РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗРАБОТКИ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

2023 № 1

УДК 539.372; 622.693

ЛОКАЛИЗАЦИЯ СДВИГОВ И ОБРАЗОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ПРИ ТЕЧЕНИИ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ В РАДИАЛЬНОМ КАНАЛЕ

С. В. Клишин, А. Ф. Ревуженко

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
E-mail: sv.klishin@google.com, *Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

На основе метода дискретных элементов исследована задача о гравитационном течении сыпучих материалов в симметричных сходящихся каналах (V-образных бункерах). Показано, что при определенных условиях симметричный и радиальный режим течения становится неустойчивым и в среде формируется пространственно-временная структура. Течение становится существенно нерадиальным и несимметричным — материал разбивается дискретной системой поверхностей на отдельные блоки и поле скоростей внутри среды приобретает разрывной характер. Дальнейшее деформирование сводится к относительному движению блоков практически как жестких целых.

Сходящийся канал, выпуск горной массы, течение сыпучего материала, численное моделирование, лабораторный эксперимент, метод дискретных элементов, локализация сдвиговых деформаций

DOI: 10.15372/FTPRPI20230103

Задача о течении сыпучих материалов в сходящихся каналах (V-образных бункерах) — одна из классических в механике. Такие течения реализуются в естественных условиях и различных технологических процессах горнодобывающей промышленности. В настоящее время одно из самых перспективных направлений в технологии отработки мощных пологих угольных пластов — технологические схемы с выпуском самообрушаемого угля [1 – 3]. Эта технология позволяет извлечь из угольного пласта до 80 % его запасов, ее эффективность обеспечивается значительным сокращением объемов подготовительных работ, капитальных и эксплуатационных затрат, снижением опасности самовозгорания угля, а также возможностью разработки пластов в сложных условиях и извлечением запасов из оставленных ранее охранных целиков. Это дает возможность повысить эффективность и безопасность отработки угольных месторождений. Наряду с отмеченными преимуществами технологии с выпуском угля известны и трудности ее реализации. Это относится к требованиям полноты выпуска угля и обеспечения безопасности и эффективности работы очистного забоя. Потери угля в обрушенном пространстве приводят к его самовозгоранию. При выпуске угля происходит его

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-17-00008, https://rscf.ru/project/21-17-00008.

перемешивание с разрушенными породами кровли и повышается зольность угольной массы как конечного продукта. Натурные и лабораторные исследования таких процессов показали, что типичными формами выпуска горной массы являются эллипсоид выпуска и форма в виде перевернутой капли [4 – 12].

Аналогия течения сыпучего материала в *V*-образных бункерах — пластическое течение сплошного материала при продавливании его через канал с гладкими стенками, т. е. волочение, заключающееся в протягивании заготовки через сужающуюся полость матрицы.

Трудность исследования данной задачи связана с тем, что при близких граничных условиях сыпучая среда имеет множество форм равновесия. Возможно множество различных режимов течения (с образованием “трубки”, радиального режима и др.). В [13, 14] приведены экспериментальные результаты по формированию линий локализации в песке в плоской модели *V*-образного бункера, в [15] на основе схемы Янсена сформулирован приближенный подход к теоретическому описанию напряженного состояния среды.

В [16, 17] экспериментально обнаружен и исследован режим течения, для которого характерно образование поверхностей локализации и формирования регулярной структуры. Эксперименты [16] показали, что в начале выпуска материал деформируется без образования линий скольжения (допредельное деформирование). При достаточно больших смещениях в среде образуются линии скольжения, разбивающие материал на отдельные блоки.

Лабораторные исследования данного режима течения продолжены в [18, 19]. Приведем результаты, показывающие, что течение в симметричном канале с гладкими стенками существенно отличается от радиального и симметричного. Эксперименты проводились с сухим кварцевым песком крупностью 0.3 мм. Стенд представлял собой радиальный сходящийся канал высотой 400 мм и углом раствора 32°. Боковые стенки металлические, расстояние между передней и задней стенками 52 мм, ширина выпускного отверстия 5 мм. Стенд оборудован регулируемым дозатором непрерывного действия, в процессе выпуска поддерживался постоянный уровень свободной поверхности материала.

На рис. 1 приведены картины деформированного состояния материала при выпуске в равные промежутки времени. При истечении материала наблюдаются сложные процессы, связанные с локализацией деформаций, формированием кластеров и рождением новых потоков со сменой направлений их движения. Это вызывает существенное перераспределение напряжений [18]. Таким образом, при стационарных внешних условиях, если материал постоянно досыпать в бункер, течение на стационарный режим не выходит и носит пульсирующий характер.

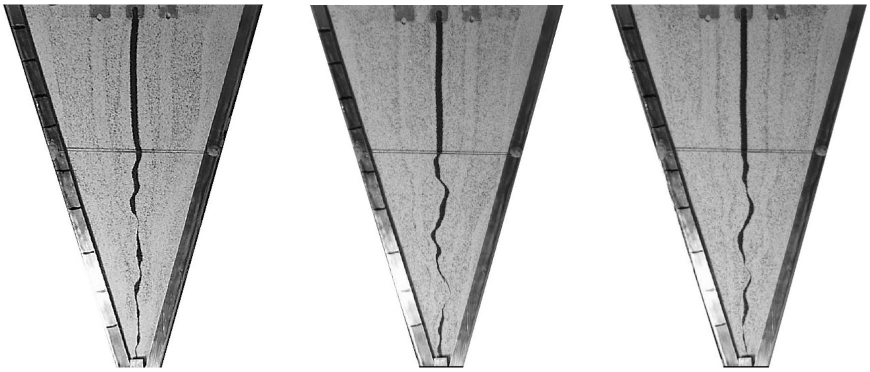

Рис. 1. Деформированное состояние сыпучего материала при выпуске из *V*-образного бункера. Темная линия — маркерная полоса из подкрашенного песка

Теоретические исследования в рамках различных приближенных моделей предприняты в [20–22]. Моделирование локализованного сдвига в сходящемся канале, где разрывы смещения возникают вдоль линий скольжения, на которых материал ведет себя пластично и упруго вне их, описано в [21]. Теория клеточных автоматов использована в [22] для построения стохастической модели процесса выпуска сыпучих сред из сходящихся радиальных каналов с учетом локализации деформации. Однако полного решения задачи получить не удалось. Трудности связаны с тем, что здесь реализуются большие деформации, конфигурация линий скольжения заранее неизвестна, в материале возможно как активное нагружение, так и разгрузка. И только с развитием вычислительной техники появилась возможность более полного решения задачи.

