

УДК 536.24

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЛАМИНАРНОГО ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОГО ТЕЧЕНИЯ В КВАДРАТНОЙ ПОЛОСТИ

В. А. Гапонов

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск

Численно исследуются гидродинамика и процессы теплообмена в задаче о ламинарном термокапиллярном течении вязкой несжимаемой жидкости в полости квадратного сечения с изотермическими вертикальными и адиабатическими горизонтальными поверхностями в предположении, что сила тяжести отсутствует, свободная поверхность плоская, поверхностное натяжение линейно зависит от температуры. Вычисления проводились методом компактных разностей на неравномерных сетках с повышенным (пятым) порядком точности для четырех чисел Прандтля ( $Pr = 1; 16; 200; 3000$ ) при изменении числа Марангони ( $Ma$ ) от  $10^2$  до  $10^4$ . Получены зависимости максимальной локальной теплоотдачи от  $Ma$ . Показано, что максимум распределения горизонтальной компоненты скорости на поверхности смещается к холодной границе по закону, обратно пропорциональному  $Ma$  для рассмотренных значений  $Pr$ .

**Введение.** Термокапиллярный эффект, возникающий на свободной границе неравномерно нагретой жидкости вследствие зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры (термокапиллярная конвекция), при проявлении в наземных условиях обычно не выступает доминирующим фактором, но сопровождает более ярко выраженную термогравитационную конвекцию, образуя в сочетании с ней тепловую гравитационно-капиллярную конвекцию [1–3]. Решение задач термокапиллярной конвекции осложнено тем, что даже в простейшем случае с плоской свободной поверхностью значение скорости по направлению вдоль поверхности неизвестно, имеется лишь связь ее производной по нормали к поверхности с производной по касательной температуры в той же точке. В этих условиях получение надежных количественных данных о локальных характеристиках течения и теплообмена (а именно они представляют наибольший интерес в прикладных исследованиях) весьма затруднительно; недостаточно точная аппроксимация граничных условий на поверхности может привести к значительным погрешностям локальных характеристик и существенным образом повлиять на общую картину течения.

Работа направлена на численное моделирование термокапиллярной конвекции в условиях, когда сила тяжести отсутствует (теоретическая невесомость). Исследуются гидродинамика и теплообмен в задаче о ламинарном термокапиллярном течении вязкой несжимаемой жидкости в открытой квадратной полости с изотермическими вертикальными и адиабатическими горизонтальными поверхностями. Предполагается, что свободная поверхность плоская, поверхностное натяжение линейно зависит от температуры. Проведение настоящего исследования мотивируется также тем обстоятельством, что в результатах независимых исследований [4, 5] и [6, 7] обнаружилось принципиальное противоречие, которые до настоящего времени полностью не сняты и даже не стали предметом дискуссии. Например, уже на качественном уровне существенно различаются полученные для числа Прандтля  $Pr = 1$  распределения продольной компоненты скорости на открытой

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01499).

поверхности, а также их эволюция при возрастании числа Марангони ( $Ma$ ); по-разному интерпретируется зависимость структуры течения от  $Pr$ .

В данной работе вычисления проводились методом компактных разностей [8, 9] для  $Pr = 1; 16; 200; 3000$  при изменении  $Ma$  от  $10^2$  до  $10^4$ . Метод предварительно тестировался на задаче о двумерном течении вязкой несжимаемой жидкости в квадратной полости с движущейся крышкой [9] и задаче о конвективном течении в замкнутой полости [10]. По результатам тестирования в [10] сделан вывод, что предложенный метод по точности способен конкурировать со спектральными методами и значительно превосходит конечно-разностные методы второго и четвертого порядка.

**Постановка задачи.** Система нелинейных уравнений термокапиллярной конвекции в приближении Обербека — Буссинеска, описывающая двумерное стационарное конвективное движение жидкости в отсутствие силы тяжести, может быть представлена в следующем безразмерном виде [4]:

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{Pr}{Ma} \nabla^2 \omega; \quad (1)$$

$$\nabla^2 \psi = \omega; \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Ma} \nabla^2 T. \quad (3)$$

Здесь функция тока  $\psi(x, y)$  введена соотношениями  $u = \partial\psi/\partial y$ ,  $v = -\partial\psi/\partial x$ ;  $\omega(x, y)$  — вихрь скорости, определяемый соотношением  $\omega = \partial u/\partial y - \partial v/\partial x$ ;  $T(x, y)$  — температура.

