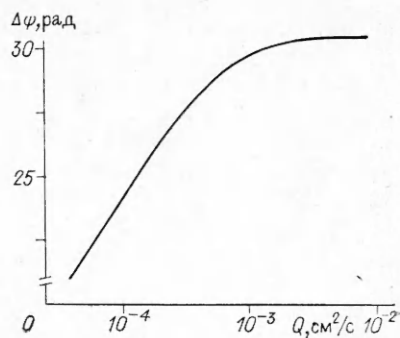


верхностного трения. Схема измерений предлагается следующая: по данным зависимости набега фазы $\Delta\varphi$, найденного экспериментально (рис. 4), определяется промежуточный (вспомогательный) параметр расхода Q . Из зависимости кажущейся вязкости η_a от Q вычисляется по формуле (2) константа напряжения сдвига b . Приводимая схема измерений подразумевает знание толщины слоя ЖК L , которая изменяется под действием потока и может быть неизвестна. Данная трудность устраняется, если мы будем снимать значение фазового набега в двух различных точках пленки одновременно и соответственно вычислять уже два параметра: L и b . Такой прием использовался, например, в [7]. Отметим, что предлагаемая методика требует экспериментальной проверки и корректировки.



Р и с. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Klein E. J. Application of liquid crystals to boundary layer flow visualization.— N. Y., 1968.— (Pap./AIAA; N 68—3767).
2. Zharkova G. M. The application of liquid crystals in experimental aerodynamics // Fluid Mechanics — Soviet Research.— 1980.— V. 9, N 3.
3. Call P. D., Holmes B. J. Liquid crystals for high-altitude inflight boundary layer flow visualization.— N. Y., 1986.— (Pap./AIAA; N 86—2592).
4. Чандросекар С. Жидкие кристаллы.— М.: Мир, 1980.
5. Линь Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости.— М.: ИЛ, 1958.
6. Преображенский Н. Г., Трашкев С. И. Многомодовый режим колебаний директора ЖК в световом поле наклонной о-волны // Оптика и спектроскопия.— 1987.— Т. 62, вып. 6.
7. Tanner L. H., Blows L. G. A study of the motion of oil film on surfaces in air flow, with application to the measurement of skin friction // J. Phys. E: Scient. Instrum.— 1976.— V. 9.

г. Новосибирск

Поступила 2/Х 1991 г.,
в окончательном варианте — 10/II 1992 г.

УДК 532.526

А. В. Федоров, А. П. Хохлов

МЕЖМОДОВЫЙ ОБМЕН В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Начальная стадия ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое характеризуется развитием неустойчивых мод [1, 2]. При низком уровне внешних воздействий ее протяженность соизмерима с масштабом, на котором проявляются эффекты непараллельности среднего течения. Нарастание пограничного слоя вниз по потоку вызывает искажение характеристик отдельных мод, с одной стороны, и межмодовый обмен — с другой.

При дозвуковых и умеренных сверхзвуковых скоростях потока неустойчивой является только первая мода (волна Толлмина — Шлихтинга), параметры которой существенно отличаются от параметров других собственных колебаний. В этом случае межмодовый обмен слабый и развитие волны Толлмина — Шлихтинга можно рассматривать отдельно. В такой постановке выполнены многочисленные расчеты эволюции неустойчивых возмущений в пограничном слое [1, 2]. Они служат основой

© А. В. Федоров, А. П. Хохлов, 1992

5*

67

e^N -метода расчета чисел Рейнольдса начала ламинарно-турбулентного перехода [3].

При достаточно больших числах Маха (конкретные значения можно найти в [4]) происходят качественные изменения в спектре собственных колебаний, появляется неустойчивость второй, третьей, и т. д. мод акустического типа. Акустическая неустойчивость обусловлена синхронизацией между модами дискретного спектра [5, 6]. В окрестности синхронизма дисперсионные кривые $\alpha(\omega)$ (α — волновое число, ω — частота возмущения) расщепляются: одна мода получает положительное приращение инкремента, другая — отрицательное. Если глубина расщепления достаточно велика, формируется область неустойчивости, возле границ которой располагаются точки ветвления спектра [5—7]. В окрестности точек ветвления собственные значения двух мод сближаются, поэтому здесь возможен интенсивный межмодовый обмен за счет непараллельности среднего течения. Аналогичные особенности имеют место в тонком ударном слое [6, 8, 9].