В настоящее время наиболее перспективными способами изучения процессов деформирования и гравитационного движения горной массы являются методы, основанные на дискретном представлении исследуемой среды, например метод дискретных элементов (МДЭ) [23–25]. Он позволяет определять эволюцию напряженно-деформированного состояния среды, состоящей из отдельных частиц при разных способах ее нагружения, и успешно применяется при анализе задач выпуска в различных постановках [26–29].

Прерывистый режим течения с использованием реалистичных форм зерен материала в двумерном случае рассматривается в [30, 31]. Распределения средних величин пустотности, координационного числа, скорости потока и напряжений в частицах принимают вид радиальных волн, исходящих из выпускного отверстия и распространяющихся в направлении, противоположном потоку. Сравнение скорости выпуска в случае сферических и цилиндрических частиц проведено в [32]. Здесь изменялись отношения высоты и диаметра цилиндров, а также угол наклона стенки бункера, показан переход от прерывистого режима выпуска к равномерному. В [33] проанализированы радиальные характеристики потока сыпучего материала для различных размеров выпускного отверстия и угла наклона стенок бункера. Для классификации разных режимов выпуска предложен локальный индекс массового расхода. Влияние шероховатости стенок бункера на скорость потока и распределение силовых цепочек в материале исследовано в [34].

В последнее время в качестве альтернативы классическому численному анализу с применением МДЭ для повышения эффективности решений задач выпуска сыпучих материалов внедряются методы машинного обучения [35]. Они используются для идентификации и калибровки набора входных параметров, а также для прогноза различных режимов течения [36, 37].

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫПУСКА СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА ИЗ *V*-ОБРАЗНОГО БУНКЕРА МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Емкость для сыпучего материала представляет собой *V*-образный бункер, заполненный на высоту $h = 1$ м (рис. 2). Недеформируемые и абсолютно гладкие боковые стенки *1* и *2* находятся на расстоянии $l = 0.04$ м друг от друга и наклонены к вертикальной оси под углом $\alpha = 15^\circ$. Передняя стенка *3* и задняя *4* ориентированы параллельно плоскости Oxz, расстояние между ними равно l. Длина L верхней границы засыпки составляет 0.616 м. Стенки *3* и *4* являются жесткими и абсолютно гладкими, т. е. деформирование сыпучего материала внутри канала выполняется в условиях, близких к условиям плоской деформации. Выпуск происходит через отверстие размером $l \times l$, расположенное в плоскости Oxy, и реализуется двумя способами. В первом случае осуществляется выпуск без досыпки, т. е. частицы, вертикальная координата которых становится меньше нуля, удаляются из расчета. Второй случай — выпуск с досыпкой, при котором используются периодические граничные условия относительно оси Oz. Вектор силы тяжести $\mathbf{g} = \{0, 0, -9.81\}$.

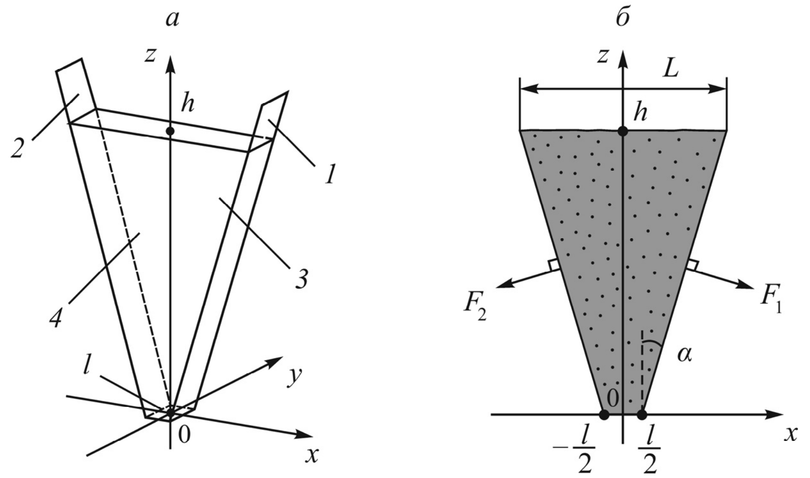

Рис. 2. Бункер для сыпучего материала: *а* — трехмерная схема; *б* — сечение плоскостью *Oxz*

Сыпучий материал представлен совокупностью из $N = 287\,000$ (выпуск без досыпки) и $N = 154\,500$ (выпуск с периодическими граничными условиями) дискретных элементов. Во втором случае частицы взяты бо́льшего размера для ускорения численного счета. В обоих случаях начальная масса сыпучей среды составила 28 кг.

Особенность классической формулировки МДЭ — использование в расчетах частиц сферической формы, в то время как в реальной ситуации относительное движение частиц зависит от их формы и деформаций. Для исследования задач гравитационного движения сыпучих материалов, состоящих из частиц произвольной формы, весьма эффективны алгоритмы, где отдельные дискретные элементы представляют собой кластеры, составленные из сфер [38 – 40]. Этот подход эффективно описывает произвольную трехмерную геометрию дискретных элементов, не используя дополнительно введенных искусственных механизмов, ограничивающих относительное движение частиц, например модели, учитывающие сопротивление качению или адгезию.

В настоящей работе используются дискретные элементы в виде кластеров из трех сферических частиц одинакового радиуса *R*, расположенных в одной плоскости (рис. 3*а*). Расстояние *D* между центрами сфер удовлетворяет равенству $R / D = 4 / 3$. Радиусы сфер выбраны из логнормального распределения в соответствии с результатами исследований обломочных горных пород [41, 42] (рис. 3*б*).