Граничные условия интересующей нас задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad T = 0,5 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad T = -0,5 \quad \text{при} \quad x = 1, \\ \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Переход к безразмерным величинам осуществляется при помощи приводимых ниже соотношений (штрихом помечены размерные величины):

$$\begin{aligned} x = x'/L, \quad y = y'/L, \quad U = U' \cdot \left( \frac{L}{a} \frac{1}{Ma} \right) = U' \cdot \left( \frac{\mu}{\Delta T \tau_T} \right), \\ T = \frac{T' - T_0}{\Delta T}, \quad T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}, \quad \Delta T = T_1 - T_2, \quad Ma = \frac{\Delta T \sigma_T L}{\mu a}, \quad Pr = \frac{\nu}{a}. \end{aligned}$$

Здесь  $L$  — сторона квадратной полости;  $U = (u, v)$  — вектор скорости;  $T_1, T_2$  ( $T_1 > T_2$ ) — температура горячей (левой) и холодной (правой) вертикальных твердых поверхностей полости соответственно;  $\mu$  — динамическая вязкость;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $a$  — температуропроводность;  $\sigma_T$  — температурный коэффициент поверхностного натяжения.

**Численный метод.** Численное решение задачи (1)–(4) получено методом компактных разностей повышенного (пятого) порядка точности на неравномерных структурированных сетках [9]. Использовались принцип раздельного решения уравнений, метод установления, метод дробных шагов.

**Компактные разностные аппроксимации.** Пусть имеется некоторая достаточно гладкая функция одной переменной  $f(x)$  и  $f_k = f(x_k)$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ ) — ее сеточные значения. Компактные разностные аппроксимации (с раздельной аппроксимацией пространственных производных)  $m_k$  и  $M_k$  первых двух производных функции  $f(x)$  в точке  $x_k$  можно представить в следующем операторном виде [8]:

$$A_x m_k = (1/h_k) B_x f_k, \quad m_k = L_x f_k, \quad L_x = (1/h_k) A_x^{-1} B_x,$$

$$A_{xx}M_k = (1/h_k^2)B_{xx}f_k, \quad M_k = L_{xx}f_k, \quad L_{xx} = (1/h_k^2)A_{xx}^{-1}B_{xx}.$$

Здесь  $h_k = x_{k+1} - x_k$  для всех допустимых значений  $k$ . Операторы  $A_x$ ,  $B_x$ ,  $A_{xx}$ ,  $B_{xx}$  с точностью до нормирующего множителя определяются своими безразмерными коэффициентами, которые непосредственно могут быть получены различными известными способами, например методом неопределенных коэффициентов. В работе используются компактные разности, построенные на пятиточечном неравномерном шаблоне. Они связывают пять значений функции и три значения производной (первой или второй). Восемь свободных параметров позволяют построить аппроксимации шестого порядка точности для первой производной и пятого — для второй. В частном случае равномерной сетки построенные аппроксимации имеют шестой порядок и сводятся к известным соотношениям [11]

$$A_x m_k = m_{k-1} + 3m_k + m_{k+1}, \quad B_x f_k = \frac{1}{12} \{-f_{k-2} - 28f_{k-1} + 28f_{k+1} + f_{k+2}\},$$

$$A_{xx} M_k = 2M_{k-1} + 11M_k + 2M_{k+1}, \quad B_{xx} f_k = \frac{3}{4} \{f_{k-2} + 16f_{k-1} - 34f_k + 16f_{k+1} + f_{k+2}\}.$$

*Уравнения переноса.* Схема расщепления для уравнений переноса в случае уравнения (1) имеет вид

$$\frac{2}{\Delta t_1} (\omega^{n+1/4} - \omega^n) + u^n L_x \omega^n + v^n L_y \omega^n = \frac{\text{Pr}}{\text{Ma}} (L_{xx} \omega^{n+1/4} + L_{yy} \omega^n),$$

$$\frac{2}{\Delta t_1} (\omega^{n+1/2} - \omega^n) + u^n L_x \omega^{n+1/4} + v^n L_y \omega^n = \frac{\text{Pr}}{\text{Ma}} (L_{xx} \omega^{n+1/2} + L_{yy} \omega^n),$$

$$\frac{2}{\Delta t_1} (\omega^{n+3/4} - \omega^{n+1/2}) + u^n L_x \omega^{n+1/2} + v^n L_y \omega^n - \frac{\text{Pr}}{\text{Ma}} (L_{xx} \omega^{n+1/2} + L_{yy} \omega^{n+3/4}),$$

$$\frac{2}{\Delta t_1} (\omega^{n+1} - \omega^{n+1/2}) + u^n L_x \omega^{n+1/2} + v^n L_y \omega^{n+3/4} = \frac{\text{Pr}}{\text{Ma}} (L_{xx} \omega^{n+1/2} + L_{yy} \omega^{n+1}).$$

Схема условно устойчива, имеет первый порядок аппроксимации по времени.