В настоящей работе анализируется межмодовый обмен возле точек ветвления спектра на примере сверхзвукового пограничного слоя. Результаты носят достаточно общий характер и могут использоваться для других классов неустойчивых слабонепараллельных течений.

1. Рассмотрим двумерное течение в ламинарном пограничном слое с характерной толщиной δ . Пусть на масштабе $L \gg \delta$ параметры основного течения меняются вниз по потоку на основной порядок. Продольную x_1 , поперечную y и трансверсальную z координаты обезразмерим по δ , время t — по δ/U_e (U_e — характерная скорость на внешней границе пограничного слоя). Возмущение с фиксированной частотой $\omega \neq 0$ и z -компонентой волнового вектора β представим в виде $\mathbf{Q} = \mathbf{F}(x_1, y) \times \exp(i\beta z - i\omega t)$.

Введем «медленную» переменную $x = \varepsilon x_1$ (малый параметр $\varepsilon = \delta/L$ характеризует непараллельность основного течения). Амплитуда \mathbf{F} удовлетворяет линеаризованным уравнениям Навье — Стокса, которые можно записать в операторной форме

$$(1.1) \quad H(y, \partial_y, x, \varepsilon \partial_x, \beta, \omega) \mathbf{F} = 0; |\mathbf{F}| \rightarrow 0, y \rightarrow \infty;$$

$$(1.2) \quad N(\partial_y, x, \beta, \omega) \mathbf{F}(x, 0) = 0,$$

где (1.2) — однородные граничные условия на обтекаемой поверхности $y = 0$; матрицы H, N зависят от параметров основного течения, их явный вид можно найти в [1, 10].

Рассмотрим частное решение задачи (1.1), (1.2), которое представляет суперпозицию мод дискретного спектра, распространяющихся вниз по потоку от некоторого источника возбуждения:

$$(1.3) \quad \mathbf{F} = \sum_k (\mathbf{F}_{k0} + \varepsilon \mathbf{F}_{k1} + \dots) \exp(i\varepsilon^{-1} S_k), \quad S_k = \int_{x_S}^x \alpha_k(x) dx.$$

Предполагается, что в начальном сечении x_S амплитуды мод заданы. В старшем порядке по ε получаем локально-однородную задачу, содержащую x как параметр:

$$(1.4) \quad H(y, \partial_y, x, i\alpha, \beta, \omega) \mathbf{F}_0 = 0, N \mathbf{F}_0(x, 0) = 0, |\mathbf{F}_0| \rightarrow 0, y \rightarrow \infty.$$

Здесь и далее индекс k опущен. Решение \mathbf{F}_0 удобно представить в виде произведения собственной функции задачи (1.4) $\mathbf{A}(x, y, \alpha)$ с некоторой наперед заданной нормировкой на функцию $C(x)$. Уравнение для следующего приближения \mathbf{F}_1 разрешимо, если его правая часть ортогональна собственной функции \mathbf{B} сопряженной задачи, т. е.

$$(1.5) \quad \mathbf{F}_0 = C(x) \mathbf{A}(x, y, \alpha),$$

$$\left\langle \mathbf{B}, \frac{\partial H}{\partial \alpha} \mathbf{A} \right\rangle \frac{dC}{dx} + \left\langle \mathbf{B}, \frac{\partial H}{\partial \alpha} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{d\alpha}{dx} \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} \mathbf{A} \right\rangle C = 0,$$

$$C(x_S) = C_S, \quad \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^\infty \sum_j f_j^* g_j dy$$

(звездочка обозначает комплексное сопряжение). Система (1.4), (1.5) описывает эволюцию моды пограничного слоя без учета межмодового обмена. Локальное поведение собственного значения $\alpha(x)$ можно определить, заменив в (1.4) \mathbf{F}_0 на \mathbf{A} , продифференцировав систему уравнений по x и выписав условие разрешимости получившейся задачи [10] как

$$(1.6) \quad \left\langle \mathbf{B}, \frac{\partial H}{\partial \alpha} \mathbf{A} \right\rangle \frac{d\alpha}{dx} + \left\langle \mathbf{B}, \frac{\partial H}{\partial x} \mathbf{A} \right\rangle = 0.$$