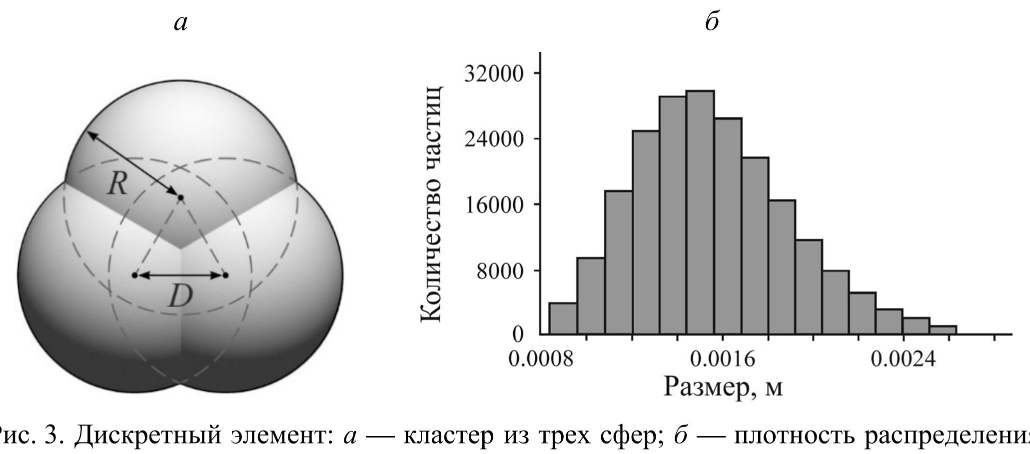

Рис. 3. Дискретный элемент: *а* — кластер из трех сфер; *б* — плотность распределения размеров частиц (*б*)

Физические параметры материала частиц сыпучего материала и границ бункера следующие: плотность $\rho = 2500$ кг/м^3; коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$; модуль упругости $E = 10 \cdot 10^9$ Па; коэффициент трения между частицами $\mu = 0.577$; коэффициент восстановления скорости $c_r = 0.6$. Согласно классической формулировке МДЭ, сыпучая среда — набор из N отдельных сферических частиц, каждая из которых характеризуется своими размерами, физическими и контактными свойствами. Взаимодействие дискретных элементов друг с другом и твердыми границами осуществляется при их контакте, а напряженно-деформированное состояние всей системы зависит от положения каждой частицы, контактных сил, а также заданных внешних сил и граничных смещений. Движение отдельного i-го дискретного элемента состоит из поступательного и вращательного и описывается уравнениями:

$$m_i \frac{d^2\mathbf{x}_i}{dt^2} = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} \mathbf{F}_{ij} + m_i \mathbf{g}, \tag{1}$$

$$I_i \frac{d^2\boldsymbol{\theta}_i}{dt^2} = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} (\mathbf{r}_{c,ij} \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{M}_{ij}). \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{x}_i$ — радиус-вектор центра тяжести частицы; $\boldsymbol{\theta}_i$ — ее поворот относительно координатных осей; m_i — масса; I_i — момент инерции; $\mathbf{r}_{c,ij} = \mathbf{r}_{c,ji}$ — вектор, направленный из центра i-й частицы в точку контакта; контактная сила $\mathbf{F}_{ij}$ действует на частицу с номером i со стороны частицы с номером j, зависит от величины их перекрытия, а также от упругих и вязких модулей; $\mathbf{M}_{ij}$ — момент сопротивления качению. Поскольку форма дискретных элементов на протяжении всего времени контакта предполагается неизменной, степень их деформации описывается величиной перекрытия между контактирующими частицами.

Вектор контактной силы $\mathbf{F}_{ij}$ представляется суммой нормальной $\mathbf{F}_{n,ij}$ и касательной $\mathbf{F}_{t,ij}$ сил:

$$\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{n,ij} + \mathbf{F}_{t,ij} = F_{n,ij}\mathbf{n}_{ij} + F_{t,ij}\mathbf{t}_{ij}. \tag{3}$$

где $F_{n,ij}$, $F_{t,ij}$ — нормальная и касательная компоненты контактной силы; $\mathbf{n}_{ij}$, $\mathbf{t}_{ij}$ — нормальный и касательный единичные векторы к плоскости контакта.

С учетом упругой и вязкой составляющих эти силы записываются в виде:

$$\mathbf{F}_{n,ij} = F_{n,ij}\mathbf{n}_{ij} = k_{n,ij}\delta_{n,ij}\mathbf{n}_{ij} - \gamma_{n,ij} v_{n,ij}\mathbf{n}_{ij}, \tag{4}$$

$$\mathbf{F}_{t,ij} = F_{t,ij}\mathbf{t}_{ij} = k_{t,ij}\delta_{t,ij}\mathbf{t}_{ij} - \gamma_{t,ij} v_{t,ij}\mathbf{t}_{ij}. \tag{5}$$

Здесь $v_{n,ij}$, $v_{t,ij}$ — нормальная и касательная составляющие относительной скорости точки контакта; $\delta_{n,ij}$, $\delta_{t,ij}$ — перекрытия частиц в нормальном и касательном направлениях; $\delta_{n,ij} = (R_i + R_j) - D_{ij} > 0$ — нормальное перекрытие; D_{ij} — расстояние между центрами частиц). Касательное перекрытие $\delta_{t,ij}$ определяется через приращение относительного смещения частиц. Во время t_0 первоначального установления контакта $\delta_{t,ij} = 0$. Каждое последующее приращение $\Delta\delta_{t,ij}$ вычисляется как $\Delta\delta_{t,ij} = (\Delta\mathbf{u}_i - \Delta\mathbf{u}_j)t$, $\Delta\mathbf{u}_i$, $\Delta\mathbf{u}_j$ — приращения смещений точки контакта каждой частицы. Отсюда в произвольный момент времени $t > t_0$: $\delta_{t,ij} = \int_{t_0}^{t} v_{t,ij}(\tau)d\tau$. Если в некоторый момент времени $\delta_{n,ij} < 0$, то такой контакт считается исчерпанным.

Для определения величин в (4) и (5) выбирается вязкоупругое взаимодействие частиц на основе закона Герца. Тогда компоненты контактной силы определяются как [23]:

$$F_{n,ij} = -\left(\frac{4}{3}E^*\sqrt{R^*\delta_{n,ij}}\right)\delta_{n,ij} - \left(2\sqrt{\frac{5}{6}}\beta\sqrt{S_{n,ij}m^*}\right)v_{n,ij},$$

$$F_{t,ij} = -\left(8G_{ij}\sqrt{R^*\delta_{n,ij}}\right)\delta_{t,ij} - \left(2\sqrt{\frac{5}{6}}\beta\sqrt{S_{t,ij}m^*}\right)v_{t,ij},$$

где

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_i^2}{E_i} + \frac{1-\nu_j^2}{E_j}, \quad R^* = \frac{R_i R_j}{R_i + R_j}, \quad m^* = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j},$$

$$\frac{1}{G_{ij}} = \frac{2(2+\nu_i)(1-\nu_i)}{E_i} + \frac{2(2+\nu_j)(1-\nu_j)}{E_j},$$

$$S_{n,ij} = 2E_{ij}\sqrt{E_{ij}\delta_{n,ij}}, \quad S_{t,ij} = 8G_{ij}\sqrt{E_{ij}\delta_{n,ij}}, \quad \beta_{ij} = \frac{\ln c_{r,ij}}{\sqrt{\ln^2 c_{r,ij} + \pi^2}}.$$