Уравнение Пуассона для функции тока (2) решалось по схеме

$$\frac{2}{\Delta t_2} (\psi^{n+1, r+1/2} - \psi^{n+1, r}) = L_{xx} \psi^{n+1, r+1/2} + L_{yy} \psi^{n+1, r} - \omega^{n+1},$$

$$\frac{2}{\Delta t_2} (\psi^{n+1, r+1} - \psi^{n+1, r+1/2}) = L_{xx} \psi^{n+1, r+1/2} + L_{yy} \psi^{n+1, r+1} - \omega^{n+1},$$

где  $\Delta t_2$  — шаг по фиктивному времени и  $t_2 = r \Delta t_2$ . Схема имеет второй порядок аппроксимации по времени.

*Аппроксимация граничных условий.* Для вихря скорости на твердой поверхности аппроксимация проводилась по явной формуле пятого порядка [9], которая в случае нижней горизонтальной поверхности принимает вид

$$\omega_{i,0} = \frac{1}{18h_0^2} (-247\psi_{i,0} + 108\psi_{i,1} + 135\psi_{i,2} + 4\psi_{i,3}) - \frac{1}{5\tilde{h}_0} (20u_{i,0} + 36u_{i,1} + 9u_{i,2}).$$

Здесь  $h_0 = y_1 - y_0$  ( $\psi_{i,0} = u_{i,0} = 0$ ).

При прогонке на дробном шаге по координате  $x$  используется обычный для метода компактных разностей прием: в качестве граничного условия для вихря скорости принимается полусумма аппроксимаций, соответствующих  $n$ -му и  $(n+1)$ -му шагам.

Наличие свободной границы вносит свою специфику в процесс формирования граничных условий. Например, при численном дифференцировании функции тока по координате  $y$  с целью определения компоненты скорости  $u$  используется схема [9]

$$m_0 + 6m_1 + 3m_2 = \frac{1}{3h_0} (-10f_0 - 9f_1 + 18f_2 + f_3) \quad (m_0 = 0, \quad f_0 = 0)$$

для твердой границы (дно полости) и схема

$$17m_{N-2} + 28m_{N-1} = \frac{1}{2h_{N-1}} (-4f_{N-3} - 65f_{N-2} + 52f_{N-1} + 17f_N) - h_{N-1}M_N$$

для открытой поверхности. Здесь  $M_N$  представляет фигурирующую в (4) вторую производную функции тока по нормали к поверхности. Значение искомой скорости на границе определяется с помощью схемы

$$m_N = \frac{1}{12h_{N-1}} (-7f_{N-2} - 16f_{N-1} + 23f_N) - \frac{1}{6} (m_{N-2} + 8m_{N-1} - h_{N-1}M_N).$$

*О решении сеточных уравнений.* В конечном счете вычисления сводятся к монотонной пятидиагональной скалярной прогонке для диффузионных членов и трехдиагональной — для конвективных. Во всех случаях выполняется строгое диагональное преобладание. Коэффициенты формируемых ленточных матриц зависят только от параметров сетки и не меняются при переходе от одного временного слоя к другому. Это обстоятельство позволяет избежать многократной факторизации матриц; вычислительные ресурсы ЭВМ расходуются в основном на обратную прогонку.

В вычислениях использовались прямоугольные неравномерные сетки, растягивающиеся к центру и сгущающиеся к границам области, однозначно определяемые коэффициентом растяжения (сгущения) [9]. Три приграничных интервала (по нормали к границе) для удобства аппроксимации граничных условий принимались равными друг другу. Сетки имели размеры  $20 \times 20$ ,  $40 \times 40$  и  $60 \times 60$  ячеек. В последнем случае минимальный шаг по пространственной координате уменьшался до величины  $h_0 = 0,00259$ , что соответствует равномерной сетке  $386 \times 386$ .