Разложение (1.3) пригодно в областях, где ни одно из собственных значений не равно нулю и все они различны [11]. Для возмущений с ненулевой частотой первое условие эквивалентно отсутствию мод с бесконечной фазовой скоростью, что выполняется для физических задач, второе означает, что в спектре нет точек ветвления. Выясним, в каких случаях оно нарушается. Пусть в точке x_0 , вообще говоря комплексной, существуют собственное значение α_0 и собственная функция $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}(x_0, y, \alpha_0)$. В малой окрестности точки x_0 представим собственную функцию в виде ряда

$$(1.7) \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_0(y) + \kappa \mathbf{A}_1(y) + \kappa^2 \mathbf{A}_2(y) + \dots, \quad \kappa = \alpha - \alpha_0.$$

Предполагая аналитичность оператора H в окрестности точки (x_0, α_0) , разложим его в ряд, подставим (1.7) в (1.4) и умножим скалярно на решение сопряженной задачи $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}(x_0, y, \alpha_0)$. В результате получим уравнение, связывающее α и x :

$$(1.8) \quad \left\langle \mathbf{B}_0, \frac{\partial H_0}{\partial \alpha} \mathbf{A}_0 \right\rangle \kappa + \left\langle \mathbf{B}_0, \frac{\partial H_0}{\partial x} \mathbf{A}_0 \right\rangle X + \left\langle \mathbf{B}_0, \frac{\partial H_0}{\partial \alpha} \mathbf{A}_1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \alpha^2} \mathbf{A}_0 \right\rangle \kappa^2 + \dots = 0, \quad X = x - x_0.$$

Точка x_0 является точкой ветвления низшего порядка, если

$$(1.9) \quad \left\langle \mathbf{B}_0, \frac{\partial H_0}{\partial \alpha} \mathbf{A}_0 \right\rangle = 0, \quad \left\langle \mathbf{B}_0, \frac{\partial H_0}{\partial x} \mathbf{A}_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \alpha^2} \mathbf{A}_0 \right\rangle \neq 0;$$

$$(1.10) \quad \alpha = \alpha_0 \pm \lambda \sqrt{X} + \dots, \quad \lambda^2 = - \left\langle \mathbf{B}_0, \frac{\partial H_0}{\partial x} \mathbf{A}_0 \right\rangle / \left\langle \mathbf{B}_0, \frac{\partial H_0}{\partial \alpha} \mathbf{A}_1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \alpha^2} \mathbf{A}_0 \right\rangle.$$

Это наиболее типичный случай, так как для ветвления более высокого порядка необходимо накладывать дополнительные условия ортогональности. Убедимся, что разложение (1.7) имеет смысл. Для этого подставим его в (1.4) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях X нулю, учитывая (1.10):

$$(1.11) \quad H_0 \mathbf{A}_0 = 0, \quad H_0 \mathbf{A}_1 + \frac{\partial H_0}{\partial \alpha} \mathbf{A}_0 = 0, \\ H_0 \mathbf{A}_2 + \lambda^{-2} \frac{\partial H_0}{\partial x} \mathbf{A}_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \alpha^2} \mathbf{A}_0 + \frac{\partial H_0}{\partial \alpha} \mathbf{A}_1 = 0.$$

В силу (1.9), (1.10) правые части второго и третьего уравнений ортогональны сопряженной функции \mathbf{B}_0 , следовательно, решения $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \dots$ существуют.

Чтобы найти асимптотику $C(X)$ при $X \rightarrow 0$, подставим (1.7) и аналогичное разложение для сопряженной задачи в (1.5), (1.6) и учтем (1.10), в результате получим

$$(1.12) \quad C(X) = C_0 X^{-1/4} + \dots, \quad X \rightarrow 0.$$

Главный член разложения имеет универсальный вид, т. е. при различных нормировках собственной функции A меняются только константа C_0 и последующие регулярные члены асимптотики. Особенность функции $C(X)$ в окрестности точки ветвления целиком определяется поведением спектра $\alpha(x)$. С учетом (1.10), (1.12) главный член разложения (1.3) при $X \rightarrow 0$ запишем как

$$(1.13) \quad \mathbf{F} \sim [a \exp(\varphi) + b \exp(-\varphi)] X^{-1/4} \mathbf{A}_0 \exp[i\varepsilon^{-1}(S_0 + \alpha_0 X)], \\ \varphi = (2/3)i\varepsilon^{-1}\lambda X^{3/2}.$$