Касательная составляющая $\mathbf{F}_t$ контактной силы рассчитывается следующим образом. Определяя $F_{n,ij}$ и $F_{t,ij}$ в (4) и (5), проверяется выполнение неравенства $|\mathbf{F}_{t,ij}| > \mathrm{tg}\varphi_{ij} |\mathbf{F}_{n,ij}|$ (φ_{ij} — заранее заданный угол трения скольжения между частицами. Если это неравенство не выполнено, то $\mathbf{F}_{t,ij}$ находится в соответствии с (3). В противном случае частицы начинают проскальзывать друг по другу и касательная составляющая силы отталкивания равна $\mathbf{F}_{t,ij} = \mathrm{tg}\varphi_{ij}\mathbf{F}_{n,ij}$.

Для обеспечения точности и устойчивости процесса численного интегрирования дифференциальных уравнений второго порядка (1) и (2), с одной стороны, а также эффективного использования вычислительных ресурсов — с другой, необходим оптимальный выбор шага по времени Δt. В [43, 44] проведен детальный анализ различных схем численного интегрирования. Показано, что для выбранной модели Герца существует максимальное значение $\Delta t_{\max}$, связанное со скоростью прохождения волны Рэлея по поверхности сферы:

$$\Delta t_{\max} = \frac{\pi R\sqrt{\dfrac{\rho}{G}}}{0.1631\nu + 0.8766},$$

G — модуль сдвига частиц.

На основе МДЭ в трехмерной постановке разработано оригинальное программное обеспечение для численного исследования задач о деформировании сыпучих материалов при различных граничных и начальных условиях.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В первой серии численных экспериментов выпуск осуществлялся без досыпки материала. Частицы, вертикальная координата которых удовлетворяла условию $z_i < 0$, удалялись. Расчет останавливался в момент полного высыпания материала. Эксперименты проведены для трех контактных условий: абсолютно гладкие частицы и гладкие боковые стенки; шероховатые частицы и абсолютно гладкие боковые стенки; шероховатые как частицы, так и боковые стенки.

Установлено, что несимметричный режим выпуска происходит во втором случае для шероховатых частиц и гладких боковых стенок. На рис. 4 приведены картины деформированного состояния среды в фиксированные моменты времени. Хорошо видно искривление маркерной линии. Угол внешнего трения между частицами составил 30°, между частицами и стенками — 0°.

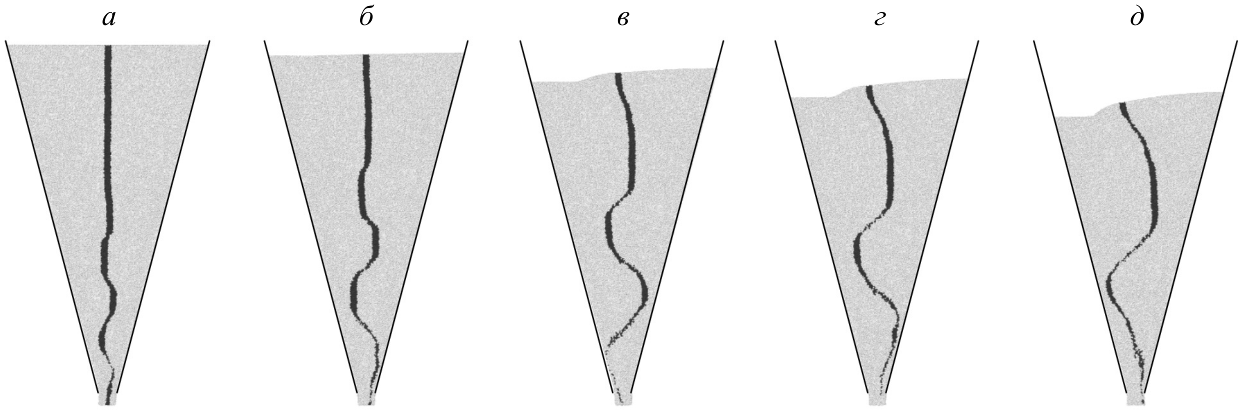

Рис. 4. Деформированное состояние среды в процессе выпуска в случае шероховатых частиц и гладких стенок в фиксированные моменты времени $t = 0.7$ с (*а*), 1.2 (*б*), 1.7 (*в*), 2.2 (*г*) и 2.7 с (*д*)

Распределение горизонтальных и вертикальных смещений в частицах в соответствующие моменты времени показано на рис. 5. Видны блоки, на которые разбивается материал при его движении.