Шаг по фиктивному времени для уравнений (2) и (3) принимался постоянным:  $\Delta t_2 = 0,2$  и  $\Delta t_3 = 0,1$  соответственно. Шаг для уравнения (1) при  $Pr = 1$  (сетка  $60 \times 60$ ) менялся от  $\Delta t_1 = 0,0003$  для  $Ma = 10^2$  до  $\Delta t_1 = 0,03$  для  $Ma = 10^4$ . Итерации прекращались, когда выполнялось условие  $\max_{i,j} |\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n| / \max_{i,j} |\omega_{i,j}^n| < \varepsilon$ . Типичным значением  $\varepsilon$  в вычислениях было  $\varepsilon = 10^{-7}$ . В процессе выполнения итераций кроме обычных для данного круга задач характеристик, таких как интегральный тепловой поток в трех вертикальных сечениях полости (в центральном сечении и на стенках), контролировался ряд локальных характеристик, наиболее чувствительных к способу аппроксимации пространственных производных. Одна из них — величина производной температуры  $\partial T / \partial x$  в точке с координатами  $(x = 1, y = 1)$ . По завершении итераций контролировался локальный тепловой баланс в ячейках, вычисляемый также с помощью метода компактных разностей.

**Результаты решения.** Символом  $Nu_C$  обозначим интегральное число Нуссельта, соответствующее вертикальному сечению  $x = C$ :

$$Nu_C = \int_0^1 Nu(C, y) dy, \quad (5)$$

где  $Nu(C, y) = Ma(uT) - \partial T / \partial x \Big|_{x=C}$ . Величина  $Nu(C, y)$  — локальное число Нуссельта в точке с координатами  $(C, y)$ , связанное с тем же вертикальным сечением.

Расчеты показывают, что зависимость структуры течения и теплообмена от  $Pr$  с изменением его от 1 до 3000 наиболее ярко проявляется на интервале  $1 \leq Pr \leq 16$ , ослабевает на интервале  $16 \leq Pr \leq 200$  и становится пренебрежимо малой в дальнейшем: все интересующие нас значения характеристик течения и теплообмена, полученные численно для  $Pr = 3000$ , отличаются от соответствующих значений для  $Pr = 200$  в четвертой значащей цифре и поэтому исключаются из дальнейшего рассмотрения.

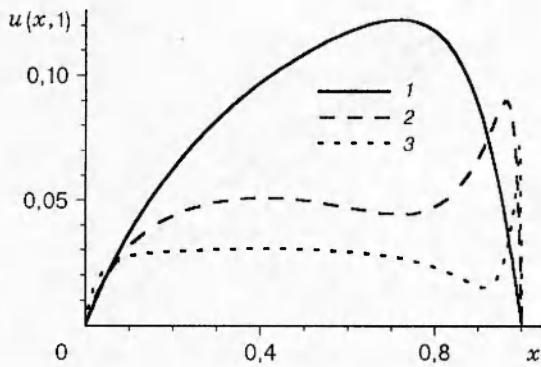


Рис. 1

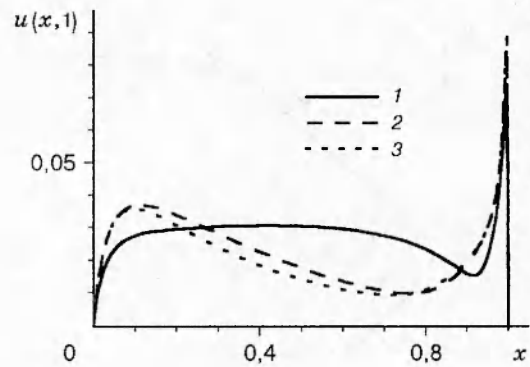


Рис. 2

Решение задачи характеризуется значительными локальными градиентами температуры и скорости на свободной поверхности, которые с ростом  $Ma$  сосредотачиваются вблизи холодной границы. Приведенные в статье рис. 1–6 дают некоторое качественное представление о структуре течения, наличии зон со значительными градиентами поля температуры и скорости, эволюции структуры течения с изменением  $Ma$  и  $Pr$ . На рис. 1 представлено распределение горизонтальной компоненты скорости на открытой поверхности при  $Pr = 1$  и  $Ma = 10^2; 10^3; 10^4$  (кривые 1–3). Видно, что с ростом  $Ma$  глобальный максимум распределения смещается к холодной границе (ср. с [4]).

Проследим за эволюцией по  $Pr$  одного из представленных на рис. 1 режимов течения, соответствующего значению  $Ma = 10^4$  (кривая 3). Рис. 2 демонстрирует распределение той же компоненты скорости при  $Pr = 1; 16; 200$  (кривые 1–3). На рис. 3 показано распределение температуры на свободной поверхности, на рис. 4 — локальной теплоотдачи вдоль вертикальной холодной границы, а на рис. 5 — горизонтальной компоненты скорости в вертикальном сечении  $x = 1/2$  для трех режимов течения, представленных распределениями скорости на рис. 2. Рис. 3, 4 свидетельствуют о наличии значительных градиентов температуры в окрестности точки с координатами  $(x, y) = (1, 1)$ , где движущаяся вдоль поверхности и не успевшая еще охладиться жидкость встречается с холодной стенкой. В этой же точке достигается максимум локальной теплоотдачи, т. е.  $Nu_{max} = Nu(1, 1)$ , для всех рассмотренных значений  $Ma$  и  $Pr$ . Для адекватного представления распределений в графической форме использован логарифмический масштаб.

