k \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \alpha_0(u_1(t, 0) - r_0(t)), & k \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \alpha_0(u_2(t, 0) - r_0(t)), \\ -k \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=l} &= \alpha_1(u_1(t, l) - r_1(t)), & -k \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=l} &= \alpha_1(u_2(t, l) - (r_1(t) + Z)), \\ u_1(0, x) &= u_0(x), & u_2(0, x) &= u_0(x). \end{aligned}$$

Рассмотрим краевую задачу для разности $u = u_2 - u_1$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t, x) \in (0, T] \times (0, l), \quad (16)$$

$$k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_0 u(t, 0), \quad (17)$$

$$-k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \alpha_1(u(t, l) - Z), \quad (18)$$

$$u(0, x) = 0. \quad (19)$$

Приведём задачу (16)–(19) к задаче с однородными краевыми условиями. Для этого сделаем замену

$$u(t, x) = v(t, x) + \psi(x), \quad (20)$$

где $\psi(x) = p_0 + p_1 x$. Запишем краевую задачу для функции v

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (t, x) \in (0, T] \times (0, l), \quad (21)$$

$$k \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_0 v(t, 0) + \alpha_0 p_0 - k p_1, \quad (22)$$

$$-k \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=l} = \alpha_1 v(t, l) + \alpha_1 p_0 + \alpha_1 p_1 l + k p_1 - \alpha_1 Z, \quad (23)$$

$$v(0, x) = -\psi(x). \quad (24)$$

Для того, чтобы краевые условия (22)–(23) были однородными, потребуем выполнение равенств

$$\alpha_0 p_0 - k p_1 = 0, \quad \alpha_1 p_0 + (\alpha_1 l + k) p_1 = \alpha_1 Z. \quad (25)$$

Эта система уравнений относительно p_0, p_1 однозначно разрешима, поскольку определитель её матрицы положителен

$$\Delta = \alpha_0 \alpha_1 l + (\alpha_0 + \alpha_1) k > 0.$$

В результате решения системы уравнений (25) получаем функцию ψ :

$$\psi(x) = \frac{\alpha_1 (k + \alpha_0 x) Z}{\alpha_0 \alpha_1 l + (\alpha_0 + \alpha_1) k}. \quad (26)$$

Когда $l \rightarrow \infty$, при $x = 0$ (внутренняя граница) значение функции (26) стремится к нулю. Таким образом, если существует решение краевой задачи (16)–(19), то при больших значениях l решение возмущённой краевой задачи на внутренней границе будет близко к решению невозмущённой задачи. При этом зависимость от l выражается простейшей рациональной дробью с полиномом первой степени в знаменателе.

В краевой задаче (21)–(24) краевые условия однородные, если p_0 и p_1 удовлетворяют системе (25). Её решение может быть получено методом разделения переменных. В [9] представлено решение одномерной краевой задачи для линейного однородного уравнения теплопроводности с однородными краевыми условиями, полученное разделением переменных, в виде ряда по тригонометрическим функциям

$$v(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n X_n(x) \exp(-\lambda_n^2 a t), \quad (27)$$

где $X_n(x) = \left(\frac{k}{\alpha_0} \lambda_n \cos \lambda_n x + \sin \lambda_n x \right)$. Также в [9] дано доказательство ортогональности системы функций $\{X_n\}$ на интервале $(0, l)$. Собственные числа λ_n являются корнями уравнения [9]

$$\operatorname{tg} \lambda l = \frac{k(\alpha_0 + \alpha_1) \lambda}{k^2 \lambda^2 - \alpha_0 \alpha_1}.$$

Это уравнение имеет бесконечное множество решений, и при больших значениях n $\lambda_n \approx \pi n / l$.