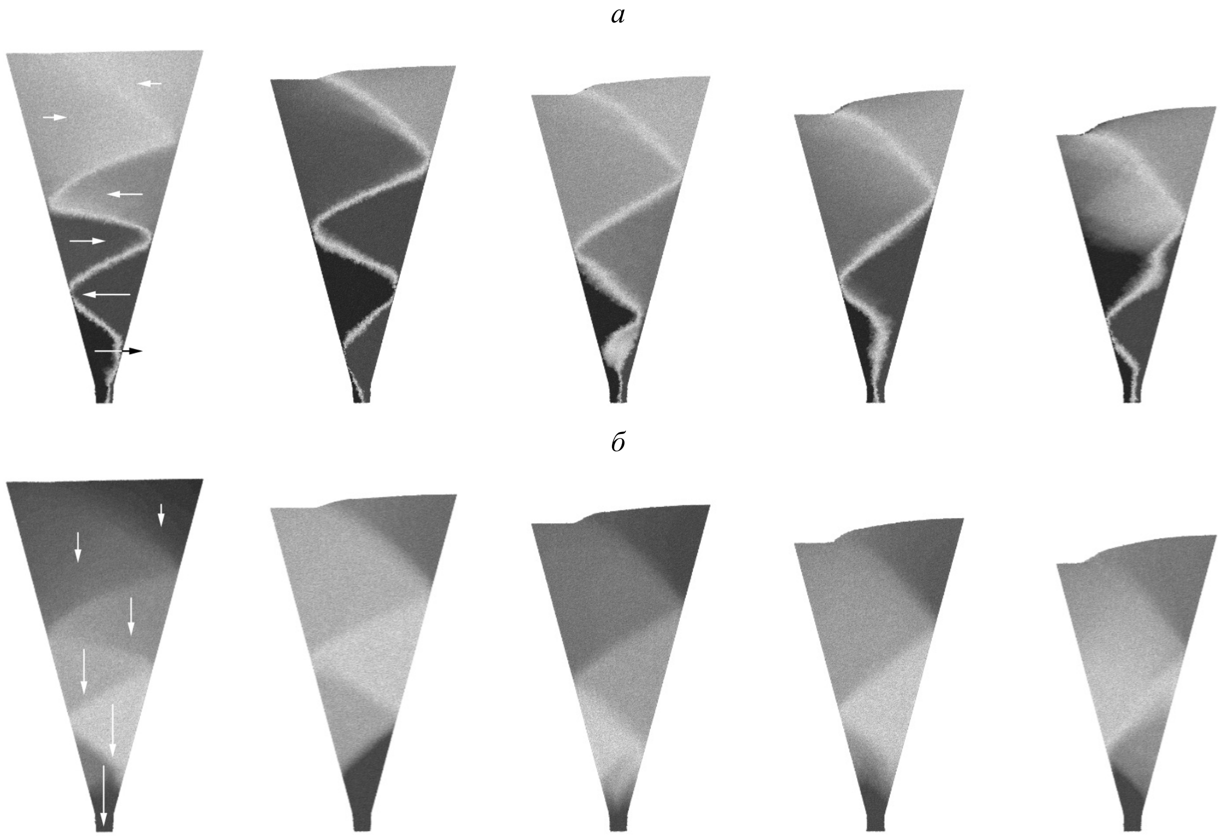

Рис. 5. Распределение горизонтальных (*а*) и вертикальных (*б*) смещений в частицах; длина и направление стрелок характеризуют соответственно величину и направление относительных смещений в частицах

Выше представлены результаты исследования поступательного движения частиц материала при выпуске. Рассмотрим вращательное движение частиц относительно их центров тяжести. На рис. 6 приведено распределение абсолютных модулей вектора поворота в частицах в процессе выпуска. Вращение частиц происходит только вдоль линий скольжения, при этом внутри блоков, на которые разбивается материал, вращение частиц отсутствует.

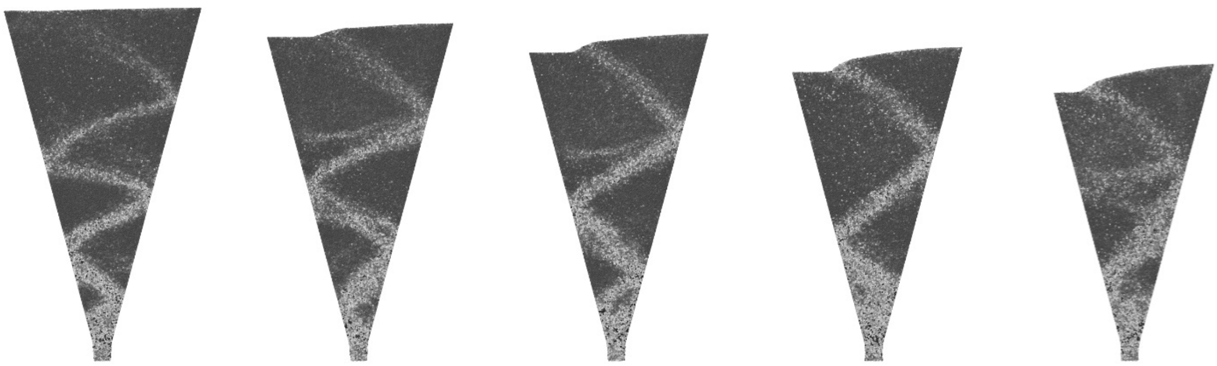

Рис. 6. Распределение абсолютных модулей вектора поворота $|\boldsymbol{\omega}|$ в частицах; темным цветом показаны значения $|\boldsymbol{\omega}| \leq 5°$, светлым — $|\boldsymbol{\omega}| \geq 25°$

Траектории движения выбранных отдельных частиц при выпуске из бункера показаны на рис. 7.

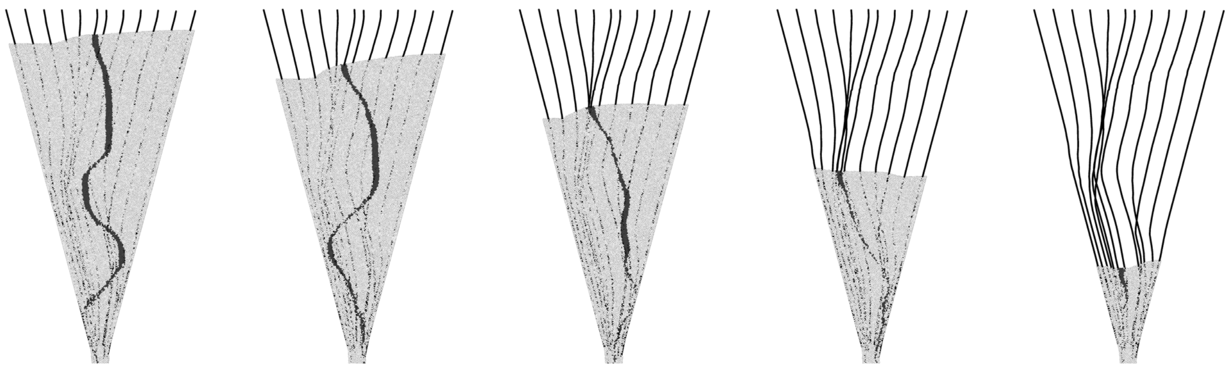

Рис. 7. Траектории движения отдельных частиц при выпуске сыпучего материала

Массовый расход сыпучего материала при таком способе выпуска для разных коэффициентов внешнего трения между частицами и между частицами и стенками бункера представлен на рис. 8.