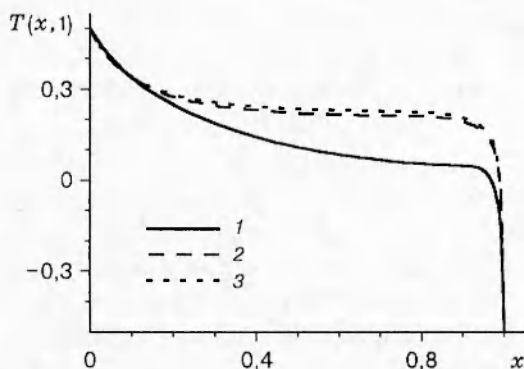


Рис. 3

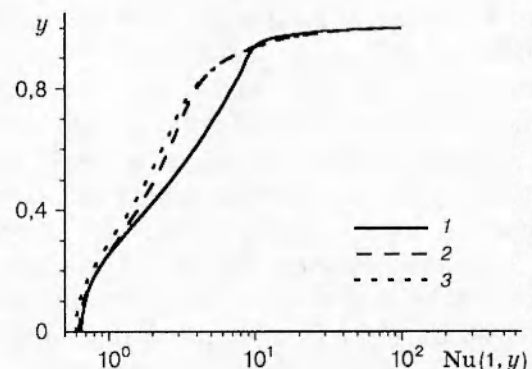


Рис. 4

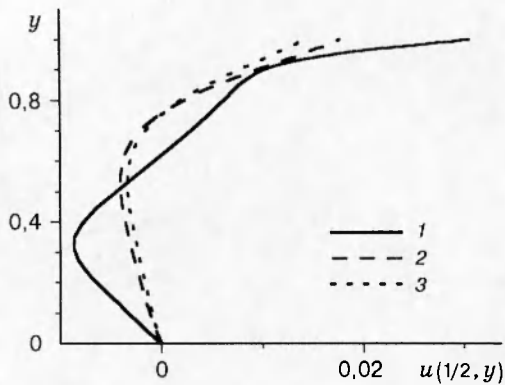


Рис. 5

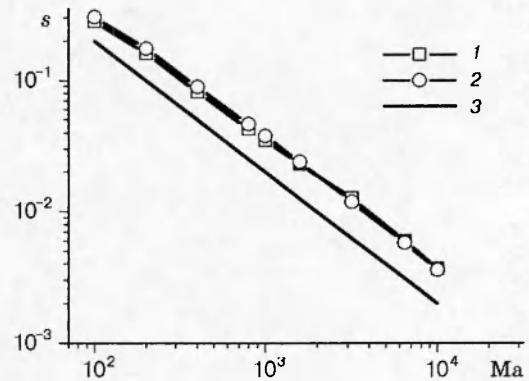


Рис. 6

Локальные особенности процесса теплоотдачи на вертикальных стенках зависят от структуры течения, которая в свою очередь зависит от  $Pr$ . При  $Pr = 1$  и  $Ma = 10^2$  течение относительно слабое и приповерхностное. С ростом  $Ma$  охлажденный поток жидкости проникает все глубже вдоль холодной границы, достигает дна полости (кривая 1 на рис. 5); центр главного вихря все больше смещается по направлению к геометрическому центру полости. Эволюция по  $Ma$  пространственной структуры течения в данном случае во многом напоминает, как справедливо отмечено в [6], эволюцию течения в каверне с движущейся крышкой. В нижних углах полости развиваются вторичные и третичные вихри. Вторичные вихри имеют асимметричную форму, эволюционируют по сложному закону: правый вихрь монотонно возрастает, левый сначала уменьшается в размерах, достигая своего минимума (по ширине и высоте) при  $Ma \approx 3 \cdot 10^3$ , после чего его геометрические параметры начинают монотонно возрастать. Третичные вихри имеют более симметричную форму (ширина с точностью до двух значащих цифр равна высоте), в своей эволюции они повторяют динамику соответствующих вторичных вихрей. Следует подчеркнуть, что в данном случае вторичные вихри не влияют на структуру локальной теплоотдачи ни на холодной, ни на горячей стенках.