Коэффициенты B_n в уравнении (27) для случая краевой задачи (21)–(24) определяются из равенства

$$B_n = - \int_0^l \psi(x) X_n(x) dx \bigg/ \int_0^l X_n^2(x) dx.$$

Функция (27) удовлетворяет начальному условию (24)

$$v(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n X_n(x) = -\psi(x). \quad (28)$$

Из (20), (26)–(28) следует

$$|u(t, 0)| = |v(t, 0) + \psi(0)| \leq |v(t, 0)| + |\psi(0)| \leq 2|\psi(0)| = \frac{2\alpha_1 k |Z|}{\alpha_0 \alpha_1 l + (\alpha_0 + \alpha_1) k}. \quad (29)$$

На основании (29) можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение. При действующем постоянном возмущении температуры окружающей среды на внешней границе отклонение температуры на внутренней границе от соответствующей температуры невозмущённой задачи по абсолютной величине будет меньше $\varepsilon > 0$, если для значений l и Z выполняются следующие ограничения:

$$l \geq \frac{2\alpha_1 k |Z| - \varepsilon(\alpha_0 + \alpha_1)k}{\varepsilon\alpha_0\alpha_1}, \quad |Z| \leq \frac{\varepsilon(\alpha_0\alpha_1 l + (\alpha_0 + \alpha_1)k)}{2\alpha_1 k}.$$

Литература

1. **Торрес Санчес К.Х., Воронцов В.А.** Оценка проектных параметров малого спускаемого аппарата с учётом неопределённости исходных данных // Труды МАИ. — 2018. — № 101.
2. **Краснов С.Е.** Математическое моделирование процессов нарушения устойчивости течения в ГТД // Авиационные двигатели. — 2021. — Т. 4, № 13. — С. 85–100.
3. **Wan Q., Brede B., Smigaj M., Kooistra M.** Factors influencing temperature measurements from miniaturized thermal infrared (TIR) cameras: a laboratory-based approach // Sensors. — 2021. — Vol. 21, iss. 24. — <https://doi.org/10.3390/s21248466>.
4. **Марчук Г.И.** Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1977.
5. **Михлин С.Г.** Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970.
6. **Kloeden P.E., Platen E.** Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1992.
7. **Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М.** Случайные процессы. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999.
8. **Полянин А.Д.** Справочник по линейным уравнениям математической физики. — М.: Физматлит, 2001.
9. **Араманович И.Г., Левин В.И.** Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1969.

Поступила в редакцию 28 декабря 2023 г.

После исправления 9 января 2024 г.

Принята к печати 4 марта 2024 г.

Литература в транслитерации

1. **Torres Sanches K.Kh., Voroncov V.A.** Ocenka proektnykh parametrov malogo spuskaemogo apparata s uchyotom neopredelennosti iskhodnykh dannyykh // Trudy MAI. — 2018. — № 101.
2. **Krasnov S.E.** Matematicheskoe modelirovanie processov narusheniya ustoychivosti techeniya v GTD // Aviacionnye dvigateli. — 2021. — T. 4, № 13. — S. 85–100.
3. **Wan Q., Brede B., Smigaj M., Kooistra M.** Factors influencing temperature measurements from miniaturized thermal infrared (TIR) cameras: a laboratory-based approach // Sensors. — 2021. — Vol. 21, iss. 24. — <https://doi.org/10.3390/s21248466>.
4. **Marchuk G.I.** Metody vychislitel'noi matematiki. — M.: Nauka, 1977.
5. **Mikhlin S.G.** Variacionnye metody v matematicheskoi fizike. — M.: Nauka, 1970.
6. **Kloeden P.E., Platen E.** Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1992.
7. **Volkov I.K., Zuev S.M., Cvetkova G.M.** Sluchainye processy. — M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 1999.
8. **Polyanin A.D.** Spravochnik po lineinym uravneniyam matematicheskoi fiziki. — M.: Fizmatlit, 2001.
9. **Aramanovich I.G., Levin V.I.** Uravneniya matematicheskoi fiziki. — M.: Nauka, 1969.