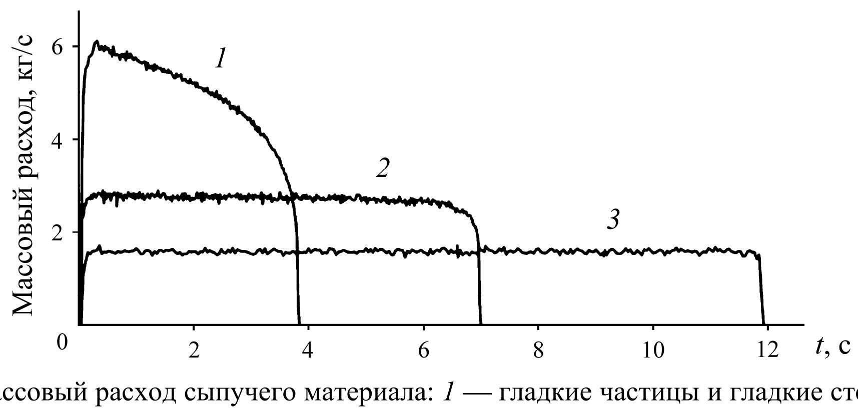

Рис. 8. Массовый расход сыпучего материала: *1* — гладкие частицы и гладкие стенки; *2* — шероховатые частицы и гладкие стенки; *3* — шероховатые частицы и шероховатые стенки

В случае абсолютно гладких частиц и границ (рис. 8, кривая *1*) массовый расход уменьшается с уменьшением количества оставшегося в бункере материала, в то время как при наличии трения (как между частицами, так и между частицами с стенками) массовый расход является постоянной величиной. Время полного выпуска в случае шероховатых частиц и стенок увеличивается в 3 раза по сравнению с гладкими частицами и границами бункера.

Известно, что лабораторное моделирование на сыпучих материалах различных технологических процессов, в том числе выпуска из бункеров, включает в себя несколько этапов. Первый — анализ критериев подобия, затем изготовление моделей и проведение соответствующих экспериментов. В качестве результата фиксируется кинематика деформирования и разрушения, а также распределение напряжений. Для исследования кинематики имеется широкий спектр возможностей, начиная от нанесения координатной сетки на материал и заканчивая использованием рентгеновских снимков и различных вариантов алгоритма PIV [45, 46].

Вопросы, связанные с измерением напряжений, гораздо труднее, т. е. проблема измерения напряжений на моделях и в натурных условиях — сложная задача. Здесь не разработано универсальных и признанных способов измерения как в плане методики, так и в плане аппаратурной реализации. Для расчета напряжений в рамках континуальных постановок необходимо привлечение замкнутых моделей, учитывающих напряжения. В то же время при численных расчетах методом дискретных элементов такой проблемы не существует, так как на каждом шаге нагружения известны все силы, действующие между частицами и между частицами и границей.

На рис. 9 показаны суммарные силы, действующие на боковые стенки бункера при отсутствии трения между частицами и между частицами и стенками. Силы, приложенные к боковым стенкам бункера, убывают с постоянной скоростью, а их отношение F_1/F_2 практически равно 1.

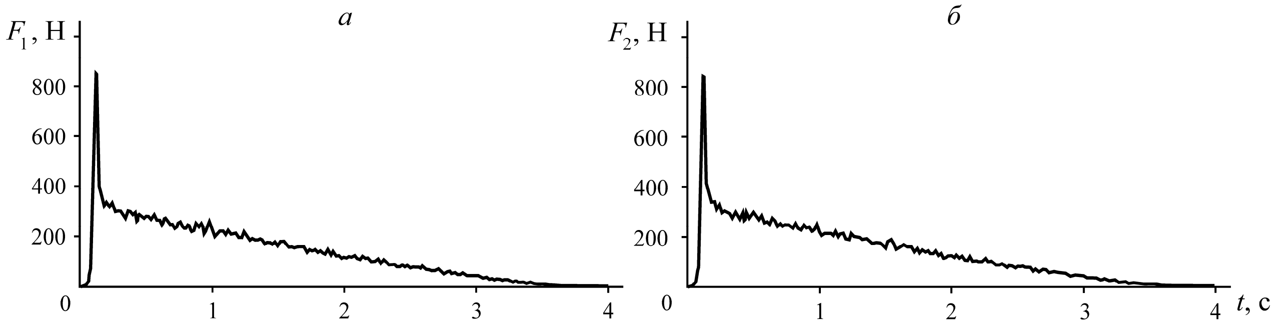

Рис. 9. Суммарные силы F_1 (*а*) и F_2 (*б*), действующие со стороны сыпучего материала на боковые стенки бункера в процессе выпуска в случае гладких частиц и гладких стенок

На рис. 10 представлено изменение отношения F_1 / F_2 в процессе выпуска в случае гладких частиц и стенок и шероховатых частиц и гладких стенок.

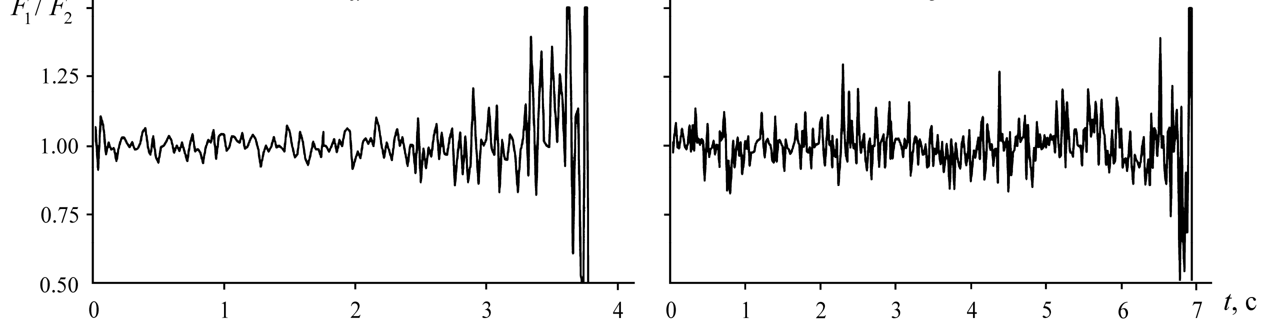

Рис. 10. Отношение суммарных сил F_1/F_2, действующих со стороны сыпучего материала на боковые стенки бункера, в процессе выпуска в случае гладких частиц и гладких стенок (*а*) и шероховатых частиц и гладких стенок (*б*)

Во второй серии численных экспериментов используются периодические краевые условия относительно оси Oz. Суммарная масса сыпучего материала поддерживается постоянной — осуществляется выпуск с досыпкой, как на рис. 1. Распределение горизонтальных смещений в частицах материала через равные промежутки времени приведено на рис. 11. Несимметричный режим выпуска осуществляется в случае шероховатых частиц и гладких боковых стенок. Видно, что в материале происходит постоянная смена направлений движения его отдельных блоков, причем на границе этих блоков наблюдается вращение частиц относительно их центров тяжести.