При  $Pr = 16$  и возрастании  $Ma$  до  $Ma = 10^4$  течение остается приповерхностным (кривая 2 на рис. 5), центр вихря смещается по направлению к горячей стенке; вторичные и третичные вихри в нижних углах полости практически не изменяются в размерах.

Анализ профилей продольной компоненты скорости  $u(1/2, y)$  для достаточно больших значений  $Ma$  и различных значений  $Pr$  показывает, что уже при  $Ma = 10^3$  в случае сильновязкой жидкости ( $Pr \geq 16$ ) наблюдается интенсивный поверхностный поток жидкости от горячей стенки к холодной и приповерхностное обратное компенсирующее (в силу закона сохранения массы) течение, слабо влияющее на течение жидкости в придонной области. В относительно маловязкой жидкости ( $Pr = 1$ ) на том же профиле скорости наблюдается глобальный минимум при  $y \approx 0,3$ , т. е. жидкость в придонной области вовлечена в интенсивное компенсирующее течение. Заметим, что указанное положение экстремума на профиле продольной компоненты скорости хорошо соотносится с положением глобального максимума на профиле локальной теплоотдачи вдоль горячей поверхности.

*Решение повышенной точности.* Некоторые характеристики течения и теплообмена задачи (1)–(4) для  $Pr = 1$ , заимствованные из [6, 7], а также данные, демонстрирующие зависимость полученного нами решения от размера используемой сетки, представлены в табл. 1. Для более полного количественного описания исследуемого течения, а также с целью создания условий для объективного тестирования вычислительных схем расширим этот набор характеристик, введя следующие: значение функции тока в центре полости;

Таблица 1

Ma	Размер сетки	$u(1/2, 1)$	$Nu_0$	$Nu_{1/2}$	$Nu_1$	$\omega(0, 1)$	$\omega(1, 1)$
$10^2$	$20 \times 20$	$1,0879 \cdot 10^{-1}$	1,0965	1,0965	1,0965	0,7239	2,044
	$40 \times 40$	$1,0869 \cdot 10^{-1}$	1,0962	1,0962	1,0962	0,7300	2,028
	$60 \times 60$	$1,0869 \cdot 10^{-1}$	1,0962	1,0962	1,0962	0,7301	2,028
$10^3$	$20 \times 20$	$4,9380 \cdot 10^{-2}$	1,9294	1,9269	1,9299	0,9437	12,32
	$40 \times 40$	$5,0007 \cdot 10^{-2}$	1,9259	1,9259	1,9257	0,9545	11,85
	$60 \times 60$	$5,0018 \cdot 10^{-2}$	1,9258	1,9258	1,9258	0,9550	11,75
	$64 \times 64$	—	1,92*	—	1,93*	—	11,8*
	$64 \times 64$	—	—	—	—	1,0**	11,79**
$10^4$	$40 \times 40$	$2,6855 \cdot 10^{-2}$	4,4099	4,2785	4,4000	2,2124	67,53
	$60 \times 60$	$3,0381 \cdot 10^{-2}$	4,3621	4,3621	4,3654	2,2334	77,09
	$64 \times 64$	—	4,32*	—	4,34*	2,4*	60,2*
	$64 \times 64$	$2,96 \cdot 10^{-2**}$	4,36**	4,33**	4,40**	—	—

\* Данные из [6].

\*\* Данные из [7].

максимум горизонтальной компоненты скорости на открытой поверхности; экстремумы той же компоненты скорости в вертикальном центральном сечении; экстремумы вертикальной компоненты скорости в горизонтальном центральном сечении; размеры вторичных и третичных вихрей, расположенных в нижних углах полости ( $H$  — ширина,  $V$  — высота; индекс  $L$  соответствует левому углу, индекс  $R$  — правому); значение вихря скорости в трех выделенных точках поверхности; максимум локальной теплоотдачи на горячей вертикальной поверхности. Основные характеристики полученного для  $Pr = 1$  на сетке  $60 \times 60$  решения сведены в табл. 2, где всем помещенным экстремальным характеристикам ставится в соответствие их местоположение.