Если $X = O(\varepsilon^{2/3})$, эйкональное представление (1.3) непригодно. Во внутренней области с переменной $\xi = \varepsilon^{-2/3}X$ имеем

$$(1.14) \quad \mathbf{F} = \varepsilon^{-1/6} \exp(i\varepsilon^{-1}S_0 + i\varepsilon^{-1/3}\alpha_0\xi) [f_0(\xi)\mathbf{A}_0 + \\ + \varepsilon^{1/3}f_1(\xi)\mathbf{A}_1 + \varepsilon^{2/3}f_2(\xi)\mathbf{A}_2 + \dots] + \dots;$$

$$(1.15) \quad H_0\mathbf{A}_0 = 0, \quad f_1 H_0 \mathbf{A}_1 - i f_0' \frac{\partial H_0}{\partial \alpha} \mathbf{A}_0 = 0;$$

$$(1.16) \quad f_2 H_0 \mathbf{A}_2 + \xi f_0 \frac{\partial H_0}{\partial x} \mathbf{A}_0 - i f_1' \frac{\partial H_0}{\partial \alpha} \mathbf{A}_1 - \frac{1}{2} f_0'' \frac{\partial^2 H_0}{\partial \alpha^2} \mathbf{A}_0 = 0$$

(штрих обозначает дифференцирование по ξ). Учитывая (1.11), из второго уравнения в (1.15) получаем $f_1 = -i f_0'$. Из условия разрешимости (1.16) и соотношения (1.10) вытекает

$$(1.17) \quad f_0'' + \lambda^2 \xi f_0 = 0.$$

Асимптотика решений уравнения Эйри (1.17) зависит от ориентации линий Стокса l_j , $j = 1, 2, 3$, которые определяются из условия $\text{Re } \Delta(\xi) = 0$, $\Delta(\xi) = (2/3)i\lambda\xi^{3/2}$.

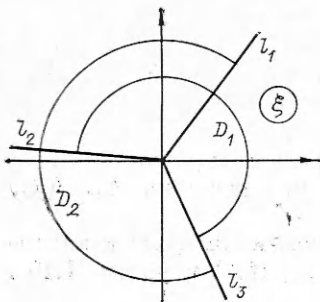
Пусть линии Стокса проходят в комплексной плоскости ξ , как показано на рис. 1. Следуя [12], введем согласованные канонические области D_j : $l_j \in D_j$, $l_{k \neq j} \in \partial D_j$. Выберем ветвь функции $\Delta(\xi)$ в каждой из областей так, чтобы $\text{Im } \Delta > 0$, $\xi \in l_j \in D_j$. Тогда $\text{Re } \Delta > 0$ (< 0) справа (слева) от l_j , решение (1.17) имеет асимптотику

$$(1.18) \quad f_0 \sim c_j \xi^{-1/4} [a_j \exp(\Delta) + b_j \exp(-\Delta)], \quad |\xi| \rightarrow \infty, \\ \xi \in D_j, \quad |c_j| = 1, \quad \arg(c_j \xi^{-1/4}) = 0, \quad \xi \in l_j, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$(1.19) \quad \begin{bmatrix} a_{j+1} \\ b_{j+1} \end{bmatrix} = \exp(-i\pi/6) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2.$$

Продолжим линии Стокса в область $X = o$ (1), где справедлива асимптотика (1.13). Выберем ветви функции $\varphi(X)$ так же, как для $\Delta(\xi)$, положим $(a, b) = c_j(a_j, b_j)$ и потребуем, чтобы $\arg(c_j X^{-1/4}) = 0$, $X \in l_j$, тогда асимптотики (1.13), (1.18) сращиваются. Соотношение (1.19) определяет межмодовый обмен, когда вещественная ось x проходит из одной канонической области в другую, пересекая одну из линий Стокса. Матрица перехода имеет универсальный вид, она справедлива для любых типов слабонеоднородных течений, в спектре которых есть точка ветвления рассмотренного вида. Из (1.19) следует, что амплитуды мод меняются на свой основной порядок, поэтому эффектами межмодового обмена пренебрегать нельзя.