Рис. 11. Распределение горизонтальных смещений в частицах при выпуске с периодическими граничными условиями; длина и направление стрелок характеризуют соответственно величину и направление относительных смещений; частицы шероховатые, боковые стенки гладкие

На рис. 12 показано изменение отношения F_1/F_2 в процессе выпуска в случае шероховатых частиц и гладких стенок. Видно, что данное значение нестационарное на всем протяжении численного эксперимента.

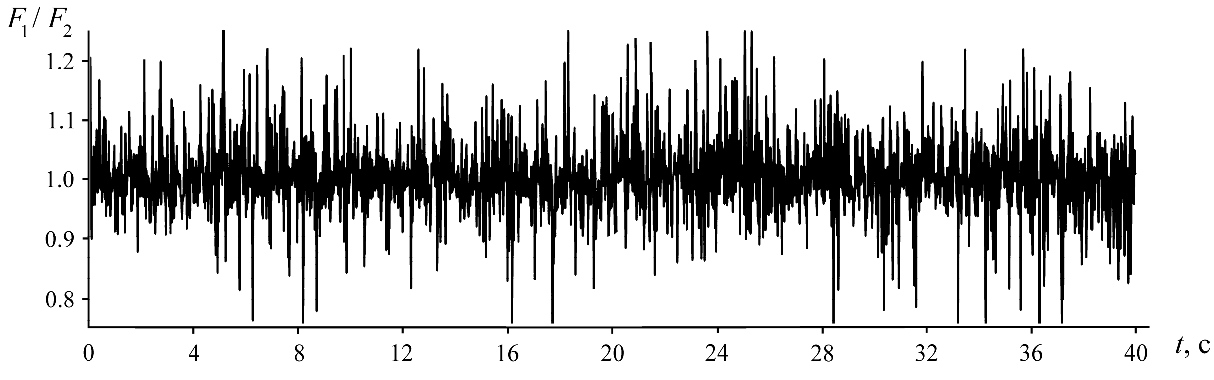

Рис. 12. Отношение суммарных сил F_1/F_2, действующих со стороны сыпучего материала на боковые стенки бункера, в процессе выпуска с досыпкой

ВЫВОДЫ

Для численного исследования гравитационного выпуска сыпучих материалов наиболее адекватным представляется метод дискретных элементов. Показано, что сдвиговые деформации сыпучего материала при выпуске локализуются вдоль семейств линий скольжения, которые функционируют последовательно. При стационарных внешних условиях гравитационный выпуск сыпучих материалов из сходящихся радиальных каналов носит нестационарный характер. Результаты численного моделирования методом дискретных элементов показывают качественное соответствие данным лабораторных экспериментов по локализованному режиму течения сыпучих материалов в сходящихся каналах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Janelid I. and Kvapil R.** Sublevel caving, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 1966, Vol. 3, Iss. 2. — P. 129 – 132.
2. **Wang J., Yang S., Li Y., Wei L., and Liu H.** Caving mechanisms of loose top-coal in longwall top-coal caving mining method, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 2014, Vol. 71. — P. 160 – 170.
3. **Hustrulid W. and Kvapil R.** Sublevel Caving — past and future, Proc. of the 5th Int. Conf. and Exhibition on Mass Mining, Luleå University of Technology Press, Luleå, Sweden, 2008. — P. 107 – 132.
4. **Kvapil R.** Gravity flow of granular materials in hoppers and bins, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 1965, Vol. 2, Issue 1. — P. 25 – 41.
5. **Kvapil R.** Gravity flow of granular materials in Hoppers and bins in mines — II. Coarse material, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 1965, Vol. 2, Issue 3. — P. 277 – 292.
6. **Vakili A. and Hebblewhite B. K.** A new cavability assessment criterion for Longwall Top Coal Caving, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 2010, Vol. 47, Iss. 8. — P. 1317 – 1329.
7. **Wang J., Zhang J., Song Z., and Li Z.** Three-dimensional experimental study of loose top-coal drawing law for longwall top-coal caving mining technology, J. Rock Mech. Geotech. Eng., 2015, Vol. 7, Issue 3. — P. 318 – 326.
8. **Xu N., Zhan J., Tian H., Mei G., and Ge Q.** Discrete element modeling of strata and surface movement induced by mining under open-pit final slope, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 2016, Vol. 88. — P. 61 – 76.
9. **Jia Q., Tao G., Liu Y., and Wang S.** Laboratory study on three-dimensional characteristics of gravity flow during longitudinal sublevel caving, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 2021, Vol. 144. — P. 104815.
10. **Jin A., Sun H., Wu S., and Gao Y.** Confirmation of the upside-down drop shape theory in gravity flow and development of a new empirical equation to calculate the shape, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 2017, Vol. 92. — P. 91 – 98.
11. **Tao G. Q., Yang S. J., and Ren F. Y.** Experimental research on granular flow characters of caved ore and rock, Rock Soil Mech., 2009, Vol. 30, Issue 10. — P. 2950 – 2954.
12. **Zhang X., Tao G., and Zhu Z.** A gravity flow model of fragmented rocks in longitudinal sublevel caving of inclined medium-thick ore bodies, Archives Min. Sci., 2019, Vol. 64, Issue 3. — P. 533 – 546.
13. **Bransby P. L. and Blair-Fish P. M.** Deformations near rupture surfaces in flowing sand, Géotechnique, 1975, Vol. 25, Issue 2. — P. 384 – 389.
14. **Michalowski R. L.** Flow of granular material through a plane hopper, Powder Technology, 1984, Vol. 39, Issue 1. — P. 29 – 40.
15. **Walters J. K.** A theoretical analysis of stresses in axially-symmetric hoppers and bunkers, Chemical Eng. Sci., 1973, Vol. 28, Issue 3. — P. 779 – 789.
16. **Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И.** О несимметрии пластического течения в сходящемся симметричном канале // ФТПРПИ. — 1977. — № 3. — С. 3 – 9.
17. **Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е.И.** Несимметрия пластического течения в сходящихся осесимметричных каналах // ДАН. — 1979. — Т. 246. — № 3. — С. 572 – 574.
18. **Bobryakov A. P., Klishin S. V., Kosykh V. P., and Revuzhenko A. F.** Pulsation-nature stresses on flat convergent walls of slot-type hopper under granular medium flow, Conf. Series: Earth and Environmental Science, 2018, Vol. 134, Issue 1. — P. 012007.
19. **Bobryakov A. P., Klishin S. V., Kosykh V. P., Lavrikov S. V., Mikenina O. A., and Revuzhenko A. F.** Deformation of granular material flow in converging channels, Conf. Series: Earth and Environmental Science, 2018, Vol. 206, Issue 1. — P. 012004.
20. **Лавриков С. В.** К расчету течения геоматериалов в сходящихся каналах с учетом внутреннего трения и дилатансии // ФТПРПИ. — 2010. — № 5. — С. 17 – 27.