*Об эволюции максимума распределения скорости вдоль открытой поверхности.* Детальный анализ распределения скорости  $u(x, 1)$  для различных значений  $Pr$  позволил выявить следующую интересную закономерность: при том, что форма распределения зависит от  $Pr$  (см. рис. 2), положение его глобального максимума  $s$ , отсчитываемое от холодной границы, с возрастанием  $Ma$  изменяется по степенному закону  $s = c \cdot (Ma)^d$  с показателем степени  $d = -0,96 \approx -1$ , т. е. уменьшается в обратно пропорциональной зависимости от величины  $Ma$  для всех рассмотренных значений  $Pr$ . На рис. 6 представлены результаты расчетов величины  $s$  для  $Pr = 1$ ; 16 (кривые 1, 2), непрерывная линия 3 отображает зависимость  $s = 20/Ma$ .

*Параметрические аппроксимации характеристик теплоотдачи.* Результаты вычислений позволяют на интервале  $10^3 \leq Ma \leq 10^4$  построить параметрические аппроксимации интегральной теплоотдачи ( $Nu_0$ ) и максимальной локальной теплоотдачи ( $Nu_{max}$ ) в зависимости от  $Ma$ :

$$Nu_0 = 0,17Ma^{0,35}, \quad Nu_{max} = 0,034Ma^{0,84}, \quad Pr = 1; \quad (6)$$

$$Nu_0 = 0,29Ma^{0,28}, \quad Nu_{max} = 0,020Ma^{0,93}, \quad Pr = 16; \quad (7)$$

$$Nu_0 = 0,31Ma^{0,27}, \quad Nu_{max} = 0,013Ma^{0,98}, \quad Pr = 200. \quad (8)$$

Анализ аппроксимаций (6)–(8) приводит к следующему выводу: большему значению  $Pr$  соответствует более быстрый рост  $Nu_{max}$ , что находит отражение в показателе степени полученной аппроксимации. Примечательно, что указанный факт наблюдается на фоне относительного снижения интегрального потока тепла через слой жидкости: с изменением

Таблица 2

Характеристика	Ma		
	10 <sup>2</sup>	10 <sup>3</sup>	10 <sup>4</sup>
$\psi(1/2, 1/2) \cdot 10^3$	-6,005	-2,833	-2,859
$\{u_{\max}(x, 1) \cdot 10^2; x\}$	{12,24; 0,721}	{9,021; 0,965}	{7,62; 0,996}
$\{u_{\max}(1/2, y) \cdot 10^2; y\}$	{10,87; 1,0}	{5,002; 1,0}	{3,038; 1,0}
$\{u_{\min}(1/2, y) \cdot 10^3; y\}$	{-21,21; 0,537}	{-9,802; 0,518}	{-8,613; 0,325}
$\{v_{\max}(x, 1/2) \cdot 10^3; x\}$	{17,58; 0,230}	{8,111; 0,228}	{7,766; 0,247}
$\{v_{\min}(x, 1/2) \cdot 10^3; x\}$	{-20,12; 0,800}	{-9,811; 0,800}	{-11,81; 0,844}
$\{H_L(2); V_L(2)\} \cdot 10^2$	{8,95; 9,07}	{8,60; 8,65}	{10,5; 9,66}
$\{H_R(2); V_R(2)\} \cdot 10^2$	{9,41; 9,64}	{10,7; 11,2}	{23,4; 29,5}
$\{H_L(3); V_L(3)\} \cdot 10^3$	{5,32; 5,32}	{5,07; 5,07}	{6,01; 6,01}
$\{H_R(3); V_R(3)\} \cdot 10^3$	{5,64; 5,65}	{6,55; 6,56}	{15,8; 15,8}
$\omega(0, 1)$	0,7301	0,9550	2,233
$\omega(1/2, 1)$	0,7368	0,3142	0,2852
$\omega(1, 1)$	2,028	11,75	77,09
$\{Nu_{0,\max}; y\}$	{1,223; 0,322}	{2,168; 0,520}	{5,253; 0,409}
$Nu_0$	1,096 16	1,9258	4,362
$Nu_{1/2}$	1,096 16	1,9258	4,362
$Nu_1$	1,096 16	1,9258	4,365

$Pr$  от 1 до 200 показатель степени в аппроксимации  $Nu_{\max}$  растет приблизительно от  $4/5$  до 1, в то время как соответствующий показатель  $Nu_0$  уменьшается от  $1/3$  до  $1/4$ . Все более проявляющаяся с увеличением  $Pr$  прямо пропорциональная зависимость  $Nu_{\max}$  от  $Ma$  коррелирует с выявленной закономерностью эволюции  $s$  (рис. 6).