2. Аналогичный результат можно получить, раскладывая амплитуду возмущения \mathbf{F} по биортогональной системе собственных функций локально-однородной задачи и используя формализм [1] в двухмодовом приближении. Линеаризованные уравнения Навье — Стокса для амплитуды возмущения с фиксированной частотой и их частное решение, представляющее суперпозицию двух мод, запишем в



Р и с. 1

виде

$$(2.1) \quad (H_0(y, \partial_y, x, \beta, \omega) + \varepsilon H_1(y, \partial_y, x, \beta, \omega) \partial x) \mathbf{F} = 0, \quad N\mathbf{F}(x, 0) = 0, \\ \mathbf{F} = \sum_{j=1}^2 c_j(x) \mathbf{A}_j(x, y) \exp(i\varepsilon^{-1} S_j).$$

Собственные функции \mathbf{A}_j и коэффициенты c_j являются решениями уравнений

$$(2.2) \quad (H_0 + i\alpha_j H_1) \mathbf{A}_j = 0, \quad N\mathbf{A}_j(x, 0) = 0, \quad |\mathbf{A}_j| \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty; \\ \frac{dc_j}{dx} = \sum_{k=1}^2 W_{jk} c_k \exp[i\varepsilon^{-1} (S_k - S_j)], \quad j = 1, 2;$$

$$(2.3) \quad W_{jk} = - \frac{\langle \mathbf{B}_j, H_1 \frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial x} \rangle}{\langle \mathbf{B}_j, H_1 \mathbf{A}_j \rangle}.$$

Раскладывая \mathbf{A}_j , $\alpha_j(x)$ и операторы H_0 , H_1 в окрестности точки ветвления x_0 и используя условия разрешимости для первого и второго приближений, при $X \rightarrow 0$ находим

$$\alpha_{1,2} = \alpha_0 \pm \lambda \sqrt{X} + \dots, \quad \mathbf{A}_{1,2} = \mathbf{A}^0 + (\alpha_{1,2} - \alpha_0) \mathbf{A}^1 + \dots, \\ H_1 = H_{10} + XH_{11} + \dots, \quad H_0 = H_{00} + XH_{01} + \dots, \\ \langle \mathbf{B}^0, H_{10} \mathbf{A}^0 \rangle = 0, \quad \lambda = \sqrt{-i \langle \mathbf{B}^0, H_{01} \mathbf{A}^0 \rangle / \langle \mathbf{B}^0, H_{10} \mathbf{A}^0 \rangle}.$$

Аналогичные разложения можно выполнить для решения \mathbf{B}_j сопряженной задачи. Подставляя их в (2.3), получаем, что матричные элементы в окрестности точки ветвления имеют универсальный вид $W_{jk} = (-1)^{j+k-1} / (4X)$. Решая систему (2.2), нетрудно показать, что асимптотика \mathbf{F} при $X \rightarrow 0$ аналогична (1.13). Во внутренней области $\xi = O(1)$

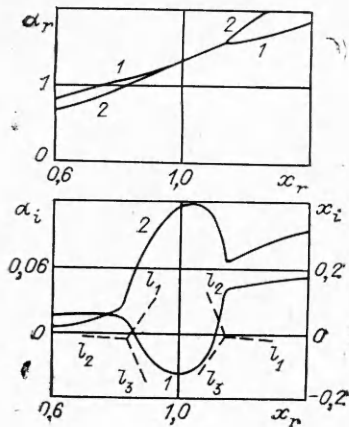
$$c'_1 = [-c_1 + c_2 \exp(-4i\lambda \xi^{3/2}/3)] / (4\xi), \\ c'_2 = [c_1 \exp(4i\lambda \xi^{3/2}/3) - c_2] / (4\xi).$$

Обозначив $\Phi_{1,2} = c_1 \exp(2i\lambda \xi^{3/2}/3) \pm c_2 \exp(-2i\lambda \xi^{3/2}/3)$, приходим к уравнению для Φ_1 , совпадающему с (1.17) для f_0 . Таким образом, оба подхода дают одинаковый результат для межмодового обмена.

3. В качестве примера рассмотрим пограничный слой на пластине, обтекаемой сверхзвуковым потоком совершенного газа. За характерный масштаб длины выберем толщину вытеснения $\delta^* \sim \sqrt{v_e x^* / U_e}$. «Быструю» и «медленную» продольные координаты определим равенствами $x_1 \equiv R = \delta^* U_e / v_e$, $x = \varepsilon R$. Малый параметр ε выберем равным обратному значению числа Рейнольдса, соответствующему максимальному инкременту неустойчивой моды, тогда $x = 1$ примерно в центре области неустойчивости. Задача на собственные значения (1.4) сводится к системе Лиза — Лиза (см., например, [1, 4]). На стенке используются условия равенства нулю возмущений скорости и температуры.

В силу автомодельности профили среднего течения зависят только от переменной y с точностью $O(\varepsilon)$, поэтому число Рейнольдса входит в уравнения в явном виде. Это существенно упрощает расчет собственных значений α при комплексных R , что необходимо для поиска точек ветвления и построения линий Стокса.