21. **Бушманова О. П., Бушманов С. Б.** Численное моделирование процесса деформирования материала в сходящемся канале в условиях возникновения линий локализации сдвигов // ФТПРПИ. — 2009. — № 4. — С. 33–38.
22. **Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф.** Стохастические модели в задачах локализованного деформирования сыпучих сред в радиальных каналах // ФТПРПИ. — 2000. — № 1. — С. 9–15.
23. **Jing L. and Stephansson O.** Fundamentals of discrete element methods for rock engineering: theory and applications, Elsevier, 2007, Vol. 85. — 562 p.
24. **Labra C. A., Oñate E., and Rojek J.** Advances in the development of the discrete element method for excavation processes, Universitat Politècnica de Catalunya, 2012.
25. **Wang X., Li B., Xia R., and Ma H.** Application of DEM in coal and agricultural machinery, Eng. Applications of Discrete Element Method, Springer, Singapore, 2021. — P. 21–34.
26. **Balevičius R. R., Kačianauskas R., Mróz Z., and Sielamowicz I.** Discrete-particle investigation of friction effect in filling and unsteady/steady discharge in three-dimensional wedge-shaped hopper, Powder Technology, 2008, Vol. 187, Issue 2. — P. 159–174.
27. **Abatzoglou N., Gil E. C., and Gosselin R.** Influence of hopper geometry on radial and axial concentration profiles of segregated and homogenized granular mixture flows, Powder Technology, 2014, Vol. 262. — P. 42–50.
28. **Xu J., Hu Z., Xu Y., Wang D., Wen L., and Bai C.** Transient local segregation grids of binary size particles discharged from a wedge-shaped hopper, Powder Technology, 2017, Vol. 308. — P. 273–289.
29. **Liu S., Chen H., Zhao X., Liu C., Wu T., and Su J.** Numerical investigation on granular flow from a wedge-shaped feed hopper using the Discrete Element Method, Chemical Eng. Technol., 2018, Vol. 41, Issue 5. — P. 913–920.
30. **Mollon G. and Zhao J.** Characterization of fluctuations in granular hopper flow, Granular Matter, 2013, Vol. 15, Issue 6. — P. 827–840.
31. **Mollon G.** Periodic instationarities of granular flows in conical hoppers, Granular Matter, 2020, Vol. 22, Issue 3. — P. 1–18.
32. **Wang S., Yan Y., and Ji S.** Transition of granular flow patterns in a conical hopper based on superquadric DEM simulations, Granular Matter, 2020, Vol. 22, Issue 4. — P. 1–16.
33. **Magalhães F. G. R., Atman A. P. F., Moreira J. G., and Herrmann H. J.** Analysis of the velocity field of granular hopper flow, Granular Matter, 2016, Vol. 18, Issue 2. — P. 1–7.
34. **Zhang S., Lin P., Wang C. L., Tian Y., Wan J. F., and Yang L.** Investigating the influence of wall frictions on hopper flows, Granular Matter, 2014, Vol. 16, Issue 6. — P. 857–866.
35. **Liao Z., Yang Y., Sun C., Wu R., Duan Z., Wang Y., Li X., and Xu J.** Image-based prediction of granular flow behaviors in a wedge-shaped hopper by combing DEM and deep learning methods, Powder Technology, 2021, Vol. 383. — P. 159–166.
36. **Benvenuti L., Kloss C., and Pirker S.** Identification of DEM simulation parameters by artificial neural networks and bulk experiments, Powder Technology, 2016, Vol. 291. — P. 456–465.
37. **Ma C., Yang J., Zenz G., Staudacher E. J., and Cheng L.** Calibration of the microparameters of the discrete element method using a relevance vector machine and its application to rockfill materials, Advances Eng. Software, 2020, Vol. 147. — P. 102833.
38. **Lu G., Third J. R., and Müller C. R.** Discrete element models for non-spherical particle systems: From theoretical developments to applications, Chem. Eng. Sci., 2015, Vol. 127. — P. 425–465.
39. **He Y., Evans T. J., Yu A., and Yang R.** Discrete modelling of compaction of non-spherical particles, EPJ Web of Conf., 2017, Vol. 140. — P. 01005.

40. **Soltanbeigi B., Podlozhnyuk A., Kloss C., Pirker S., Ooi J. Y., and Papanicolopulos S. A.** Influence of various DEM shape representation methods on packing and shearing of granular assemblies, Granular Matter, 2021, Vol. 23, Iss. 2. — P. 1 – 16.
41. **Sanchidrián J. A., Ouchterlony F., Segarra P., and Moser P.** Size distribution functions for rock fragmentsm, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 2014, Vol. 71. — P. 381 – 394.
42. **Fowler A. C. and Scheu B.** A theoretical explanation of grain size distributions in explosive rock fragmentation, Proc. of the Royal Society A: Mathematics, Physical and Eng. Sci., 2016, Vol. 472, Iss. 2190. — P. 20150843.
43. **Otsubo M., O'Sullivan C., and Shire T.** Empirical assessment of the critical time increment in explicit particulate discrete element method simulations, Comput. Geotech., 2017, Vol. 86. — P. 67 – 79.
44. **Kruggel-Emden H., Sturm M., Wirtz S., and Scherer V.** Selection of an appropriate time integration scheme for the discrete element method (DEM), Comput. Chem. Eng., 2008, Vol. 32, Iss. 10. — P. 2263 – 2279.
45. **Jahanger Z. K., Sujatha J., and Antony S. J.** Local and global granular mechanical characteristics of grain–structure interactions, Indian Geotech. J., 2018, Vol. 48, Iss. 4. — P. 753 – 767.
46. **Sarno L., Tai Y. C., Carravetta A., Martino R., Papa M. N., and Kuo C. Y.** Challenges and improvements in applying a particle image velocimetry (PIV) approach to granular flows, J. Physics: Conf. Series, IOP Publishing, 2019, Vol. 1249, Iss. 1. — P. 012011.

Поступила в редакцию 26/X 2022
После доработки 27/XII 2022
Принята к публикации 19/I 2023