**Закключение.** С высокой пространственной разрешающей способностью численно исследованы локальные характеристики термокапиллярного течения, характеризующегося наличием областей с относительно большими локальными градиентами скорости и температуры. По результатам вычислений установлена закономерность, общая для всех рассмотренных течений (среды с различными значениями  $Pr$ ), в соответствии с которой положение максимума горизонтальной компоненты скорости смещается к холодной границе с ростом  $Ma$ . Вблизи холодной стенки возникает большой градиент температуры (см. рис. 3, 4), в связи с чем именно здесь в концентрированной форме сосредоточивается локальное влияние термокапиллярного эффекта, происходит ускорение жидкости и наблюдается не только локальный, но и глобальный максимум горизонтальной компоненты скорости. Затем формируется поворотное нисходящее течение, т. е. проявляется подтормаживающее влияние вертикальной стенки, в которую «утыкается» ускоренное поверхностное течение еще не успевшей остыть жидкости. С этой локальной особенностью течения связана наблюдаемая локальная особенность (максимум) теплового потока на стенке.

Из табл. 1 следует, что грубые методы (низкий порядок аппроксимации пространственных производных или недостаточно подробная сетка) позволяют получить с приемлемой точностью интегральные характеристики ( $Nu_0$ ,  $Nu_1$ ), но приводят к существенным погрешностям при определении локальных характеристик: представленное в [6] значение  $\omega(1, 1) \sim 60,2$  оказывается заниженным более чем на 25%. Так как в силу (4) и (5) выполняется цепочка равенств  $\omega(1, 1) = -\partial T / \partial x \Big|_{x=1, y=1} = Nu(1, 1)$ , в результате оказывается заниженным более чем на 25% и значение локальной теплоотдачи в точке соприкосновения холодной границы с открытой поверхностью. Сравнение интегральных и локальных значений теплоотдачи для  $Pr = 1$ , а также построенных на их основе аппроксимаций с известными результатами [4, 6] показывает, что показатель степени для  $Nu_{\max}$  в (6) более



чем на четверть превышает значение  $2/3$ , представленное в [6]; величина  $Nu_{\max} = 52,1$ , полученная нами при  $Ma = 6400$ , более чем в два раза превышает соответствующее значение в [4]. Вместе с тем оба коэффициента интегральной теплоотдачи в (6) с точностью до двух значащих цифр совпадают с известным результатом [4].

В то же время указанная закономерность, как это наглядно демонстрирует рис. 6, предъявляет жесткие требования к пространственному разрешению при численном моделировании. Представленное в табл. 2 решение повышенной точности может служить тестом для конечно-разностных и конечно-элементных схем второго порядка, используемых в численном моделировании термокапиллярной и тепловой гравитационно-капиллярной конвекции [4–7], например в различных технологических методах выращивания кристаллов.

Автор выражает благодарность В. С. Бердникову за привлечение внимания к рассмотренной задаче и обсуждение результатов численного моделирования.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С. С., Кирдяшкин А. Г., Бердников В. С. Влияние термокапиллярных сил на процессы переноса у свободной поверхности жидкости в горизонтальном слое при турбулентной тепловой гравитационной конвекции // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231, № 2. С. 309–311.
2. Бердников В. С. Структура свободно-конвективного течения жидкости вблизи свободной поверхности теплообмена // Некоторые задачи гидродинамики и теплообмена: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теплофизики. 1976. С. 12–22.
3. Бердников В. С. Термокапиллярная конвекция в горизонтальном слое жидкости // Теплофизические исследования: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теплофизики. 1977. С. 99–104.
4. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье — Стокса / В. И. Полежаев, А. В. Бунэ, Н. А. Везеуб и др. М.: Наука, 1987.
5. Конвективные процессы в невесомости / В. И. Полежаев, М. С. Белло, Н. А. Везеуб и др. М.: Наука, 1991.
6. Zebib A., Homsy G. M., Meiburg E. High Marangoni number convection in a square cavity // Phys. Fluids. 1985. V. 28, N 12. P. 3467–3476.
7. Carpenter B. M., Homsy G. M. High Marangoni number convection in a square cavity. Pt II // Phys. Fluids. 1990. V. A2, N 2. P. 137–149.
8. Толстых А. И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэродинамики. М.: Наука, 1990.
9. Гапонов В. А. Компактные разностные аппроксимации повышенного порядка точности в задачах вычислительной гидродинамики. Новосибирск, 1994. (Препр. / РАН. Ин-т теплофизики; № 272-94).
10. Гапонов В. А. Численное решение задачи о конвективном течении в замкнутой полости методом компактных разностей повышенного порядка точности. Новосибирск, 1994. (Препр. / РАН. Ин-т теплофизики; № 273-94).
11. Lele S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution // J. Comput. Phys. 1990. V. 103, N 1. P. 16–39.