На рис. 2 показаны зависимости вещественной α_r и мнимой α_i частей волновых чисел от координаты x для первой и второй моды (кривые 1, 2). Расчет выполнен при следующих параметрах: число Маха 6, число Прандтля 0,72, показатель адиабаты 1,4, температурный фактор $T_w / T_{ag} = 0,2$, безразмерный частотный параметр $f = \omega^* v_e / U_e^2 = 2,7722 \times 10^{-4}$. Использовалась степенная зависимость коэффициента вязкости от температуры с показателем $n = 0,75$, параметр $\varepsilon = 2,276 \times$



Р и с. 2

$\times 10^{-4}$. В области $0,87 \leq x \leq 1,15$ собственные значения расщепляются, что приводит к возникновению неустойчивости моды 1. Поиск точек ветвления x_0 выполнялся по условию (1.9), их значения: $x_0^{(1)} \approx 0,853 - i2,21 \cdot 10^{-2}$, $x_0^{(2)} \approx 1,143 - i5,04 \cdot 10^{-3}$. Линии Стокса показаны пунктиром: l_1 , выходящая из точки $x_0^{(1)}$, и l_2 , выходящая из $x_0^{(2)}$, пересекают вещественную ось в точках $x_*^{(1)} \approx 0,869$, $x_*^{(2)} \approx 1,140$ соответственно.

Приведенной информации достаточно, чтобы описать эволюцию мод с учетом межмодового обмена. Пусть, например, в верхней по потоку области $x < x_*^{(1)}$ возбуждена только устойчивая мода 2, т. е. амплитудные коэффициенты в разложении (1.13) принимают значения $a = h$, $b = 0$. Используя

матрицу перехода (1.19), находим, что при $x > x_*^{(1)}$ $|a| = |b| = |h|$. Таким образом, устойчивая мода 2, проходя окрестность точки ветвления $x_0^{(1)}$, возбуждает неустойчивую моду 1 с равной себе амплитудой. Аналогично рассматривается случай, когда в верхней по потоку области присутствует только мода 1. Она проходит точку ветвления $x_0^{(1)}$, изменив фазу, и не возбуждает (в главном порядке по ϵ) моду 2.

В заключение отметим, что полученные результаты позволяют распространить e^N -метод на классы течений, собственные колебания которых имеют ветвящийся спектр с несколькими областями неустойчивости. Такая ситуация типична для невязких возмущений в гиперзвуковых пограничных слоях [4–7] и в тонком ударном слое [6, 8, 9]. При расчете интегральной степени усиления N необходимо переключаться с одной неустойчивой моды на другую по правилам (1.19), предварительно вычислив точки ветвления и построив линии Стокса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жигулев В. Н., Тумин А. М. Возникновение турбулентности.— Новосибирск: Наука, 1987.
2. Гапонов С. А., Маслов А. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках.— Новосибирск: Наука, 1980.
3. Hefner J. N., Bushnell D. M. Application of stability theory to Laminar Flow Control.— N. Y., 1979.— (Pap./AIAA; N 1493).
4. Mack L. M. Boundary-layer stability theory. Pt 2.— Pasadena, 1969.— (Jet Propulsion Lab. Doc. N 900—277 (rev. A)).
5. Гуцин В. Р., Федоров А. В. Возбуждение и развитие неустойчивых возмущений в сверхзвуковом пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1990.— № 3.
6. Гуцин В. Р., Федоров А. В. Качественные особенности неустойчивости пристенных течений при больших скоростях потока // Модели механики неоднородных систем.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1989.
7. Петров Г. В. Двумерная абсолютная неустойчивость сверхзвукового пограничного слоя // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1988.— № 1.
8. Petrov G. V. Stability of thin shock layer on wedge in hypersonic flow of a perfect gas // Laminar-Turbulent Transition: IUTAM Symp.— Novosibirsk, 1984.
9. Гуцин В. Р., Федоров А. В. Коротковолновая неустойчивость в ударном слое совершенного газа // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1989.— № 1.
10. Nayfeh A. H. Stability of three-dimensional boundary layers // AIAA J.— 1980.— V. 18, N 4.
11. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений.— М.: Наука, 1981.
12. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1983.

г. Жуковский

Поступила 16/V 1991 г.,
в окончательном варианте — 20/IX 1991 г.